

## ***RINGRAZIAMENTI***

Desidero innanzitutto ringraziare il Professor Nino Savelli che mi ha supportato e diretto nella stesura di questo elaborato. Grazie soprattutto per la sua disponibilità, l'aiuto costante, l'incoraggiamento e la fiducia dimostrami.

Un doveroso ringraziamento va al Professor Gian Paolo Clemente per il supporto nel fornirmi spunti interessanti per l'argomentazione, aiutandomi a risolvere alcune problematiche legate al software utilizzato.

Un sentito ringraziamento va al dott. Renato Bagnato per la disponibilità a spiegarmi nel dettaglio i meccanismi essenziali di un fondo pensione, mostrandomi come determinate tematiche hanno dei risvolti importanti nella realtà operativa.

Desidero ringraziare i miei genitori che, economicamente e moralmente, hanno sempre creduto in me e mi hanno permesso di raggiungere questo importante traguardo. Questo lavoro è dedicato a voi.

Infine ringrazio tutti gli amici che mi sono stati accanto sostenendomi in questo percorso quinquennale, in particolar modo desidero citare il gruppetto formatosi durante la laurea triennale in Scienze Bancarie e quello dell'Erasmus a Maastricht. Grazie ragazzi per aver reso questa esperienza universitaria indimenticabile.

## INDICE

INTRODUZIONE .....	4
LA PREVIDENZA COMPLEMENTARE .....	7
1 IL SISTEMA PREVIDENZIALE ITALIANO.....	7
1.1 Il sistema a “tre pilastri” .....	7
1.2 Sistemi Finanziari di gestione.....	8
1.3 Prestazione definita e contribuzione definita. ....	10
2 LA PREVIDENZA COMPLEMENTARE .....	11
2.1 Il funzionamento .....	11
2.2 Le tipologie di pensione complementari .....	11
2.3 Le prestazioni dei fondi pensione .....	14
3 SOLVIBILITÀ DI UN FONDO PENSIONE .....	16
3.1 La solvibilità di un fondo pensione in Italia: il Decreto Ministeriale n. 259/2012 .....	16
3.2 La solvibilità di un fondo pensione in un Paese estero.....	18
4 IL PROGETTO IORPS .....	21
4.1 Holistic Balance Sheet.....	21
4.2 QIS 1 – 2012.....	24
4.3 QIS 2 – 2015.....	37

I MODELLI DI GESTIONE.....	38
1 INTRODUZIONE .....	38
2 UN FONDO A PRESTAZIONI DEFINITA .....	39
3 UN FONDO A CONTRIBUZIONE DEFINITA .....	46
4 LA DINAMICA SALARIALE .....	50
5 LA STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI DI INTERESSE .....	52
5.1 il Processo di Wiener .....	52
5.2 Il modello di Black – Scholes – Merton.....	55
5.3 Il modello Cox – Ingersoll – Ross .....	58
6 IL LIVELLO DI FUNDING.....	60
7 SOLVIBILITÀ IN UN FONDO PENSIONE A CONTRIBUZIONE DEFINITA .....	62
IL RISCHIO DI LONGEVITÀ .....	64
1 LA DINAMICA DELLA MORTALITÀ .....	64
2 L’IMPATTO DEL LONGEVITY RISK .....	67
3 LE TAVOLE DEMOGRAFICHE .....	68
4 LA SCELTA DEL MODELLO DI STIMA.....	70
5 I MODELLI DI PREVISIONE DELLA MORTALITÀ.....	72
5.1 Il modello di Lee – Carter .....	73
5.2 Il modello di Poisson log-bilineare (Brounhs, Denuit e Vermunt).....	78
5.3 Il modello di Renshaw e Haberman .....	79
5.4 Il modello di Cairns – Blake – Dowd .....	80
5.5 Il modello di Plat.....	82
6 GESTIONE DEL LONGEVITY RISK.....	83
6.1 I Longevity Bond .....	86

6.2	La trasformata di Wang .....	89
	UN'ANALISI DI SOLVIBILITA' .....	92
1	INTRODUZIONE .....	92
2	IPOTESI SUI FONDI.....	93
3	IL FONDO A PRESTAZIONE DEFINITA.....	94
4	IL FONDO A CONTRIBUZIONE DEFINITA.....	103
5	UNA MISURA DI RISCHIO. ....	106
6	IL RISCHIO DI TASSO DI INTERESSE.....	107
6.1	Focus: Fondo a prestazione definita .....	114
6.2	Focus: Fondo a contribuzione definita .....	127
7	RISCHIO DI LONGEVITÀ.....	144
7.1	Introduzione .....	144
7.2	Analisi della popolazione italiana .....	145
7.3	Focus: Fondo a prestazione definita .....	147
7.4	Focus: Fondo a contribuzione definita .....	155
	CONCLUSIONI.....	163
	BIBLIOGRAFIA .....	168
	ELENCO DELLE FIGURE .....	173
	ELENCO DELLE TABELLE.....	175

## *INTRODUZIONE*

La previdenza complementare è oggi un punto fondamentale all'interno dei sistemi di welfare e lo sarà sempre più, non solo in Italia e in tutti i principali Paesi sviluppati, ma anche in molte nazioni emergenti.

I sistemi pensionistici erogati dallo Stato Italiano, sviluppati in maniera importante dal dopoguerra, sono basati su un sistema a ripartizione che è adatto ad una struttura demografica ed economica in crescita. Gli ultimi anni hanno tuttavia dimostrato che a fronte dell'invecchiamento della popolazione e al rallentamento della crescita, questo sistema presentava e presenta evidenti elementi di squilibrio finanziario con il conseguente accumularsi di significativi debiti previdenziali.

Se il fine del sistema pensionistico è quello di assicurare un reddito adeguato ai lavoratori nel momento in cui questi raggiungono l'età pensionabile, questo deve essere economicamente sostenibile.

Per questa ragione, i Governi a partire dal 1992 hanno emanato Leggi che hanno permesso di avviare un processo di riforma del sistema di welfare italiano con l'obiettivo di arrivare ad avere una sostenibilità nel medio e lungo periodo, permettendo quel rinnovamento necessario per mantenere il patto intergenerazionale che sta alla base di ogni sistema di welfare sociale e che oggi mostra molte incongruità nei trattamenti previdenziali tra le diverse generazioni.

Oltre a riforme che hanno modificato il sistema legislativo circa la previdenza pubblica, è stato avviato un nuovo sistema complementare con l'obiettivo di incrementare le prestazioni pensionistiche integrative, al fine di raggiungere una sostenibilità finanziaria di tutto il sistema previdenziale.

Con questi cambiamenti è permesso a tutti i lavoratori italiani di aderire volontariamente ad una forma pensionistica complementare incentivata attraverso la diffusione di benefici fiscali, con meccanismi di adesione tacita per i lavoratori dipendenti.

Un trattamento con agevolazioni fiscali maggiori è stato inoltre previsto per quei giovani lavoratori per i quali questa previdenza complementare costituirà una parte fondamentale per la loro pensione futura.

Nonostante tutto questo lavoro e sviluppo portato avanti negli anni da parte di numerosi Governi, la previdenza complementare incontra alcune resistenze di carattere culturale

che ne impediscono una compiuta espressione. Le pensioni pubbliche erogate, essendo generose, rendono difficile nelle generazioni più giovani una presa di coscienza dell'effettiva necessità di una prestazione aggiuntiva. Inoltre la poca conoscenza del mondo finanziario, non permette una facile compressione dei meccanismi di funzionamento di un sistema pensionistico privato a capitalizzazione.

Da questo contesto così articolato è nata una curiosità che ha portato alla realizzazione del lavoro esposto nel seguito.

La domanda spontanea che potrebbe nascere in un giovane che si affaccia nel mondo del lavoro sicuramente potrebbe contenere un dubbio riguardante la fiducia nei fondi pensione. Come si può essere certi che questi non falliscano e che il lavoratore ottenga veramente quanto sottoscritto al fine di avere un reddito adeguato nel futuro lontano.

L'elaborato cercherà di entrare nel dettaglio tecnico attuariale di questa domanda analizzando, in parte, i maggiori rischi legati alla solvibilità di un fondo mostrando come sia necessario che questo abbia un requisito di capitale importante al fine di poter operare e garantire sicurezza ai propri aderenti e, di conseguenza, permettere quel cambiamento culturale tanto necessario per tenere in equilibrio il sistema previdenziale Italiano.

Nel primo capitolo l'attenzione è focalizzata su aspetti normativi, in particolare nella prima parte si mostra nel dettaglio le caratteristiche che un fondo pensione può avere, sia in termini di prestazione, sia in termini di benefici. Nella seconda si mira a definire la normativa che definisce se un fondo è solvibile. Si analizza nel dettaglio il Decreto Ministeriale 259/2012 del Ministero del Lavoro e viene confrontato con la normativa presente in Gran Bretagna e nei Paesi Bassi, che rappresentano le nazioni europee dove la previdenza complementare è più sviluppata. Nella terza parte si illustrano le caratteristiche della nuova direttiva che la Commissione Europea sta elaborando, al fine di avere una normativa omogenea per tutta l'Europa, dove la solvibilità sia legata all'esposizione al rischio da parte del fondo.

Nel secondo capitolo si introduce la parte quantitativa. Vengono illustrati un fondo a prestazione definita e un fondo a contribuzione definita, evidenziando i loro punti di forza e di debolezza. Per quanto concerne la prima tipologia si analizza un fondo dove il contributo viene calcolato attraverso il metodo dell'*Individual Entry Age Method* e che prevede l'erogazione di una prestazione per diverse cause. Per quanto riguarda il fondo a

contribuzione definita, si illustra la sua logica di capitalizzazione che tiene conto dell'investimento dei capitali secondo due tassi di interesse, uno ad alto e l'altro a basso rischio. Per entrambi si mostra come possono essere modellizzati secondo due approcci molto diffusi in letteratura: il modello di *Black & Scholes* e il modello di *Cox, Ingersoll e Ross*. Infine si analizza quali sono le fonti principali di rischio e come possono essere prese in considerazione per valutare la solvibilità del fondo: viene introdotto il livello di funding. Mentre nel secondo capitolo è stata posta l'attenzione sugli andamenti del tasso di interesse, nel terzo si analizza il rischio di longevità. Dopo una breve introduzione riguardante l'importanza di tale rischio a livello nazionale, vengono illustrate diverse soluzioni proposte in letteratura per modellizzare, attraverso un processo stocastico, la mortalità futura. I modelli presi in esame sono quelli di Lee – Carter, il Brouhns, Denuit, Vermunt, quello proposto da Renshaw e Haberman, il modello di Cairns, Blake, Dowd e infine quello di Plat. Si analizza inoltre una possibile soluzione per fronteggiare questo rischio consistente nei Longevity Bond.

Nel quarto e ultimo capitolo ci si sofferma su delle analisi simulative che hanno l'obiettivo di mostrare l'incidenza che hanno i rischi analizzati nei capitoli precedenti e per ognuno di questi verrà calcolato un possibile requisito di capitale attraverso una misura di rischio consistente nel Value at Risk. Per il fondo a prestazione definita viene effettuata un'analisi solo per la fase di accumulo, mentre per il fondo a contribuzione viene presa in esame anche la fase di erogazione. Per quanto riguarda il tasso di interesse sono stati ipotizzati tre scenari, mentre per il rischio di longevità si sono utilizzati i modelli di Renshaw Haberman per il fondo di prestazione definita e il CBD per quello a contribuzione definita.

# LA PREVIDENZA COMPLEMENTARE

---

## **1 Il sistema previdenziale italiano**

### **1.1 Il sistema a “tre pilastri”**

Il sistema previdenziale italiano è strutturato attualmente secondo un sistema a “tre pilastri” che venne così delineato per la prima volta dal Decreto Legislativo 124/1993, denominato “riforma Amato”. Questo decreto ha una particolare importanza in quanto ha regolamentato la Previdenza Complementare.

Il primo pilastro è quello pubblico che è costituito dalla previdenza di base che ha l’obiettivo di fornire prestazioni che garantiscono un dignitoso livello di vita al termine dell’attività lavorativa. Viene finanziato mediante il contributo dei lavoratori e fornisce, attraverso una serie di soggetti, quali l’INPS e Casse di Previdenza dei Professionisti, prestazioni pensionistiche al verificarsi di determinati eventi quali ad esempio, la vecchiaia, l’invalidità e la morte del soggetto. Questo pilastro è di natura obbligatoria, ossia tutti i lavoratori sono obbligati ad aderire e versare i contributi.

Il secondo e il terzo pilastro possiedono invece un carattere privato e hanno una finalità integrativa. Il compito della Previdenza Complementare diventa quello di integrare la prestazione della pensione prevista dallo Stato. Prima della riforma Amato la tale Previdenza poteva essere anche sostitutiva di quella pubblica. Il lavoratore poteva decidere di versare tutti i contributi soltanto nella Complementare, ossia a quel fondo gestito da banche e assicurazioni o altre. Con questa riforma questa possibilità è stata vietata.



Entrando maggiormente nel dettaglio, il secondo pilastro è basato sulla partecipazione volontaria alle forme collettive di Previdenza (Fondi Pensione) ed è volto ad integrare la prestazione fornita dal sistema pubblico e a consentire nel periodo di quiescenza un adeguato tenore di vita. In questo secondo pilastro rientrano i fondi pensione e le casse di previdenza complementare.

Questi fondi vengono indicati nei contratti nazionali di lavoro così come le relative modalità di adesione.

Il terzo pilastro è sempre basato sulla partecipazione volontaria ma a forme individuali, mediante la stipulazione di appositi contratti assicurativi. Ha il compito di integrare i primi due e si pone l'obiettivo di migliorare il reddito dell'individuo, soddisfacendo anche eventuali e specifiche esigenze quali ad esempio la ricerca di un beneficio fiscale, la necessità di avere massima flessibilità dello strumento adottato, piuttosto che la protezione da eventuali rischi di perdite finanziarie. Quindi, a differenza di quanto visto per il secondo pilastro, gli strumenti di investimento a fini pensionistici utilizzati in questo ambito possono essere vari. Tra quelli che più comunemente vengono utilizzati possiamo citare: polizze unit – linked( ramo III assicurazioni sulla vita); polizze vita rivalutabili (ramo I); prodotti come i PAC ( Piani di Accumulo di Capitale) e infine investimenti di lungo termine in obbligazioni e titoli di stato.

Con la nuova normativa entrata in vigore il 1 gennaio 2007- che consiste nella cosiddetta "Riforma Maroni"( Decreto Legislativo n. 252/2005 ) - si porta ad equiparare le forme collettive con le forme complementari, facendo interpretare il sistema come un modello a due pilastri (pubblico e complementare). Ciò è dovuto alle nuove norme riguardanti il TFR ossia il Trattamento di Fine Rapporto che saranno analizzate nel seguito.

## **1.2 Sistemi Finanziari di gestione**

Il primo pilastro si differenzia rispetto agli altri due a seguito del sistema finanziario di gestione in quanto il primo è caratterizzato da un sistema a ripartizione pura, mentre gli altri seguono un sistema a capitalizzazione.

Il sistema a ripartizione pura è quello attualmente in vigore in Italia. I contributi della popolazione attiva provvedono al pagamento delle pensioni degli individui che hanno cessato l'attività lavorativa. Non si osserva quindi la formazione di riserve, in quanto si

ricerca un equilibrio nell'anno di gestione: tutto quello che viene incassato viene speso per il pagamento delle prestazioni.

Questo sistema trova fondamento in un concetto mutualistico che si può identificare con un patto tra le diverse generazioni di lavoratori. Tale sistema ha in sé un grande rischio. Nel momento in cui si viene a creare una diminuzione delle contribuzioni, dovuta all'aumento della popolazione in quiescenza rispetto a quella in attività, si genera una situazione di squilibrio tale da far sì che le generazioni future di lavoratori vedranno ridursi progressivamente la pensione.

Il secondo e il terzo pilastro invece sono caratterizzati da un sistema a capitalizzazione. In questo caso i contributi versati dal lavoratore sono accantonati e gestiti con lo scopo di generare la crescita del capitale accumulato e garantire la pensione futura. Risulta perciò immediata la stretta correlazione tra l'entità dei versamenti, il risultato della loro gestione e quella che sarà la prestazione pensionistica. A differenza del sistema a ripartizione qui si osserva la formazione di riserve. Le somme versate dai soggetti attivi vengono investite nel mercato, ma nel contempo il fondo deve possedere le riserve che attestano gli impegni nei confronti degli aderenti.

In conclusione in tutta la vita del lavoratore si avrà una riserva sia durante la fase attiva, in cui confluiscono i contributi e si ha un accumulo di riserva e una fase di erogazione della prestazione dove tale riserva esiste ma viene pian piano smontata.

Da sottolineare come nei regimi a capitalizzazione è compresa quella individuale, ossia capitalizzazione per rischi omogenei che si realizza con i premi equi propri delle assicurazioni libere sulla vita, in quanto sono considerati individui di pari età, sesso, ecc. La capitalizzazione collettiva, al contrario, chiamata anche capitalizzazione per rischi eterogenei, viene definita con vari premi di equilibrio, come ad esempio il premio medio generale o il premio medio per generazione. In questo caso gli oneri previdenziali, che saranno generati dall'intero collettivo o dalla singola generazione, verranno ripartiti sull'intera collettività, dando luogo a un trasferimento di somme da una posizione assicurativa ad un'altra, secondo un principio non solo di mutualità assicurativa, proprio delle forme a capitalizzazione individuale, ma anche di solidarietà assicurativa. Il trasferimento avviene tra tutti gli individui appartenenti alla collettività di riferimento senza dipendere dalla classe di rischio di appartenenza, come invece avviene per la capitalizzazione individuale.

### **1.3 Prestazione definita e contribuzione definita.**

Le forme pensionistiche gestite mediante un sistema a capitalizzazione possono essere suddivise tra forme a prestazione definita e forme a contribuzione definita.

In un fondo a prestazione definita il livello della pensione che riceverà il lavoratore è garantito al momento della sottoscrizione. Generalmente viene legato ad alcuni parametri quali una percentuale dell'ultimo salario o alla pensione pubblica percepita. L'ammontare dei contributi annui viene determinato in funzione del livello della prestazione garantita e del metodo di accantonamento scelto. Appare perciò evidente come dovranno essere fatte delle ipotesi sia demografiche sia finanziarie ma anche un'ipotesi sulla dinamica salariale, in quanto bisognerà partire da una stima dell'ultimo salario che all'atto della sottoscrizione non è conosciuto. Questo delinea come gran parte dei rischi che caratterizzano un fondo pensione a prestazione definita ricadino sul gestore del fondo. Di solito in questi fondi il contributo viene pagato dal datore di lavoro, denominato sponsor, ma in alcuni casi può esserci anche un contributo da parte del lavoratore.

Le forme pensionistiche a contribuzione definita prevedono invece che la rata di pensione che verrà erogata dal fondo dipenderà dal contributo versato, dall'andamento della gestione finanziaria e dal periodo di accumulazione. L'ammontare che verrà versato è fisso ed espresso in percentuale della retribuzione. In questo sistema si osserva quindi che non viene garantito un livello di prestazione al momento del pensionamento. Ciò ha quindi l'effetto di ridurre i rischi a carico del fondo, scaricandoli in parte sugli aderenti.

Nella nostra analisi ci soffermeremo maggiormente su un modello di fondo pensione a prestazione definita in quanto una struttura tecnico – attuariale è maggiormente presente nei fondi gestiti con questo regime. Nel caso a contribuzione definita la struttura formale è meno articolata, risultando una specie di fondo di accumulazione, dove l'elemento aleatorio fondamentale è il tasso di rendimento finanziario generato dagli investimenti ed il cui montante verrà liquidato sotto forma di rendite e capitale.

## **2 La previdenza complementare**

### **2.1 Il funzionamento**

Come accennato in precedenza le forme pensionistiche complementari operano secondo il regime della capitalizzazione individuale. Tale meccanismo prevede che i contributi versati, che confluiscono in un conto individuabile non pignorabile, siano gestiti finanziariamente all'interno di uno specifico profilo d'investimento scelto dal singolo aderente in funzione delle esigenze personali, ma soprattutto degli obiettivi previdenziali desiderati.

La normativa prevede che le forme a prestazione definita possono essere attivate soltanto per i Lavoratori Autonomi ed i Professionisti. Attualmente esistono pochi esempi di fondi a prestazione definita e tutti risalgono al sistema preesistente alla Riforma Amato del 1993, principalmente costituiti a livello aziendale. Ciò è in controtendenza rispetto a paesi del mondo Anglosassone dove questi piani risultano essere maggiormente sviluppati.

Le forme pensionistiche complementari possono essere alimentate dal versamento a carico del lavoratore, da quello a carico del datore di lavoro e dal versamento del TFR, ossia il trattamento unico di fine rapporto nel caso di lavoratori dipendenti, mentre dal solo contributo del lavoratore se si tratta di Lavoratori Autonomi o Professionisti.

Grazie a questo elemento la riforma Maroni del 2005 ha cercato di dare un impulso alla previdenza complementare attraverso il meccanismo del silenzio/assenso ossia dal 1 gennaio 2007 il lavoratore deve decidere come e in che modalità trasferire il proprio TFR fino a quel momento accantonato in azienda.

### **2.2 Le tipologie di pensione complementari**

Se il soggetto decide di partecipare alla previdenza complementare, sono quattro le forme a cui può far aderire il proprio TFR: i fondi pensione chiusi o negoziali, i fondi pensione aperti, le forme pensionistiche ante 421/92 e le forme individuali pensionistiche.

I fondi pensione chiusi sono la principale forma di previdenza collettiva. Sono così definiti perché nascono dalla contrattazione collettiva e sono rivolti ad una platea circoscritta di lavoratori: possono essere istituiti per singola azienda, per gruppi di aziende, per comparto di riferimento, per Albi e Ordini Professionali o per raggruppamenti territoriali. I destinatari infatti rispecchiano queste categorie. Possono aderire infatti:

- lavoratori dipendenti sia pubblici che privati in base ad accordi e contratti collettivi anche nazionali
- Quadri aziendali mediante accordi promossi dalle organizzazioni nazionali della categoria rappresentate in seno al CNEL;
- Autonomi e Professionisti in base ad accordi promossi da loro sindacati e associazioni.

Per quanto concerne la gestione delle risorse, la normativa prevede che questa sia attuata in forma diretta nel caso di quote di Fondi Comuni immobiliari e mobiliari chiusi e per le azioni o quote in società immobiliari; oppure mediante convenzioni con soggetti autorizzati quali Banche, Imprese Assicurative, SIM e Società di Gestione del Risparmio.

I fondi pensione aperti hanno il duplice ruolo sia di forma di Previdenza Complementare Individuale che Collettiva. Questi possono essere istituiti da soggetti quali Banche, SIM, S.g.r., Imprese di assicurazione. Questa tipologia di fondi è consigliata a Lavoratori Autonomi e Liberi Professionisti, Lavoratori Parasubordinati, Soci Lavoratori di Cooperative e Lavoratori dipendenti sia pubblici che privati, nel momento in cui non sussistano o non operino fondi di categoria, non esistano contratti nazionali di categoria o siano lavoratori in mobilità.

La gestione delle risorse in questa categoria può anche in questo caso essere diretta, con le limitazioni previste dal Decreto del Ministro del Tesoro n. 703/1996 o mediante convenzioni. In ogni caso è prassi che i Soggetti Istitutori siano anche i gestori del patrimonio.

I limiti posti dal Decreto consistono in:

- liquidità e titoli < 6 mesi: max 20% patrimonio
- fondi chiusi mobiliari e immobiliari: max 20% patrimonio
- valuta estera: max 2/3 patrimonio
- titoli di capitale non quotati: max 10% patrimonio

- titoli di uno stesso emittente: max 15% patrimonio
- investimenti fuori paese OCSE: max 5% patrimonio.

Da notare come questi siano esclusivamente limiti di blocco. Si potrebbe avere un portafoglio tutto azionario ma non tutto di Buoni Ordinari del Tesoro o Buoni del Tesoro Poliennali.

A seguito della riforma Amato, sono stati raggruppati sotto le sigla di Forme pensionistiche ante 421/92 tutti quegli enti con fini previdenziali istituiti precedentemente al 25 novembre 1992. È stato volutamente individuato questo insieme con un termine generico, forme previdenziali, al fine di ricomprendere nella normativa tutti gli schemi pensionistici preesistenti, indipendentemente dalla forma tecnica che essi si sono dati. D'altronde solo con l'entrata in vigore del Decreto del 1993 il legislatore ha tipicizzato la forma del Fondo Pensione come strumento esclusivo per realizzare la previdenza complementare del c.d. 'secondo pilastro'.

Ad oggi queste forme rappresentano ancora un aggregato rilevante ed eterogeneo. Tali fondi sono inoltre censiti in un apposito Albo istituito presso la COVIP. Sono forme di matrice principalmente bancaria e assicurativa, ma tra i promotori si annoverano anche aziende industriali ed Enti pubblici.

La loro gestione delle risorse può avvenire attraverso le medesime modalità dei fondi aperti con l'eccezione di non dover sottostare ai limiti posti dal D.M. 703/1996.

Infine si hanno le forme individuali pensionistiche che possono essere effettuate attraverso l'adozione di una moltitudine di strumenti a seconda delle caratteristiche e delle esigenze dell'individuo. A livello normativo esiste una netta distinzione tra quelle che sono riconosciute come forme di previdenza complementare individuali in senso stretto, per le quali si prevede il possesso di specifiche caratteristiche a fronte delle quali esiste un trattamento fiscale agevolato e quelle invece definibili come tali in senso lato, rappresentate da tutti gli altri veicoli utilizzati per lo stesso fine ma che non godono di benefici fiscali. In questo contesto ci soffermeremo solo su quelle forme che la normativa riconosce specificatamente per il raggiungimento di tale fine e che usualmente nel mercato delle Forme Individuali di risparmio previdenziale sono denominate PIP ossia Piani Individuali Pensionistici.

Mediante le modifiche apportate al D.Lgs. n. 124/1993 dal D.Lgs. n. 47/2000, che ne ha reso possibile il collocamento a partire dal 1° gennaio 2001, è possibile aderire a una

Forma Individuale Pensionistica attraverso un PIP assicurativo c.d. Nuovi. Questi prodotti consistono in contratti assicurativi sulla vita, collegati sia a prodotti di ramo I sia a prodotti di ramo III. I primi sono collegati a polizze rivalutabili con finalità previdenziali. La rivalutazione del capitale è collegata all'andamento di una gestione separata. I secondi invece sono collegati a contratti unit – linked: il contributo viene investito in un fondo e la sua rivalutazione è legata all'andamento di tale fondo. Da notare quindi come non rientrino in tali forme polizze index – linked (ramo III) o prodotti di capitalizzazione (ramo V).

L'adesione a tali forme previdenziali è consentita a chiunque il che è una sostanziale novità rispetto alle altre tipologie, infatti possono aderire anche, ad esempio, familiari a carico come casalinghe e studenti o titolari di redditi non da lavoro.

### **2.3 Le prestazioni dei fondi pensione**

Dato che lo scopo di un fondo pensione è quello di erogare prestazioni complementari a quella di base, l'iscritto al raggiungimento dei requisiti per ottenere la pensione pubblica e avendo maturato almeno cinque anni di partecipazione alle forme pensionistiche complementari, avrà accesso alla prestazione pensionistica. Questa, a seconda della volontà dell'aderente, potrà essere richiesta sotto forma di una rendita rivalutabile nel tempo e corrisposta periodicamente o un capitale per un importo non superiore al 50% del montante maturato sulla posizione pensionistica individuale e la trasformazione del rimanente in una rendita.

La prestazione prevista dal fondo pensione può riguardare perciò tutti gli eventi protetti dal nostro sistema obbligatorio, non soltanto la pensione che sia o di vecchiaia o anticipata. Questi di norma prevedono anche una prestazione per altre cause le cui più importanti sono l'invalidità o la morte.

Per quanto riguarda l'invalidità il fondo può garantire al lavoratore invalido od inabile un trattamento pensionistico, purché siano determinati particolari requisiti previsti dalla legge. Si definisce infatti inabile colui che, a causa di un'infermità o difetto fisico o mentale, si trovi nell'assoluta impossibilità di svolgere qualsiasi attività lavorativa. Si definisce invece invalido il lavoratore la cui capacità di lavoro sia ridotta a causa di un difetto fisico o mentale a meno di un terzo. L'inabilità ha carattere permanente mentre

l'invalidità ha carattere temporaneo; tuttavia il lavoratore che risulta invalido viene sottoposto a dei controlli ogni 3 anni per certificare la sua invalidità e se al terzo controllo risulta ancora invalido allora la sua posizione diventa quella di inabilità.

Per quanto invece riguarda l'evento morte il fondo può prevedere una pensione di reversibilità ai superstiti qualora il lavoratore al momento del decesso era già pensionato. Questa sarà un percentuale del valore che il pensionato percepiva quando era in vita e dipenderà dal nucleo familiare superstite. La pensione erogata ai superstiti prende il nome di pensione indiretta qualora il dante causa al momento del decesso era ancora lavoratore. In questo caso la quota della pensione non è conosciuta e si dovrà ricostruire il suo importo e in seguito convertirla in quella di superstiti.

La normativa prevede inoltre che il soggetto possa richiedere delle prestazioni non pensionistiche per determinate cause. Dopo otto anni di adesione si può richiedere un'anticipazione relativamente a:

- acquisto o ristrutturazione della prima casa fino a un massimo del 75% della posizione maturata
- ulteriori esigenze dell'iscritto fino al 30% della posizione

Inoltre può richiedere un'anticipazione della posizione in qualsiasi momento per spese sanitarie per terapie ed interventi straordinari, comprovati dalle competenti autorità pubbliche, per sé, il coniuge e i figli fino al 75%

Inoltre è possibile riscattare o trasferire la posizione maturata a causa di:

- trasferimento per variazione attività lavorativa (100% della posizione in qualsiasi momento)
- trasferimento per scelta individuale (100% della posizione con minimo 2 anni di adesione)
- riscatto in caso di cessazione dell'attività lavorativa (50% della posizione se disoccupato da più di 12 mesi)
- riscatto totale della posizione se disoccupato da più di 48 mesi
- riscatto totale in caso di adesione collettiva, per perdita dei requisiti di partecipazione



### **3 Solvibilità di un fondo pensione**

#### **3.1 La solvibilità di un fondo pensione in Italia: il Decreto Ministeriale n. 259/2012**

Il Decreto Ministeriale n. 259/2012 pone per la prima volta in Italia una base per la valutazione della solvibilità dei fondi pensioni. Come recita all'art. 2 la normativa è rivolta a tutti i fondi, preesistenti e di nuova istituzione, che assumono il rischio finanziario e demografico derivante dalla promessa pensionistica fatta ai propri iscritti. Questi perciò devono trovarsi in una delle seguenti condizioni:

- Copertura diretta dei rischi biometrici
- Garanzia diretta di un rendimento degli investimenti o di un determinato livello delle prestazioni
- Erogazione diretta delle rendite

Sono esclusi di conseguenza i fondi i cui relativi impegni finanziari sono assunti da intermediari già sottoposti a vigilanza prudenziale, abilitati alla gestione di tali garanzie.

Ruolo principale nel decreto lo occupano gli articoli riguardanti il calcolo delle riserve tecniche e quelle che vengono chiamate attività supplementari indisponibili.

La normativa prevede che le riserve siano adeguate agli impegni finanziari assunti nei confronti degli iscritti attivi, dei pensionati e dei beneficiari disponendo in qualsiasi momento di attività sufficienti a copertura.

Le riserve tecniche sono definite nel rispetto dei seguenti principi:

- a) L'importo minimo deve essere calcolato su base individuale tenendo conto degli iscritti alla data di valutazione, secondo un metodo attuariale prospettivo, sufficientemente prudente, tenuto conto di tutti gli impegni. Si nota quindi come non si possa tenere in considerazione i futuri ingressi e come ci sia la necessità di valutare gli impegni derivanti dai diritti maturati dagli aderenti.
- b) Le ipotesi demografiche, economiche e finanziarie sono scelte in base ai criteri di prudenza e vengono individuate prendendo in considerazione le seguenti linee guida:
  - I tassi d'interesse sono scelti in funzione del rendimento degli attivi corrispondenti detenuti dal fondo pensione, dai rendimenti attesi degli

investimenti in uno scenario prudenziale e tenendo conto della composizione del portafoglio. In ogni caso tali tassi non potranno superare il tasso d'interesse adottato per la proiezione del debito pubblico nel medio e lungo periodo. Questo tasso risulta pari al 5% su base nominale, 3% su base reale.

- Le tavole biometriche si basano su principi prudenziali, tenuto conto delle principali caratteristiche del gruppo degli aderenti al fondo pensione e dei mutamenti previsti nei rischi rilevanti. Ciò comporta come abbia ruolo determinate la tavola di mortalità che, descrivendo il fenomeno dell'eliminazione per morte di una generazione di nati fino all'estinzione del suo ultimo componente, determina sostanzialmente quanto sarà lungo il periodo di percezione della rendita. Dalla normativa si evince infatti la necessità di utilizzare una tavola proiettata per prevedere l'evoluzione della mortalità in futuro, dove è selezionata la collettività dei percettori di rendite.

Nel caso in cui le attività non siano sufficienti a coprire le riserve tecniche, il fondo pensione è tenuto ad elaborare immediatamente un piano di riequilibrio concreto e realizzabile. In relazione all'attuazione di detto piano può essere consentito ai fondi pensione di detenere, per un periodo limitato, attività insufficienti a copertura. Detto piano è soggetto ad approvazione da parte della COVIP e dovrà indicare i tempi necessari alla costituzione degli attivi mancanti e alla copertura delle riserve tecniche.

L'art. 5 si sofferma invece sulla costituzione di attività supplementari. I fondi pensione sono obbligati a detenere, su base permanente, attività supplementari rispetto alle riserve tecniche per compensare le eventuali differenze tra entrate e spese previste ed effettive nell'arco temporale previsto dalla normativa, che corrisponde ad un orizzonte temporale non inferiore a trent'anni. Su tale orizzonte devono essere effettuati degli stress test sul bilancio tecnico del fondo per vedere come le varie componenti di rischio possono intaccarlo. L'ammontare di tali attività deve corrispondere al 4% delle riserve del bilancio.

Nel caso in cui il fondo pensione non assuma direttamente il rischio di investimento la COVIP può determinare una percentuale diversa rispetto al 4% e potrà definire regole

tecniche per la determinazione ed il calcolo delle attività supplementari, tenendo conto della tipologia dei rischi, delle attività del fondo pensione.

Se il fondo non costituisce entro 10 anni dall'entrata in vigore del Decreto attraverso accantonamenti annui proporzionali tale ammontare, la COVIP può limitare o vietare la disponibilità dell'attivo del fondo pensione anche mediante interventi limitativi nell'erogazione delle rendite in corso di pagamento o di quelle future.

### **3.2 La solvibilità di un fondo pensione in un Paese estero**

Una volta analizzato il caso italiano risulta anche interessante compararlo con normative di altre nazioni europee, dove la previdenza complementare risulta più sviluppata, per avere un'idea di come sia necessario a livello europeo una normativa che unifichi le varie legislazioni nazionali.

In particolar modo ci soffermeremo su Paesi Bassi e Regno Unito.

Per quanto riguarda i Paesi Bassi la normativa di riferimento è il Financial Assessment Framework, divenuto legge nel gennaio del 2007. Questo prevede sia un "solvency test" sia un'analisi periodica. Il primo deve essere effettuato ogni anno mentre la seconda, a partire dal 2009, avviene ad intervalli regolari e non necessariamente annualmente.

Esistono tre metodi per effettuare il solvency test:

- l'approccio "semplificato" se gli attivi sono il 130% delle passività e nel mix di portafoglio degli attivi l'investimento in titoli a reddito variabile è inferiore al 25%
- Usare un modello interno nel caso in cui il fondo sia molto grande e sofisticato. Tuttavia le condizioni per utilizzarlo sono molto esigenti
- L'approccio "standardizzato" che è quello che si analizzerà nel seguito.

L'approccio standard prevede di calcolare le passività con un metodo unit credit, senza l'agevolazione relativa agli effetti dei futuri incrementi salariali sui benefici accumulati. La Banca Centrale decide i tassi di attualizzazione per il calcolo delle riserve, basati sull'aumento o diminuzione della curva dei tassi d'interesse. Per quanto concerne la tavola di mortalità viene usata quella GBMV 1005 – 2000. Si sottolinea inoltre che miglioramenti della mortalità devono essere incorporati attraverso l'uso della CBS 2050. Date queste indicazioni, viene calcolato il margine di solvibilità che è funzione del rischio di inflazione, rischio di tasso d'interesse, rischio immobiliare, azionario, di cambio, di

credito e di sottoscrizione. La formula risulta alquanto complicata ma è sostanzialmente una funzione della radice quadrata della somma dei quadrati di ciascun rischio ma con peso maggiore per il rischio di tasso d'interesse.

La banca centrale ha mostrato che con questo metodo in media gli attivi dovrebbero essere minori o uguali al 130% della somma tra le passività e questo margine di solvibilità, ottenuto dal metodo standard.

Se si scende sotto il livello ricavato dal solvency test, allora la perdita deve essere ripianata entro 15 anni. Se gli attivi diventano minori del 105% delle passività, escluso margine, allora il fondo ha tempo un anno per colmare questa diminuzione.

Per determinare i requisiti delle riserve si prende in considerazione la linea guida, presentata nel Financial Assessment Framework, dove viene spiegato che: partendo da una situazione d'equilibrio deve esserci almeno il 97,5% di possibilità che il fondo sia pienamente solvibile su un orizzonte temporale di un anno.

Si prenda ora in considerazione il caso del Regno Unito. La normativa di riferimento è il Pension Act 2004 che ha portato significativi cambiamenti sui requisiti di solvibilità di un fondo pensione, in quanto ha permesso il superamento di quello che era chiamato Minimum Funding Requirement ossia il requisito minimo di finanziamento. È tuttavia interessante osservare come ci sia stato un profondo cambiamento nel valutare la solvibilità di un fondo e per questo si cercherà di dare una visione di entrambi gli approcci.

Per quanto riguarda il Minimum Funding Requirement, introdotto dal Pension Act 1994, gli attivi devono essere valutati col valore corrente di mercato, mentre le riserve devono essere valutate con il Current Unit method. Il tasso di attualizzazione si distingue nel caso in cui si stia pagando la pensione o se ci si trovi nel periodo di accantonamento. Nel primo caso si utilizza il tasso dominante del mercato dei tassi sui titoli governativi del Regno Unito.

Nel secondo caso invece i tassi utilizzati sono principalmente i tassi di rendimento delle azioni su un orizzonte temporale di lungo periodo.

Nel caso di perdita il fondo doveva prevedere dei contributi aggiuntivi in modo tale che entro tre anni gli attivi raggiungessero il 90% del MFR, mentre aveva tempo dieci anni per raggiungere il 100%.

Con la nuova normativa tutte queste condizioni specifiche sono venute meno e si è deciso di introdurre maggiore flessibilità dal punto di vista delle valutazioni. Infatti è previsto che il fondo definisca un Statutory Funding Objective, al posto del MFR, ossia un obiettivo rivolto ad assicurare che il fondo abbia sufficienti attivi da coprire le sue riserve attuariali. Quindi si pone di avere attivi almeno pari alle riserve e non viene più imposto un metodo di funding per la loro valutazione, si specifica soltanto che il modello deve appartenere alla famiglia dei accrued benefits funding method ossia ad esempio il Project Unit method (nella pratica risulta essere il metodo più utilizzato) o il Current Unit method. Le assunzioni economiche e attuariali, quindi tavole di mortalità e tassi di attualizzazione, devono essere scelti in maniera prudentiale. Spetta al fondo decidere il margine di deviazioni negative a cui può essere soggetto. Inoltre viene specificato che le basi non necessariamente devono essere scelte così prudenzialmente da coincidere con quelle che si avrebbero se si volesse acquisire delle passività da un fondo o da un'altra compagnia. Si viene perciò a perdere in parte quel riferimento al mercato previsto dalla legge precedente.

Nel caso in cui si verificasse una perdita, il fondo deve presentare all'autorità di vigilanza un piano in cui mostra con che modalità vuole risanarla e le tempistiche che devono essere le più veloci possibile finanziariamente sostenibili.

Un aspetto importante del Regno Unito è che è previsto un massimale del rapporto tra attivi e passivi di un fondo. L'agenzia dell'Entrate inglese impone un limite molto stringente sull'ammontare degli attivi che possono essere gestiti senza la perdita di vantaggi fiscali da parte del fondo. In termini semplici, gli attivi non dovrebbero essere superiori al 105% delle riserve accumulate, calcolate attraverso il projectunit method.

Nel caso si superi questo limite massimo può accadere uno dei diversi scenari di seguito illustrati:

- Parte o tutto l'eccedente può essere utilizzato per ridurre o sospendere il contributo del lavoratore o datore di lavoro per i successivi cinque anni
- Se rimangono ancora disponibilità, il rimanente deve essere ritirato dal fondo e viene tassato in maniera penalizzante per il fondo

## **4 Il progetto IORPs**

### **4.1 Holistic Balance Sheet**

Come abbiamo visto, a seconda dei Paesi della Comunità Europasi ha un diverso approccio per valutare se un fondo pensione sia solvibile o meno. Tuttavia quello che risalta è che nessuna di queste normative prevede la costituzione di un capitale basato sull'analisi dei rischi a cui tali soggetti sono esposti. Si ricerca soltanto un equilibrio tra gli attivi e i passivi, fissando delle percentuali per il rapporto tra queste componenti o, come nel caso italiano, facendo riferimento a una normativa preesistente quale è Solvency I.

Nell'aprile 2011 la Commissione Europea ha chiesto all'EIOPA di predisporre una revisione della Direttiva riguardante i fondi pensione, chiamati IORPs, con l'obiettivo di introdurre un sistema prudenziale basato sul rischio che realizzasse un'armonizzazione dove la legislazione dell'Unione non necessitasse di ulteriori requisiti a livello nazionale.

L'obiettivo della Commissione è infatti quello di sviluppare le attività oltre confine dei fondi da un lato e dall'altro di permettere loro di beneficiare di un sistema di controllo basato sul rischio uniformato a livello europeo.

Questo spiega come mai la nuova direttiva riguardante gli IORPs si basi su tre pilastri collegati tra di loro:

- Primo Pilastro: dare dei requisiti per la valutazione delle attività e delle passività, in modo da definire un requisito di capitale di solvibilità, ossia il Solvency Capital Requirement (SCR)
- Secondo Pilastro: dare dei requisiti qualitativi circa la governance di un fondo e il processo di revisione da parte dell'Autorità di Vigilanza
- Terzo Pilastro: definire i requisiti di trasparenza riguardanti il rilascio di informazioni all'Autorità di Vigilanza, ai membri del fondo e ai beneficiari.

Il 15 Febbraio 2012 l'EIOPA ha pubblicato la sua risposta. L'elemento chiave, su cui si concentrerà l'analisi successiva, riguarda il primo pilastro con la definizione del cosiddetto Holistic Balance Sheet ossia Bilancio Olistico.

Poiché tale bilancio deve essere unico per tutte le Nazioni europee, deve tener conto esplicitamente di tutti gli aggiustamenti specifici e di tutte le misure di sicurezza che possono intervenire nel fondo. Di conseguenza nelle attività di questo bilancio devono

risultare non solo gli investimenti ma anche il contributo che lo sponsor può stanziare in favore del fondo, così come il valore delle misure che si possono mettere in atto per proteggere le pensioni. Analogamente, per quanto riguarda le passività, devono essere presi in considerazione non solo i vari obblighi del fondo, ossia prestazione di pensione non condizionata, prestazioni condizionate e a discrezione del fondo, ma anche le possibili riduzioni della prestazione.

Tutte le voci del Bilancio Olistico devono essere valutate attraverso un metodo definito market – consistent, ossia è necessario utilizzare prioritariamente, quando possibile, le informazioni che derivano dai mercati finanziari e dai prezzi di mercato degli strumenti finanziari ivi negoziati. Ovviamente non tutte le voci possono essere valutate mediante questa metodologia, di conseguenza è previsto che nel caso questo non possa accadere, come nelle riserve, si debba ricorrere a una best estimate, ovvero il valore atteso dei futuri flussi di cassa attualizzati con una curva di tassi di interesse priva di rischio, alla quale va aggiunto un'ulteriore valore chiamato risk margin. Questo verrà calcolato come il Cost-of-Capital ossia il costo di capitale che si avrebbe se si trasferissero in maniera ipotetica queste passività a un assicuratore.

Di base l'Holistic Balance Sheet senza l'SCR produce una visione trasparente delle voci del fondo in una situazione di 'normalità', se tutto andasse come previsto. Il requisito di capitale ha il compito di cogliere quali sarebbero le perdite del fondo in caso di scenari stressati. Esso valuta se lo IORP ha un capitale finanziario sufficiente per assorbire le variazioni demografiche e finanziarie dato un determinato livello di confidenza su un orizzonte temporale fissato.

Un esempio di Bilancio Olistico potrebbe essere, alla luce di quanto detto, il seguente:

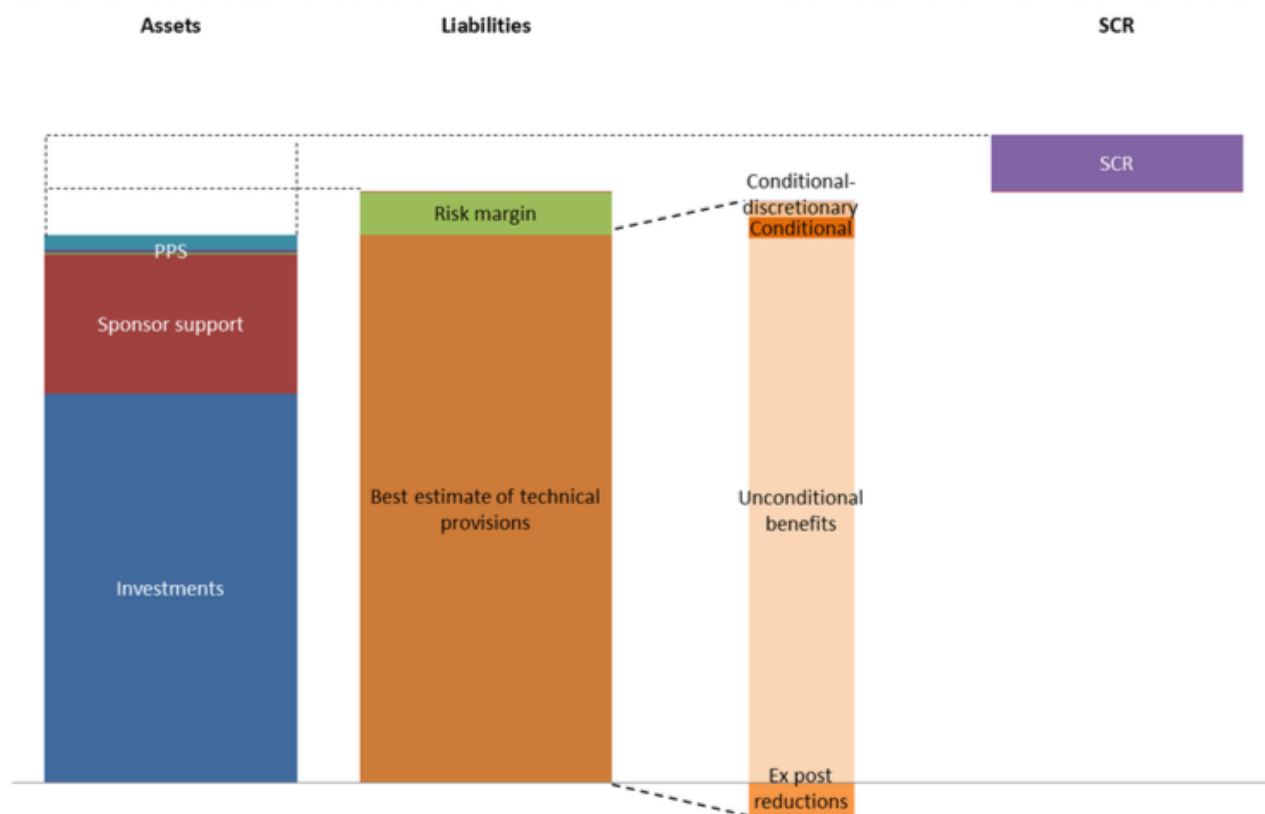


Figura 1 - Esempio di un possibile Holistic Balance Sheet

### QUANTITATIVE IMPACT STUDY

Una volta definita una prima bozza della revisione della Direttiva, l'EIOPA ha chiesto agli stati membri di effettuare degli studi di impatto quantitativo chiamati QIS (Quantitative Impact Study) in modo da raccogliere informazioni circa l'impatto finanziario che avrebbe il Bilancio Olistico sui fondi pensione dei vari Stati. Un primo studio di impatto quantitativo è stato condotto da metà ottobre a metà dicembre 2012 in otto Paesi dell'Unione che hanno aderito alla richiesta dell'EIOPA. Tali nazioni sono Belgio, Germania, Irlanda, Olanda, Norvegia, Portogallo, Svezia e Regno Unito. Si noti come questi siano gli Stati dove la forma di gestione dominante è la prestazione definita; infatti coprono il 95% del mercato di tale sistema.

Il QIS conteneva diciotto scenari atti a testare diverse vie per redigere il Bilancio Olistico e a calcolare il requisito di capitale. Nel seguito si analizzerà solo lo scenario di riferimento: benchmark.

Nel maggio 2014, alla luce dei risultati e delle considerazioni derivanti dal primo QIS, si è deciso di svolgerne un altro i cui risultati sono stati pubblicati nel dicembre 2015.



Particolarità di questo secondo QIS è stata l'allargarsi dei Paesi analizzati che da ottopassano a diciassette con l'aggiunta di Stati dove viene preferito come gestione dei fondi un metodo a contribuzione definita. Si aggiungono ai precedenti infatti: Austria, Cipro, Danimarca, Spagna, Finlandia, Italia, Lussemburgo, Slovenia, Slovacchia.

Nel seguito si analizzeranno nel dettaglio i risultati di tali QIS, specialmente per quanto concerne il calcolo del requisito di capitale.

## 4.2 QIS 1 – 2012

Il Solvency Capital Requirement viene calcolato attraverso una standard formula che prevede il calcolo del requisito attraverso dei moduli e sottomoduli, come indicato nella seguente figura:

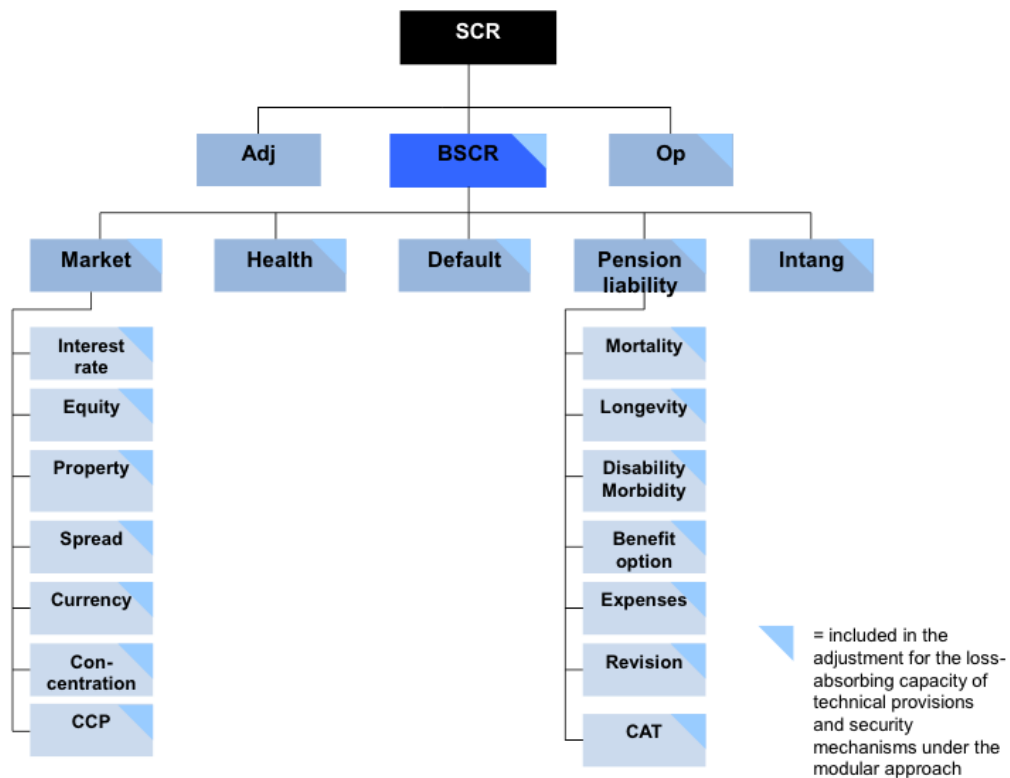


Figura 2 - Formula Standard per calcolo SCR

L'SCR è visto come una somma tra il BSCR, l'SCR necessario per coprire il rischio operativo e alcuni aggiustamenti legati alla capacità di assorbire le perdite da parte delle riserve, delle tasse differite e dello sponsor. L'aggiustamento 1 riguarda il market risk, il pensionliability risk e il default risk. Il secondo prende in considerazione i restanti rischi.

$$SCR = BSCR + SCR_{OP} + Adj1 + Adj2$$

Il Basic Solvency Capital Requirement è il requisito di capitale prima di ogni aggiustamento, risultante come combinazione dei requisiti di capitale delle 5 categorie di rischio più rilevanti che la Standard Formula individua in:

- Rischio di mercato: ossia il rischio legato alla volatilità dei prezzi del mercato degli strumenti finanziari. L'esposizione a tale rischio è misurata attraverso l'impatto di movimenti sul valore di determinate variabili finanziarie come i tassi di interesse, le azioni, prezzi degli immobili, tassi di cambio, concentrazione dell'investimento.
- Rischio di default della controparte: il rischio legato alle perdite derivanti da un inaspettato default della controparte o al deterioramento del livello di affidabilità creditizia di questa. Rientrano in questo rischio le perdite derivanti da fallimenti di assicurazioni o riassicurazioni, emittenti di strumenti derivati e sponsor.
- Rischio legato agli impegni pensionistici: ossia il rischio che nasce quando si sottoscrive un impegno pensionistico, associato sia a longevità che mortalità sia a tutti i processi che entrano in gioco nell'attività del fondo. Per questo i sottomoduli riguardano anche il rischio di inabilità, spese, revisione, catastrofe ed opzioni riguardanti l'erogazione della pensione.
- Rischio di malattia: ossia il rischio legato a variazione delle prestazioni che il fondo deve erogare nel momento in cui ci si verifici un elemento legato a una malattia. Riguarda pertanto i rischi che sorgono se la partecipazione al fondo richiede anche la sottoscrizione di una polizza per le coperture sanitarie.
- Rischi sugli intangible asset

Questo BSRC viene calcolato come segue:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

Dove  $Corr_{i,j}$  sono i coefficienti di correlazione tra i rischi;  $SCR_i$ ,  $SCR_j$  sono i requisiti di capitale per i rischi dei singoli SCR relativi alle righe e alle colonne della matrice di correlazione, mentre  $SCR_{intangibles}$  è requisito di capitale per intangiblesassets.

I coefficienti di correlazione vengono stabiliti dall'EIOPA, nelle specifiche tecniche e sono riassunti nella seguente tabella.

i \ j	Market	Default	Pension liability	Health
Market	1			
Default	0.25	1		
Pension liability	0.25	0.25	1	
Health	0.25	0.25	0.25	1

Figura 3 - Matrice dei Coefficienti di Correlazione per i Macro Rischi

Come si può osservare tutti i rischi sono collegati fra di loro, tuttavia le correlazioni scelte sono basse. Questo permette che ci sia una aggregazione dei rischi e quindi la possibilità che questi si diversifichino fra loro, dove però possiamo osservare che l'aggregazione avviene attraverso una semplificazione, in quanto questa è assunta lineare. Il definire da parte dell'autorità il valore dei coefficienti ha come scopo quello di riflettere le potenziali dipendenze sulle code delle distribuzioni dei vari rischi. La correlazione lineare presenta dei limiti in quanto non ha una corretta efficacia sulle code, in quanto si sta implicitamente assumendo che i requisiti di capitale possano essere trattati come degli scarti quadratici medi. E' stato scelto questo metodo poiché la standard formula è per definizione uguale per tutti i fondi pensione e di conseguenza deve avere un profilo molto ampio. Un secondo limite risiede nel fatto che tale formula vale per scarti quadratici medi ma non per il Value at Risk. In linea con Solvency II i singoli SCR vengono calcolati attraverso un approccio Value at Risk soggetto a un livello di confidenza del 99,5% su un orizzonte temporale annuo.

Se le distribuzioni dei rischi sono fortemente asimmetriche i coefficienti utilizzati nell'aggregazione non possono essere più interpretati come dei classici coefficienti di correlazione.

In questo QIS l'EIOPA ha deciso di vedere l'impatto anche di altri livelli di confidenza come il 97,5% e il 95%. I differenti moduli della standard formula non saranno ricalibrati per questi altri livelli di confidenza. Per l'individuazione dell'SCR sotto tali valori verrà aggiustato il requisito al 99,5% attraverso un metodo comune e semplificato che è stato

sviluppato dall'EIOPA. L'SCR al 97,5% sarà stimato come il 76%, mentre SCR al 95% sarà il 64% del SCR 99,5%.

Come si può osservare, il rischio di mercato e il rischio di pensionliability sono suddivisi in ulteriori sottomoduli. In questo modo l'EIOPA si assicura che almeno questi rischi, da lei ritenuti essenziali, vengano presi in considerazione per il calcolo del requisito di capitale.

Il valore del SCR legato ai singoli rischi nella quasi totalità dei casi è calcolato attraverso un approccio che è definito scenario-base: il requisito di capitale è determinato come l'impatto di uno scenario su il Net Asset Value (NAV) dell'IORP. Il NAV è definito come la differenza tra le attività e le passività del fondo, dove le passività non includono il risk margin relativo alle riserve. La differenza del NAV risultante dall'avvenimento dello scenario è definito come  $\Delta NAV$  ed è un valore positivo quando il risultato dello scenario porta ad una perdita del NAV.

La logica della formula di aggregazione è la stessa di quella prevista per i macro-moduli, dove i coefficienti di correlazione sono differenti e sono riassunti nelle due tabelle seguenti:

CorrMkt	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concentration	Counter – cyclical premium
Interest	1						
Equity	A	1					
Property	A	0,75	1				
Spread	A	0,75	0,5	1			
Currency	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Counter – Cyclical premium	0	0	0	0	0	0	1

Tabella 1 - Coefficienti di Correlazione per il Market risk

CorrPension	Mortality	Longevity	Disability	Benefit Opt	Expenses	Revision	CAT
Mortality	1						
Longevity	-0,25	1					
Disability	0,25	0	1				
Benefit Opt	0	0,25	0	1			
Expenses	0,25	0,25	0,5	0,5	1		
Revision	0	0,25	0	0	0,5	1	
CAT	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	1

Tabella 2 - Coefficienti di Correlazione per il Pension Liability risk

Si noti come nella prima tabella, riguardando i sottomoduli del rischio di mercato, l'EIOPA lascia discrezionalità al fondo pensione. Non definisce in alcuni casi i coefficienti di correlazione tra i rischi lasciando la lettera A. Questa dovrebbe assumere valore pari a 0 quando il requisito di capitale per il rischio di tasso di interesse viene determinato prendendo in considerazione lo scenario in cui è previsto un aumento della curva dei tassi di interesse. Altrimenti, caso contrario, dovrebbe assumere valore pari a 0,5.

Nella seconda tabella la particolarità che si osserva è la correlazione negativa tra il rischio di mortalità e di longevità. Tuttavia si può evincere come il valore del coefficiente sia -0,25, e non -1, valore che indica massima correlazione negativa. Vasottolineato come i coefficienti siano stati tarati sulla base dell'esperienza del QIS 5 di Solvency II. In quel caso la scelta di -0,25 era giustificata dal fatto che si tratta di due rischi diversi che vanno ad agire su portafogli assicurativi differenti. Ciò spiega perché il coefficiente di correlazione non sia più vicino ad una perfetta correlazione negativa. Per esempio, un aumento della volatilità nella distribuzione dei tassi di mortalità ha un potenziale effetto negativo sia sul rischio di mortalità che su quello di longevità. Per essere più concreti si pensi, ad esempio, agli effetti negativi su entrambi i rischi derivanti da avanzamenti nella cura di talune malattie degenerative (aumenta la longevità delle popolazioni anziane alla quale sono erogate rendite) e, nello stesso tempo, da un incremento degli incidenti stradali mortali a causa della scarsa manutenzione delle strade (aumenta la mortalità della popolazione che

più usa la macchina, tipicamente adulti in età lavorativa, la stessa popolazione che è più frequentemente assicurata in caso morte).

Tuttavia nel caso di un fondo pensione, le polizze sottoscritte sono tutte uguali, ossia l'erogazione di una rendita ad una data stabilita. Di conseguenza, avendo classi di assicurati omogenei, si potrebbe pensare di utilizzare un coefficiente più vicino all'unità e quindi prendere in considerazione una maggiore correlazione negativa.

Per quanto riguarda gli aggiustamenti non si entra nel dettaglio della metodologia di calcolo. Questi nascono per tener conto della possibilità che perdite inaspettate possano far diminuire determinati impegni come ad esempio una diminuzione delle riserve, per quanto riguarda la componente di Risk Margin. Di conseguenza si avrà un minor SCR. Per le imposte differite la motivazione è analoga. In sede di redazione del bilancio le imposte vengono calcolate sugli utili dell'attività economica; nel momento in cui si contabilizza una perdita il valore delle imposte diminuisce e di conseguenza si deve modificare l'SCR calcolato inizialmente per tenere conto di tale diminuzione.

I risultati ottenuti dallo studio di impatto quantitativo sono nel seguito descritti.

Come accennato in precedenza questo QIS si sviluppa su 18 scenari che hanno avuto il compito di osservare come diverse metodologie di calcolo per gli attivi e passivi possono modificare il calcolo del requisito di capitale. La tabella seguente mostra le varie modifiche apportate ad ogni singolo scenario. Il colore rosso viene usato quando non sono pervenuti i risultati della nazione. Di conseguenza nel seguito si analizzeranno solo i risultati dello scenario 3, ossia quello base definito come Benchmark, sulla base del quale sono stati calibrati gli altri. In particolar modo per avere una visione più completa si analizza il caso 3A dove si hanno a disposizione anche dati riguardanti il mercato del Regno Unito.

Table 8.1: Overview of sets presented		BE	DE	IE	NL	NO	SE	UK
Set 1	Upper bound							
Set 2A	Lower bound							
Set 2B	Lower bound							
Set 3A	Benchmark							
Set 3B	Benchmark							
Set 4	Convergence speed 40 years							
Set 5	Include CCP							
Set 6	Matching adjustment							
Set 7	Matching adj. and CCP							
Set 8	Risk margin adverse deviation							
Set 9	Exclude risk margin							
Set 10	Include pure discretionary							
Set 11	Exclude mixed benefits							
Set 12	PPS reducing default risk							
Set 13	Exclude PPS							
Set 14	Exclude ex post reductions							
Set 15	Exclude sponsor support / PPS							
Set 16	Equity dampener - symmetric							
Set 17	Equity dampener - none							
Set 18	Exclude inflation module							

Figura 4 - Scenari previsti dal QIS

Lo scenario benchmark è quello dove è stato richiesto di includere tutti i meccanismi di sicurezza che il fondo può utilizzare, tra cui il supporto dello sponsor e tutti i meccanismi di aggiustamento previsti nel Bilancio Olistico. Sia attivi che passivi devono essere valutati con una stima che si rifà al mercato (market – consistent) scontando i flussi di cassa con il tasso risk – free mediante una curva definita dall’EIOPA. In sostanza è la situazione base descritta nelle Technical Specification e quindi è un’applicazione della Formula Standard così come definita.

I risultati in termini numerici di questo Studio di Impatto Quantitativo sono riassunti nella seguente tabella, dove i valori, espressi in miliardi, mostrano i risultati aggregati per Paese ponderati per la grandezza dei fondi analizzati:

Benchmark set 3A, EUR billion	BE	DE-PF	DE-PK	IE	NL <sup>a</sup>	NO	SE	UK
<b>Investments</b>	14,4	25,3	122,6	41,6	782,1	13,9	12,0	1128,2
<b>Sponsor support</b>	0,0	6,6	25,8	0,0	74,3	0,0	0,2	657,5
<b>Pension protection scheme</b>	0,0	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	13,1
<b>(Re-)insurance recoverables</b>	0,0	0,4	3,1	0,0	13,1	0,0	0,0	0,0
<b>Other assets</b>	0,7	0,4	3,9	0,0	8,4	0,2	0,4	63,8
<b>Total assets</b>	15,1	33,2	155,4	41,6	878,0	14,1	12,6	1862,5
<b>Best estimate technical provisions</b>	15,9	30,8	147,4	92,4	898,1	12,4	9,1	1995,2
<b>Risk margin</b>	1,3	2,3	11,1	7,4	70,7	0,8	0,7	159,6
<b>Other liabilities</b>	0,1	0,0	3,8	0,0	2,8	0,1	0,0	0,0
<b>Total liabilities</b>	17,3	33,1	162,3	99,8	971,6	13,3	9,9	2154,8
<b>Excess of assets over liabilities</b>	-2,1	0,1	-6,8	-58,2	-93,6	0,8	2,8	-292,3
<b>Gross SCR - 99.5%</b>	4,0	8,1	51,0	34,6	167,0	2,5	2,2	481,1
<b>Adjustment loss-absorbency</b>	-2,7	-8,1	-46,3	0,0	-60,0	-1,3	-0,8	-246,8
<b>SCR</b>	1,4	0,0	4,7	34,6	107,0	1,2	1,4	234,3
<b>Surplus</b>	-3,5	0,1	-11,6	-92,8	-200,6	-0,4	1,3	-526,5
<b>MCR - 99.5%</b>	0,5	0,0	1,7	12,1	37,4	0,4	0,5	82,0
<b>Gross SCR - 97.5%</b>	3,1	6,2	38,8	26,3	126,9	1,9	1,7	365,6
<b>Adjustment loss-absorbency</b>	-2,3	-6,2	-36,4	0,0	-56,2	-1,3	-0,6	-195,5
<b>Net SCR</b>	0,8	0,0	2,4	26,3	70,7	0,6	1,1	170,1
<b>Surplus</b>	-2,9	0,1	-9,2	-84,5	-164,4	0,2	1,7	-462,4

Figura 5 - Risultati del QIS per i singoli Paesi

Come si può osservare solo la Svezia ha degli attivi necessari per far fronte alle passività e ai requisiti finanziari richiesti con un livello di confidenza del 99,5%. La Norvegia invece è l'unico paese, oltre ovviamente alla Svezia, dove il requisito di capitale è soddisfatto con un livello di confidenza del 97,5%. Sorprende come in questo caso non rientrino i Paesi Bassi, dove la normativa richiede specificatamente una visione one – year con un livello del 97,5%. Questo è giustificato dal fatto che la legge olandese non richiede una valutazione degli attivi e passivi uguale a quella della Formula Standard e che non prende in considerazione tutti i rischi previsti per il calcolo dell'SCR. Inoltre deve essere sottolineato come questo requisito al 97,5% sia derivato come una percentuale del requisito al 99,5% e questo spiega perciò la differenza tra questo risultato e la normativa corrente in Olanda.

Da notare come il requisito non sia mai soddisfatto per Belgio e Regno Unito. È vero che tutti i fondi dell'Inghilterra e la maggior parte di quelli belgi possono contare su un



supporto illimitato dello sponsor, come previsto dalle loro leggi nazionali. Tuttavia il Bilancio Olistico prevede solo di prendere in considerazione un aiuto limitato e nella maggior parte dei casi questo risulta insufficiente per compensare il gap tra passività e attività. Ciò è voluto dall'EIOPA in quanto esiste una probabilità che lo sponsor in futuro non possa più aiutare il fondo pensione come promesso a causa della sua possibilità di fallimento.

Per quanto riguarda gli attivi possiamo osservare come la parte dominante sia composta dagli investimenti. Questi come si è detto devono essere valutati con riferimento al valore di mercato ed essendo questo un metodo già utilizzato all'interno dei Paesi presi in considerazione, non si notano variazioni significative. È interessante osservare la composizione di questi investimenti nelle singole Nazioni. Si può vedere come l'Irlanda abbia una forte componente azionaria, circa il 60%, che porterà ad un importante requisito di capitale, mentre per paesi come la Svezia si ha una forte componente di obbligazioni e questo comporterà un minor requisito. Gli altri paesi mostrano invece un portafoglio più bilanciato dove la parte azionaria ha un valore compreso tra il 40% e il 60% e la restante è composta da titoli obbligazionari di diversa natura.

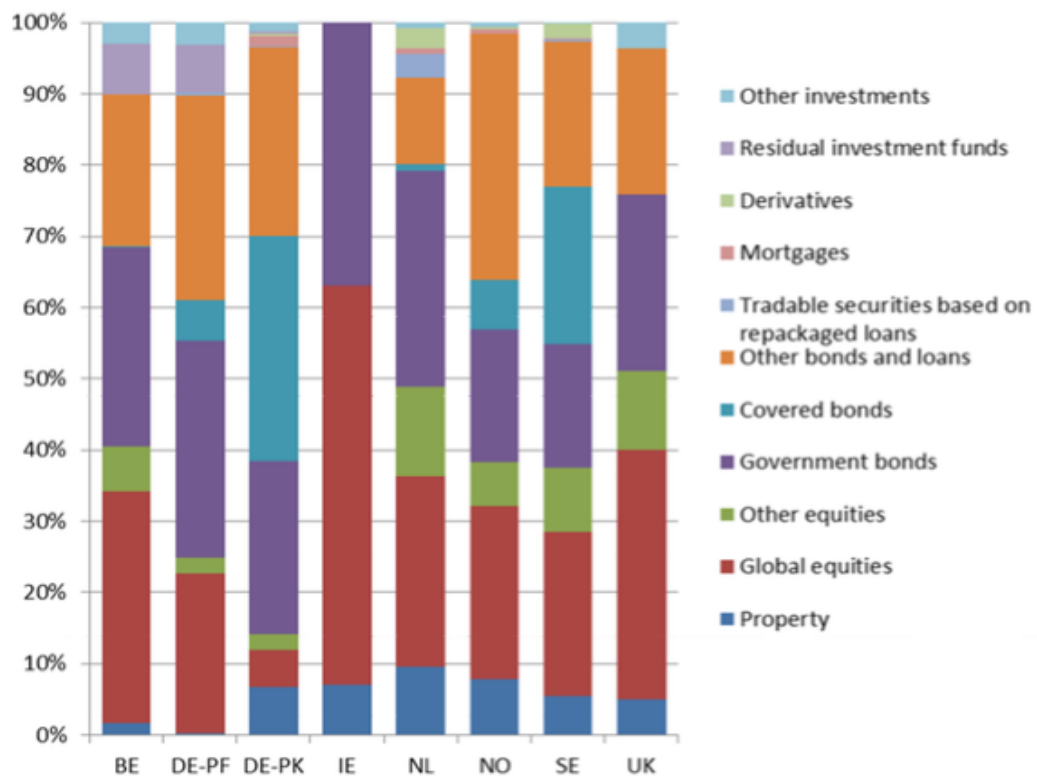


Figura 6 - Composizione degli attivi per Paese

Per quanto riguarda le passività abbiamo l'introduzione di una nuova metodologia di calcolo per le riserve e questo porta a delle significative differenze tra il loro valore corrente e quello previsto dalla Formula Standard. In particolare modo si osserva come ci sia un sostanziale aumento, ad eccezione del caso svedese. La tabella sottostante mostra una linea in prossimità del 100% e questa corrisponde al valore delle riserve correnti, mentre i valori sulle ordinate mostrano il rapporto tra nuove e vecchie riserve. Si hanno due istogrammi per ogni Paese. Quello blu riguarda la Best Estimate nel caso in cui si utilizza il tasso risk – free per attualizzare i flussi di cassa; mentre quella rossa prende in considerazione, come tasso di attualizzazione, il valore di ritorno atteso degli attivi, che assume valori mediamente intorno al 4% e 5% per tutti i paesi considerati, ad eccezione della Svezia dove la media è pari al 3%. Ciò è diretta conseguenza del portafoglio di investimenti che si è osservato precedentemente.

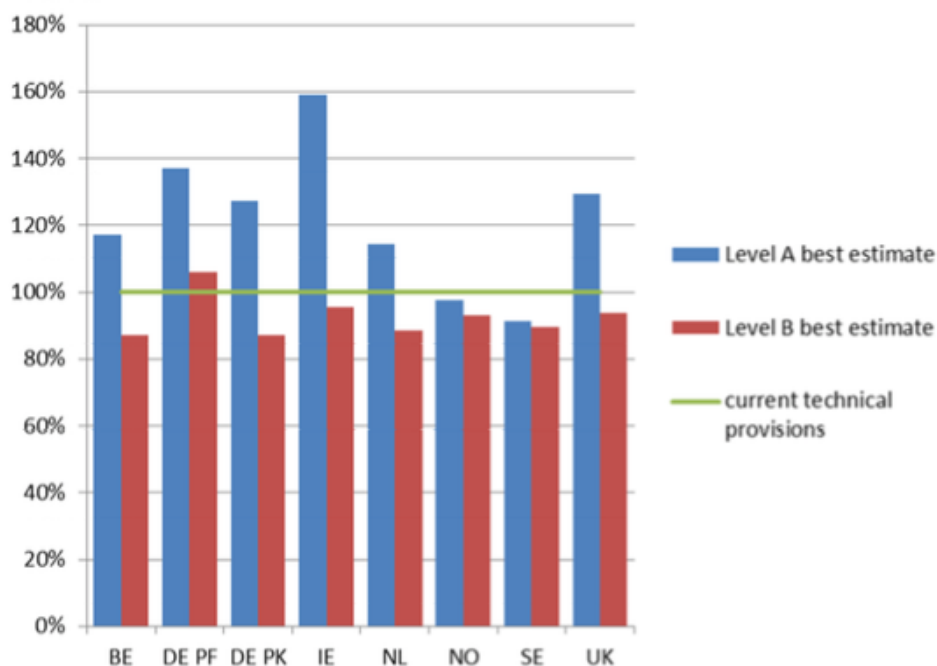


Figura 7 - Rapporto tra diversi calcoli di BE

Per quanto concerne gli istogrammi blu si osserva un sostanziale aumento delle riserve; ciò è dovuto all'utilizzo di tasso risk – free. In Irlanda e UK la normativa odierna stabilisce di utilizzare il tasso che si prevede ottenere dal mercato, basato sui ritorni attesi dell'investimento. Questo spiega quindi come il valore delle barre rosse di questi due paesi di avvicinino al 100%.

L'impatto risulta ridotto per l'Olanda, in quanto la curva tutt'ora utilizzata è molto simile, seppur non identica, a quella prevista dal QIS. Anche qui si osserva perciò come l'istogramma rosso di avvicinarsi alla linea del 100% e come la differenza con la barra blu sia molto ridotta rispetto agli altri Paesi.

In Svezia si ha un valore che addirittura è minore del 100% e ciò delinea di conseguenza una riduzione delle riserve. Questo è dovuto al fatto che la curva prevista dalla normativa svedese, che si basa su una media dei tassi sui titoli di stato svedesi e una curva basata su obbligazioni, classificati come AAA, risulta essere minore di quella prevista dall'EIOPA.

Quanto detto vale per la Best Estimate. L'effetto del Risk Margin tuttavia non deve essere trascurato, in quanto porta a un'ulteriore incremento delle riserve tecniche e quindi delle barre appena descritte. L'ammontare di questo Risk Margin assume dei valori intorno allo 7,5% delle Best Estimate. In alcuni casi, quali Regno Unito, Belgio e Irlanda, questo non è stato calcolato utilizzando il metodo del Cost of Capital previsto da Solvency II, come richiesto dalle Technical Specification, ma attraverso una semplificazione autorizzata sotto determinate condizioni dalla Formula Standard ed è pari all'8% della Best Estimate.

A seguito delle considerazioni su attivi e passivi risulta necessario analizzare quali sono le componenti che maggiormente hanno influito sul calcolo del requisito di capitale. Prendendo in considerazione il livello di confidenza del 99,5%, il Solvency Capital Requirement oscilla tra lo 0% e il 35% delle riserve, intese come la somma tra BE e RM. Come si evince dalla tabella sottostante questo è parzialmente ridotto sia per un beneficio legato alla diversificazione, sia per gli aggiustamenti che modificano il BSCR, soprattutto legati ai benefici derivanti dal supporto dello sponsor.

Il rischio in media più importante è quello di mercato per tutte le Nazioni ad eccezione del Regno Unito, dove il maggiore è quello legato agli impegni pensionistici. Da sottolineare come il rischio di default della controparte sia importante. Si avrebbe infatti una consistente perdita nel caso in cui lo sponsor fallisse e non potesse più garantire il suo supporto. Si mostra così l'importanza del suo rischio di credito.

Si noti come il rischio operativo sia poco incisivo nel calcolo dell'SCR, infatti pesa soltanto lo 0,5% delle riserve. Il requisito di capitale per i rischi riguardanti gli intangibili è praticamente nullo.

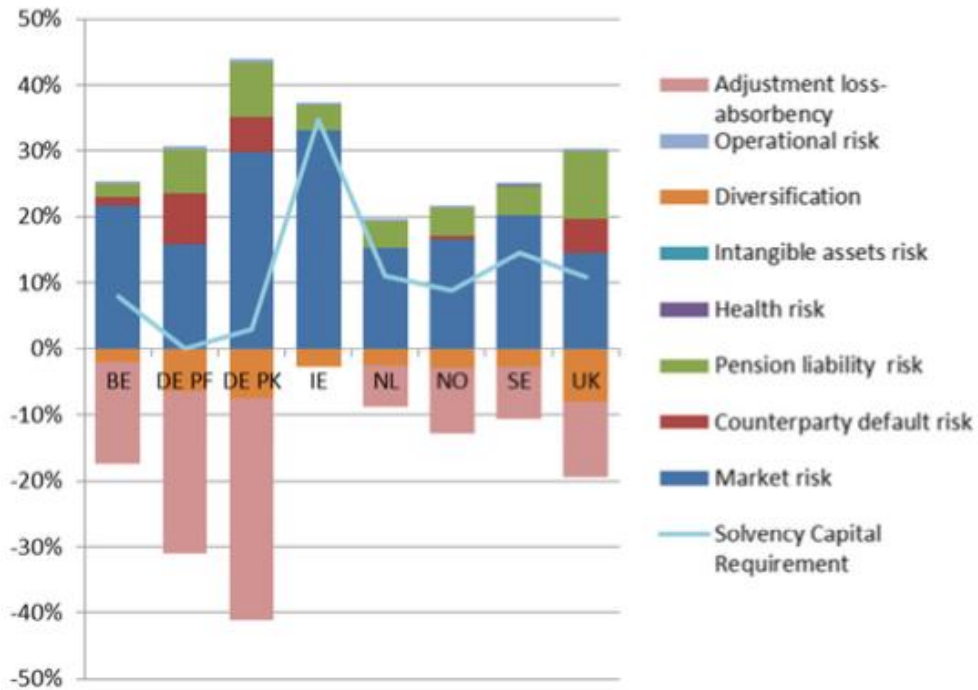


Figura 8 - Impatto dei singoli rischi nel calcolo del SCR

In conclusione si può osservare quali sono le componenti principali dei due rischi più importanti. Il rischio dominante nel market risk è quello di interesse per Germania, Irlanda e Regno Unito, mentre è quello azionario per gli altri mercati. Ciò è dovuto al fatto che in questi Paesi non è “assicurato” in una misura tra lo 0% e il 10%.

Per quanto riguarda invece il rischio legato agli impegni pensionistici, il maggior contributo al requisito di capitale è dato da quello di longevità che risulta infatti essere predominante come si osserva nel seguente grafico:

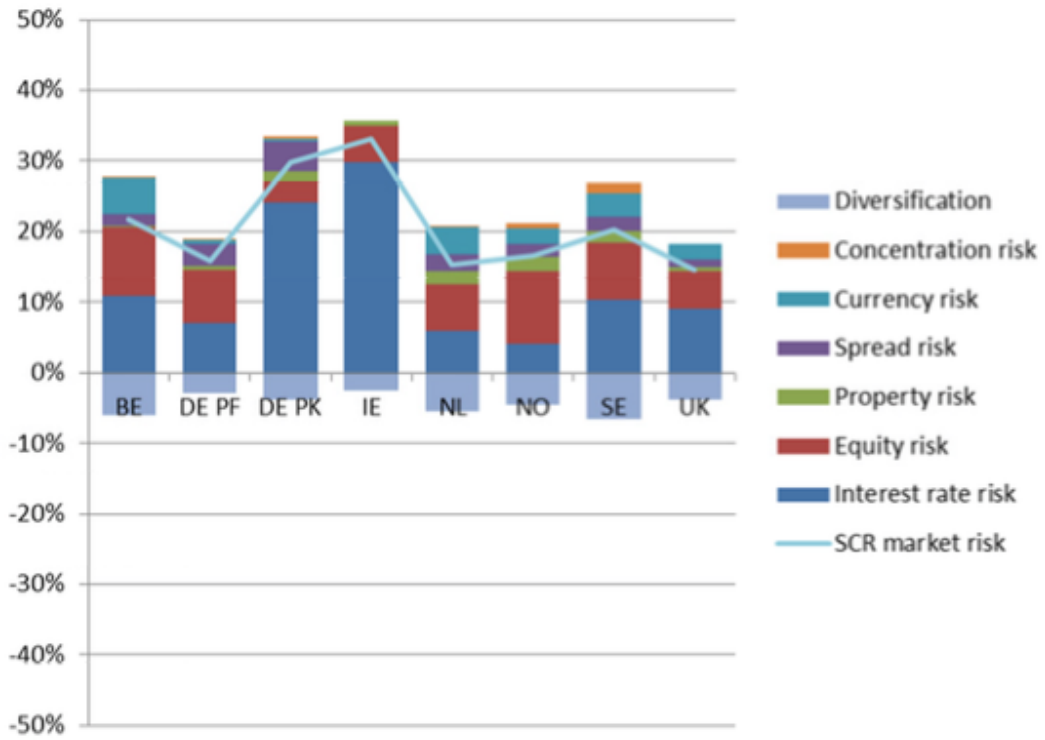


Figura 9 - Impatto dei singoli rischi per il Market risk



Figura 10 - Impatto dei singoli rischi per il Longevity risk

### 4.3 QIS 2 – 2015

Come si è visto dai risultati del QIS precedente, non tutti i rischi che erano stati presi in considerazione da parte dell'EIOPA sono risultati importanti al fine del calcolo del requisito di capitale. Di conseguenza l'Autorità di Vigilanza ha deciso di rivedere la struttura modulare della Standard Formula, eliminando tutti i sottomoduli del pensionliability, ad eccezione del rischio di longevità e di non considerare il rischio health e gli intangible. La nuova matrice modulare diventa quella evidenziata nella tabella sottostante.

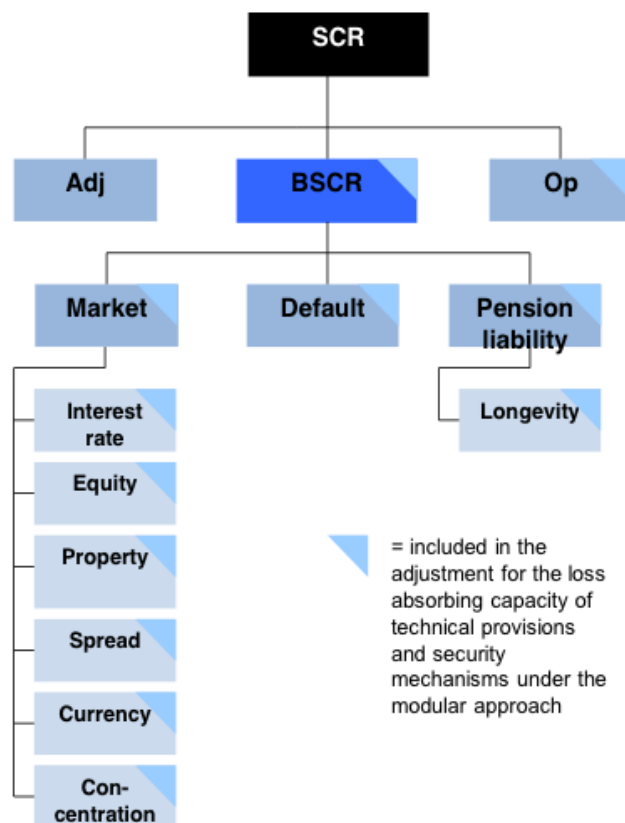


Figura 11 - Formula Standard per il calcolo del SCR

# I MODELLI DI GESTIONE

---

## **1 Introduzione**

Esistono due modelli con cui poter gestire un fondo pensione. Il primo è chiamato a prestazione definita il secondo a contribuzione definita.

Nei fondi a prestazione definita le prestazioni vengono specificate in anticipo così come l'aliquota di contribuzione che viene fissata inizialmente e successivamente, a seconda dei vari casi, aggiustata in modo da mantenere il fondo sufficientemente finanziato.

D'altro canto, nei fondi a contribuzione definita il contributo è fissato e la prestazione pensionistica dipende dai rendimenti generati dal portafoglio di investimenti del fondo.

Storicamente i gestori dei fondi hanno preferito offrire sul mercato i fondi del primo regime mentre ora sono i secondi quelli che si stanno imponendo nella previdenza complementare soprattutto nel mercato italiano dove praticamente tutti i fondi di nuova generazione seguono un regime a contribuzione definita, mentre quelli a prestazione caratterizzano quelli preesistenti che nella maggioranza dei casi sono chiusi a nuovi iscritti.

Per questo motivo nel seguito si illustreranno due metodi di gestione, uno per tipo di regime, e si cercherà di dare evidenza dei vari rischi sottostanti tali modelli, su chi ricadono tali rischi e come questi comportino metodologie diverse per definirne la solvibilità e di conseguenza un eventuale requisito di capitale.

## 2 Un fondo a prestazioni definita

Un fondo a prestazione definita prevede la definizione della prestazione e in seguito il calcolo dei premi che servono per finanziarla.

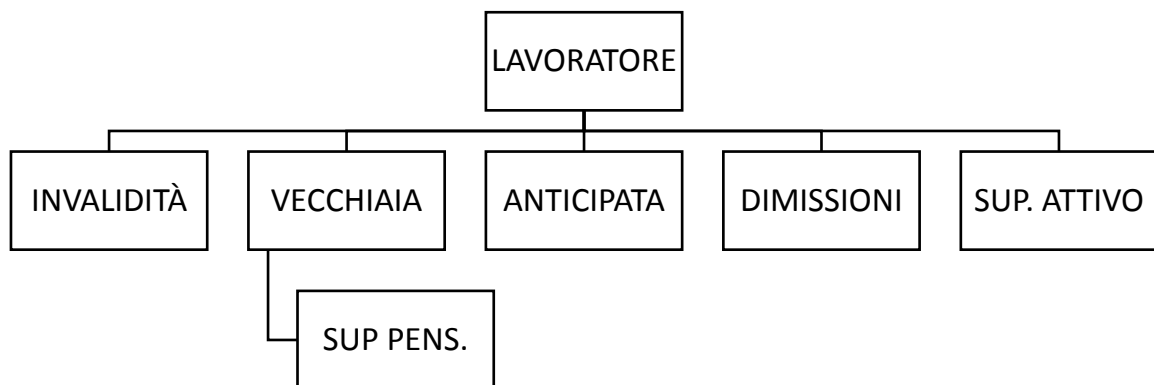
Si segue un'ottica di capitalizzazione, ossia ogni contributo versato dal lavoratore serve per andare a formare quel montante che il fondo andrà a smontare una volta che eroga la pensione.

Nella gestione di tali fondi si possono individuare due fasi: una fase cosiddetta di accumulo, dove il lavoratore paga i contributi richiesti dai gestori, e una fase di erogazione ossia il periodo che va dalla maturazione dei requisiti per la prestazione pensionistica all'età estrema considerata dal fondo fino a cui questo dovrà pagare quanto promesso.

Si considera soltanto una generazione omogenea in cui tutti gli assicurati entrano in una età  $\alpha$  nel fondo e una serie di prestazioni a cui possono avere diritto.

Quelle prese in considerazione sono Invalidità, Vecchiaia, Prestazione Anticipata, Dimissioni, Superstite da Attivo e Superstite da Pensionato.

Il fondo segue perciò un modello che può essere riassunto dalla figura sottostante:



Di conseguenza bisognerà valutare il contributo che permetta al fondo di far fronte ai valori attuali attesi degli impegni previsti in ogni singolo stato.

Come si evince il fondo prevede una prestazione non solo quando l'assicurato raggiunge in vita l'età per ottenere una pensione di Vecchiaia o Anticipata ma anche se, durante la fase di accumulo, diventa invalido o decida di recedere dal fondo, e infine se trasferisce la



sua posizione. Inoltre è prevista un'ulteriore prestazione nella fase di erogazione, ossia quella prevista alla famiglia superstite del pensionato.

Di conseguenza risulta molto importante dare una corretta definizione delle basi demografiche in quanto vanno definite delle probabilità di sopravvivenza in ogni singolo stato così come devono essere definite delle probabilità di passaggio da uno stato a un altro.

A seguito del modello illustrato si prenderanno in considerazione le leggi di sopravvivenza ad una o più cause di eliminazione, dette anche a decrementi multipli.

Nel dettaglio possiamo perciò determinare la legge di sopravvivenza degli attivi come:

$$l_{x+1}^a = l_x^a - d_x - d_x^i - d_x^z - d_x^v - d_x^w - d_x^s \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

Ciò significa che le persone che fanno parte del gruppo degli attivi a un'età generica  $x + 1$  sono coloro che erano in vita all'età precedente  $x$  e che non sono morti ( $d_x$ ) o non sono stati eliminati per invalidità ( $d_x^i$ ), per pensione anticipata ( $d_x^z$ ), per pensionamento di vecchiaia ( $d_x^v$ ), per dimissioni ( $d_x^w$ ) e per decesso o nuovo matrimonio ( $d_x^s$ ).

Definiti questi elementi, analogamente si possono andare a definire le altre leggi di sopravvivenza riassunte nel seguente schema:

Invalità	$l_{x+1}^i = l_x^i - d_x$	$\alpha + n \leq x \leq \omega^i$
Vecchiaia	$l_{x+1}^v = l_x^v - d_x - d_x^s$	$\beta \leq x \leq \omega^v$
Anticipata	$l_{x+1}^z = l_x^z - d_x - d_x^s$	$\beta' \leq x \leq \omega^z$
Dimissioni	$l_{x+1}^w = l_x^w - d_x - d_x^v$	$\alpha + \varphi \leq x \leq \beta$
Superstite	$l_{x+1}^s = l_x^s - d_x - d_x^n$	$\alpha + \xi - \tau \leq x \leq \omega^s$

Dove  $\beta'$  è l'età di uscita per prestazioni anticipate,  $\gamma$  l'età di uscita per dimissioni,  $\alpha + n$  l'età di uscita per invalidità,  $\xi$  l'età di uscita per prestazione ai superstiti,  $\tau$  è l'età di differenza al matrimonio e infine  $\omega$  rappresenta l'età estrema raggiungibile in vita per una qualsiasi collettività di membri.

Al fine di dare una spiegazione il più chiara possibile del metodo di lavoro utilizzato si ipotizza di prendere in considerazione solo la prestazione di vecchiaia.

In questo caso, la prima rata di pensione viene definita seguendo una logica retributiva nel seguente modo:

$$b_{\beta} = \left[ \frac{\beta - \alpha}{k} \right] s_{\beta-1}$$

La prestazione viene perciò vista come una percentuale dell'ultimo salario disponibile prima dell'inizio della fase di erogazione.

La frazione può essere interpretata come una sorta di tasso di sostituzione che viene promesso al pensionato. Risulta pari al rapporto tra la prima pensione e l'ultimo salario.

Il numeratore nello specifico rappresenta gli anni di contribuzione dell'aderente mentre  $\frac{1}{k}$  può essere interpretato come un tasso di rendimento che viene riconosciuto per ogni anno di contribuzione.  $k$  può essere quindi inteso come una promessa pensionistica.

Il valore del rapporto dipende molto dal Paese in cui si opera. Se il tasso di sostituzione offerto dal primo pilastro è molto elevato, caso Italia, avremo un  $k$  più ridotto rispetto a quello previsto in un mercato, come quello Anglosassone, dove il primo pilastro offre una prestazione minore.

Si osserva come  $b_{\beta}$  possa essere paragonata alla rata di una rendita differita, tuttavia la rata di una rendita differita è predeterminata e stipulata nel contratto. Qui quello che è predeterminato è il meccanismo di calcolo in quanto  $s_{\beta-1}$  non lo si conosce a priori e perciò su questo si avrà bisogno di una base tecnica a priori per calcolarlo. Si tratterà in seguito come determinare questo valore.

Per quanto riguarda le rate successive alla prima queste verranno rivalutate attraverso una metodologia collegata alle regole del fondo e che implicitamente prende in considerazione anche il tasso d'interesse. Si deve introdurre perciò un'ulteriore base tecnica per tener conto di questo aspetto. Tale tasso è definito con  $\delta$  tale che:

$$b_x = b_{\beta} (1 + \delta)^{x-\beta} \quad x > \beta$$

Conoscendo i vari valori che  $b_x$  assumerà per istanti successivi a  $\beta$  si può calcolare la riserva matematica che si dovrà avere in  $\beta$  per far fronte al pagamento delle rate future quando l'individuo maturerà i requisiti per la pensione di vecchiaia. Questa è definita come:

$$V_{\beta} = b_{\beta} \cdot \ddot{a}_{\beta}^{j,p} \quad \text{con} \quad \ddot{a}_{\beta}^{j,p} = \sum_{h=0}^{\omega-\beta} \frac{l_{\beta+h}}{l_{\beta}} (1+j)^{-h}$$

Dove  $\ddot{a}_\beta^{j,p}$  è il valore attuale atteso di una rendita annua, immediata, vitalizia, corrisposta in via anticipata in  $\beta$ , di rata unitaria e costante.  $j$  è il tasso tecnico che viene utilizzato per il calcolo di riserve e contributi e potrà assumere valore deterministico o stocastico a seconda delle ipotesi fatte. In seguito si mostrerà come può essere determinato.

Per prendere in considerazione anche l'aspetto di rivalutazione della rata si deve rivedere la formulazione appena descritta tenendo conto della progressione geometrica di  $(1 + \delta)$  e si ottiene il seguente risultato, funzione di un tasso sintetico  $u$  che tiene conto sia dell'effetto di  $\delta$  che di  $j$ , riconducendosi alla logica delle rendite con rata costante:

$$\ddot{a}_\beta^{u,p} = \sum_{h=0}^{\omega-\beta} \frac{l_{\beta+h}}{l_\beta} (1+j)^{-h} (1+\delta)^h = \sum_{h=0}^{\omega-\beta} \frac{l_{\beta+h}}{l_\beta} \frac{(1+j)^{-h}}{(1+\delta)^{-h}} = \sum_{h=0}^{\omega-\beta} \frac{l_{\beta+h}}{l_\beta} (1+u)^{-h}$$

Questo modello vale se l'unica prestazione che il fondo sostiene è quella di vecchiaia. Ovviamente il ragionamento può essere esteso ad altre forme di prestazione. L'aspetto che cambierà sarà la tavola demografica su cui si farà riferimento. In questo contesto le probabilità utilizzate sono quelle della vecchiaia ossia le  $l_x^v$ .

Tutte le basi tecniche finora discusse sono dette del primo ordine ossia quelle ipotesi che vengono fatte in sede di determinazione delle riserve e dei premi di contribuzione. Si indicherà nel seguito le basi con un \* quelle del secondo ordine che riflettono l'evoluzione della collettività effettivamente verificatasi nel corso degli anni.

Quando detto vale per la fase di erogazione. Per quanto riguarda la fase di accumulo l'obiettivo è quello di andare a definire l'ammontare previsto dei contributi, anch'essi corrisposti in via anticipata. Questi saranno calcolati come un'aliquota  $k_x$  del salario:  
 $c_x = k_x \cdot s_x$ .

Per ottenere questi valori la letteratura introduce diverse metodologie denominate di funding che si contraddistinguono per la fase di accumulo e per la metodologia che seguono per arrivare ad accantonare tra  $\alpha$  e  $\beta$  la riserva matematica  $V_\beta$ .

Tra i numerosi metodi presenti in letteratura si prende in considerazione un fondo la cui fase di accantonamento si caratterizza nel cercare una stabilità dell'aliquota contributiva richiesta all'aderente. Tale metodo è denominato Individual Entry Age (IEAM).

Tale metodo presenta affinità con i criteri di calcolo del premio per le tradizionali assicurazioni private sulla vita. Questo definisce in primo luogo la misura dei contributi e in funzione di quest'ultima determina la relazione degli impegni tecnici.

L'ammontare dei contributi sarà fornito dalla soluzione dell'equazione, in essere all'età  $\alpha$ , tra il valore attuale medio dei contributi e il valore attuale medio delle prestazioni del fondo. Per non rendere troppo complicato il modello non si prenderanno in considerazione l'aspetto delle tasse e delle spese per commissioni che il fondo dovrà sostenere.

Per quanto riguarda il valore attuale atteso dei contributi questo può essere definito come la somma di tutti i versamenti, corrisposti in via anticipata, che il lavoratore farà da  $\alpha$  a  $\beta$  attualizzati mediante il fattore demografico e finanziario E. Questo quindi si può riscrivere come:

$$\sum_{h=0}^{\beta-\alpha-1} c_{\alpha+h} \cdot E_{\alpha}^{j,p^a}$$

Si può notare come la tavola demografica di riferimento sia quella dei soggetti attivi infatti la probabilità  $p^a$  indica la legge di sopravvivenza del gruppo dei lavoratori

Se il fondo prevedesse solamente la prestazione di vecchiaia questa sommatoria dovrebbe essere uguale al valore attuale atteso in caso di vecchiaia che può essere definito come segue:

$$A_{\alpha}^{a,v} = \beta - \alpha E_{\alpha}^{j,p^a} \cdot \left( \frac{\beta - \alpha}{k} s_{\beta-1} \right) \cdot \ddot{a}_{\beta}^{u,p^v}$$

Dove E rappresenta il fattore di attualizzazione demografico – finanziario dall'età  $\beta$  all'età  $\alpha$ , con tasso di rivalutazione j, mentre  $l_x^a$  denota la legge di sopravvivenza della collettività degli attivi soggetta a più cause di eliminazione come definito il precedenza risultando naturalmente  $l_{\beta+1}^a = 0$ .

$$\beta - \alpha E_{\alpha}^{j,p^a} = (1 + j)^{-(\beta-\alpha)} \cdot \beta - \alpha p_{\alpha}^a = (1 + j)^{-(\beta-\alpha)} \cdot \frac{l_{\beta}^a}{l_{\alpha}^a}$$

Tuttavia è stato delineato un fondo con più prestazioni che verranno sommate a quella di vecchiaia per tener conto di tutti gli impegni e averne una corretta stima. Cruciale sarà in

questo contesto definire le probabilità di transizione ossia le probabilità di passaggio da uno stato all'altro.

Si inizia con l'analizzare la prestazione a causa di un'invalidità permanente. Per la maturazione di tale diritto viene comunemente richiesta un'anzianità contributiva minima  $n$ , che nella normativa attuale in Italia corrisponde a 5 anni. Definiamo come  $q_x^{a,i} = \frac{d_x^i}{l_x^a}$  la probabilità relativa di eliminazione dalla collettività degli attivi  $l^a$  a causa di invalidità tra l'età  $x$  e  $x+1$ , restando fermo che la popolazione degli attivi è comunque soggetta ad altre cause di eliminazione, e con  $p^i$  la legge di sopravvivenza riferita a quella degli invalidi.

Il valore attuale atteso degli impegni a causa di invalidità potrà essere definito all'età di ingresso  $\alpha$  come:

$$A_\alpha^{a,i} = \sum_{x=\alpha+n}^{\beta-1} x-\alpha E_\alpha^{j,p^a} \cdot \left( \frac{x-\alpha}{k} s_{x-1} \right) \cdot \ddot{a}_x^{u,p^i} \cdot /_1 q_x^{a,i}$$

Il fondo pensione inoltre prevede la corresponsione di una pensione anticipata a partire da un'età  $x$  che non deve essere inferiore ad un'età prestabilita  $\beta'$ . In tal caso, il valore attuale medio, sempre all'età di ingresso  $\alpha$  sarà:

$$A_\alpha^{a,z} = \sum_{x=\beta'}^{\beta-1} x-\alpha E_\alpha^{j,p^a} \cdot \left( \frac{x-\alpha}{k} s_{x-1} \right) \cdot \ddot{a}_x^{u,p^z} \cdot /_1 q_x^{a,z}$$

dove  $q_x^{a,z} = \frac{d_x^z}{l_x^a}$  indica la probabilità relativa di eliminazione dalla collettività degli attivi tra le età  $x$  e  $x+1$  a causa di pensionamento anticipato. Il valore attuariale  $\ddot{a}_x^{u,p^i}$  si differisce da  $\ddot{a}_\beta^{u,p^v}$  solo perché fa riferimento alla legge di sopravvivenza dei pensionati per pensione anticipata anziché a quella dei pensionati di vecchiaia nel caso tale distinzione, sulla base dell'esperienza, sia ritenuta necessaria.

Qualora un membro attivo decida di uscire dal fondo e quindi di trasferire la propria posizione il fondo deve possedere le risorse necessarie per far fronte a questo impegno. La normativa italiana odierna prevede la portabilità della posizione solamente dopo  $\gamma$  anni di adesione al fondo senza penalizzazione. Di conseguenza il valore attuale atteso degli impegni del fondo in  $\alpha$  sarà pari a:

$$A_{\alpha}^{a,w} = \sum_{x=0}^{\beta-\alpha-1} (1+j)^x \cdot c_{\alpha+x} \cdot {}_1q_x^{a,w}$$

dove  $q_x^{a,w} = \frac{d_x^w}{l_x^a}$ , dove i valori di  ${}_1q_x^{a,w}$ ;  ${}_1q_{x+1}^{a,w}$ ;  ${}_1q_{x+2}^{a,w}$ ; ...;  ${}_1q_{x+\gamma}^{a,w}$  saranno posti uguali a 0 in modo tale da tener conto che l'individuo in quegli anni non ha il diritto di riscattare la posizione maturata.

Infine in caso di decesso di un soggetto attivo il fondo prevede la corresponsione di una pensione indiretta, generalmente costituita da una rendita vitalizia immediata, pari ad un'aliquota  $\varepsilon$  della rendita maturata dal membro al momento del decesso a patto che l'aderente abbia maturato un'anzianità minima nel fondo pari a  $\xi$  anni. Il valore attuale atteso delle prestazioni diviene pari a:

$$A_{\alpha}^{a,s} = \sum_{x=\alpha+\xi}^{\beta-1} {}_{x-\alpha}E_{\alpha}^{j,p^a} \cdot \left( \varepsilon \cdot \frac{x-\alpha}{k} s_{x-1} \right) \cdot \ddot{a}_{x-\tau}^{u,p^s} \cdot {}_1q_x^{a,d}$$

trappresenta la differenza di età tra il membro deceduto ed il coniuge superstite, trascurando per semplicità l'esistenza di figli superstiti.

La probabilità relativa  $p^s$  è pari per definizione a  $\frac{l_{x+1}^s}{l_x^s}$  dove  $l^s$  indica la legge di sopravvivenza dei superstiti soggetti a cause di eliminazione di nuzialità o decesso.

Per concludere nel caso di decesso di un pensionato di vecchiaia verrà corrisposta una pensione di reversibilità che sarà funzione di  $s_{\beta-1}$  e non di  $s_{x-1}$  che sarà già nota nel momento in cui accadrà. Tuttavia la stima che viene fatta è svolta in  $\alpha$  e di conseguenza anche in questo caso risulterà un valore ignoto da stimare. Il valore attuale atteso degli impegni in questo caso sarà:

$$A_{\alpha}^{a,v,s} = \sum_{x=\beta}^{\omega} {}_{\beta-\alpha}E_{\alpha}^{j,p^a} \cdot {}_{x-\beta}E_{\beta}^{j,p^v} \left( \varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{k} s_{\beta-1} \right) \cdot (1+\delta)^{x-\beta} \cdot \ddot{a}_{x-\tau}^{u,p^s} \cdot {}_1q_x^{v,d}$$

L'ammontare dei contributi sarà fornito ancora una volta dalla soluzione della seguente equazione in essere all'età di ingresso  $\alpha$  tra il valore attuale atteso dei contributi e la somma dei valori attuali attesi della prestazione di vecchiaia del fondo:

$$\sum_{h=0}^{\beta-\alpha-1} c_{\alpha+h} \cdot {}_h E_{\alpha}^{j,p^a} = A_{\alpha}^{a,v}$$

Di norma, seguendo questo metodo si preferisce che l'ammontare dei contributi sia costante nel tempo e di conseguenza questo sarà:

$$c_x = c = \frac{A_{\alpha}^{a,v}}{|\beta-\alpha \ddot{a}_{\alpha}^{j,p^a}|}$$

Nel caso in cui si desiderasse un'aliquota contributiva costante nel tempo k, basterà dividere il valore appena derivato per il valore del salario all'età x che si prende in considerazione.

Se si vuole calcolare il valore della riserva ad una data futura x, durante la fase di accumulazione questa sarà data dalla differenza tra il valore attuale atteso delle prestazioni di vecchiaia e quello delle contribuzioni come riportato dalla seguente formula:

$$V_x = A_x^{a,v} - \sum_{h=0}^{\beta-x-1} c_{x+h} \cdot {}_h E_x^{j,p^a}$$

### **3 Un fondo a contribuzione definita**

Un fondo a contribuzione definita prevede la definizione in anticipo di un tasso di contribuzione cosicché la prestazione sia una variabile dipendente da questo. Le contribuzioni di ogni aderente al fondo sono accumulate in un conto individuale insieme agli interessi e ai rendimenti che il gestore riuscirà ad ottenere dall'investimento di tale liquidità. Il montante che si verrà a formare verrà pagato mediante l'erogazione di un capitale o di una rendita all'occorrere di avvenimenti ben specificati come possono essere il pensionamento, di vecchiaia o anticipato, invalidità o morte da attivo. La prestazione di conseguenza dipenderà, oltre alle contribuzioni, dagli interessi e dai ritorni degli investimenti che verranno accreditati sui conti individuali, mentre le successive contribuzioni vengono determinate dalla progressione salariale dei membri. Per quanto detto si intuisce che l'unico modo di gestire un fondo pensione a contribuzione definita è la capitalizzazione individuale. Questo aspetto è in contrasto con i fondi a prestazione

definita dove l'equilibrio si può ricercare anche a livello collettivo, prendendo in considerazione più aderenti e più generazioni.

I fondi a contribuzione definita, a seguito di limitazioni che gli vengono imposte per motivi di trasparenza, tendono a seguire politiche di investimento al fine di eliminare la possibilità di rendimenti negativi nel breve periodo, sebbene questo significhi negare la possibilità di un più alto rendimento nel lungo termine.

Da un punto di vista attuariale la struttura di un fondo a contribuzione definita è semplice, sebbene i metodi per determinare i parametri di tali fondi, quali inflazione, tasso di interesse, siano particolarmente rilevanti.

Il modello che si presenta nel seguito ha delle semplificazioni per rendere il più chiaro possibile la logica sottostante tali fondi.

Si prende in considerazione un fondo che può investire in sole due attività con differenti profili di rischio, uno alto e uno basso, mentre non vengono incluse nel modello le tasse e le spese per commissioni che verranno sostenute. Ovviamente questa ipotesi sugli investimenti sembra essere molto forte. Può essere ragionevole che il fondo decida di investire in sole due attività per un certo periodo di tempo, per un principio di diversificazione, mentre risultata irrealistica se si osserva un orizzonte temporale ampio come quello preso in considerazione. Perciò risulterebbe interessante poter far un'analisi su un modello basato su  $n$  attività, per il quale si può far riferimento a Vigna, Haberman (2002).

Il capitale investito nelle due attività si assume che venga rivisto ogni anno, in funzione del rendimento che ha prodotto e del livello del fondo comparato con uno specifico target. Questa ipotesi sembra essere consistente con la realtà dove l'aderente al fondo è informato ogni anno circa la crescita della sua posizione e può di conseguenza modificare la sua strategia di investimento, scegliendo la soluzione più appropriata basata sull'esperienza maturata. Di conseguenza questo giustifica il motivo per cui si è deciso di mostrare un modello a tempo discreto e non continuo.

Si assume che la contribuzione sia pagata annualmente in misura anticipata e che il suo valore sia definito come una percentuale del salario come accade nella maggioranza dei fondi a contribuzione definita.

Quindi si può affermare come il livello di un fondo al tempo  $t$  soddisfa la seguente relazione ricorrente:



$$f_{t+1} = (f_t + cS_t)[(1 - y_t)(1 + \mu_t) + y_t(1 + \lambda_t)]$$

dove  $f_t$  è il livello del fondo al tempo  $t$ ,  $c$  è il tasso di contribuzione,  $S_t$  è il salario al tempo  $t$ ,  $y_t$  è la porzione di capitale investita nell'attività ad alto rischio durante l'anno tra  $t$  e  $t+1$ ,  $\mu_t$  è il tasso di interesse reale per un'attività a basso rischio durante l'anno tra  $t$  e  $t+1$ , mentre quello dell'attività ad alto rischio è  $\lambda_t$ . Tali tassi si assume essere costanti durante l'anno.

L'assunzione di un tasso costante per ogni anno è stata fatta per esigenze di semplificazione ma anche perché si abbina con l'annuale rivisitazione dell'asset allocation che è parte del modello.

Si assume inoltre che il lavoratore aderisca al fondo al tempo  $t = 0$  e contribuisce per tutta la durata prima del pensionamento fino a  $t = N$  con lo stesso tasso di contribuzione.

Poiché il capitale e i contributi sono investiti parzialmente in attività a basso rischio e attività ad alto rischio si può fissare, a priori, un obiettivo (target) del fondo che potrebbe essere:

$$F_N = f_0(1 + r^*)^N + cS_t\ddot{s}_{N|r^*}$$

Dove  $r^*$  sarà funzione sia dei tassi ad alto e basso rischio nonché delle loro volatilità.

Tuttavia, assumendo che il valore finale del fondo sarà convertito in una rendita immediata, l'aderente è più interessato al tasso di sostituzione. Per questo motivo il target  $F_N$  viene convertito in una rendita, prendendo in considerazione un coefficiente di trasformazione che tenga conto di tutti gli impegni futuri percepiti sia dal pensionato che dalla famiglia superstite. Tale coefficiente di trasformazione  $C_N$  sarà pari alla funzione inversa della somma di due coefficienti di capitalizzazione, uno del primo tipo per la pensione diretta  $\ddot{a}_N^v$  e l'altro del secondo tipo per la pensione di reversibilità  $\ddot{a}_N^{vf}$ .

Di conseguenza si può definire il tasso di sostituzione come, assumendo  $N$  come l'età del pensionamento:

$$B_N = \frac{F_N \cdot C_N}{S_N}$$

$$\text{Dove } C_N = \frac{1}{\ddot{a}_N^v + \ddot{a}_N^{vf} - k}$$

con k correzione per tener conto che le rate di rendita sono erogate mensilmente per 13 mensilità l'anno. Infatti i coefficienti di capitalizzazione sono calcolati su base annua. La metodologia di calcolo, che verrà applicata per stimarli, è quella legata alla Legge Dini del 1995 che introdusse tali coefficienti nel Sistema Previdenziale Pubblico italiano a seguito dell'introduzione del metodo contributivo per il calcolo della pensione del primo pilastro per i lavoratori.

Tali valori sono definiti attraverso una semplificazione importante, ossia sono una media semplice dei valori che si otterrebbero facendo riferimento o alle tavole di sopravvivenza maschili o tavole di sopravvivenza femminile. In formule:

$$\ddot{a}_N^v = \frac{(\ddot{a}_{N,m}^v + \ddot{a}_{N,f}^v)}{2} \qquad \ddot{a}_N^{v,f} = \frac{(\ddot{a}_{N,m}^{v,f} + \ddot{a}_{N,f}^{v,f})}{2}$$

Prendono in considerazione solo quelli maschili, analoga è la definizione per quelli femminili, si definiscono i coefficienti di capitalizzazione nel seguente modo:

$$\ddot{a}_{N,m}^v = \sum_{h=0}^{\omega-N} \frac{l_{N+h}^m}{l_N^m} (1 + \mu_t)^{-h}$$

dove  $(1 + \mu_t)$  è il fattore di attualizzazione finanziaria dove il tasso corrisponde al valore atteso degli investimenti casuali dell'attività a basso rischio, mentre  $l_N^m$  fa riferimento alla tavola di sopravvivenza per vecchiaia come definita nel paragrafo precedente. Come nel caso a prestazione definita  $\omega$  è l'età estrema presa in considerazione.

L'altro coefficiente è invece definito come:

$$\ddot{a}_{N,m}^{v,f} = \sum_{h=0}^{\omega-N} \frac{l_{N+h}^m}{l_N^m} (1 + \mu_t)^{-(h+1)} \cdot q_{N+h}^m \cdot \theta_{N+h}^m \cdot \eta^m \cdot \varepsilon \cdot \ddot{a}_{N+h+\tau+1}^{ved}$$

Dove  $q_{N+h}^m$  è la probabilità di transizione da pensionato a superstite,  $\theta_{N+h}^m$  è la probabilità di lasciar famiglia alla morte,  $\varepsilon$  è l'aliquota di reversibilità del coniuge (attualmente per la normativa italiana è pari al 60%),  $\eta^m$  corrisponde a un coefficiente riduttivo per le prestazioni di reversibilità ossia un ulteriore abbattimento per tener conto dei guadagni del coniuge superstite, ed infine  $\ddot{a}_{N+h+\tau+1}^{ved}$  corrisponde al coefficiente di capitalizzazione

del primo tipo rispetto agli impegni nei confronti del coniuge, con  $\tau$  differenza di età al matrimonio, al fine di approssimare l'età del coniuge.

Si noti come viene fatta un'importante semplificazione: non si tiene conto degli impegni nei confronti dei probabili figli che possono avere il diritto di una prestazione se soddisfano alcuni requisiti previsti dalla legge. Per semplicità di calcolo questi impegni non verranno presi in considerazione in maniera completa ma con un'approssimazione. Per questo motivo a  $\tau$  verrà applicato un correttivo. Con questo secondo correttivo si sovrastima il valore attuale atteso nei confronti del coniuge, per cercare di stimare l'onere nei confronti dei figli. Di solito assumono valori negativi in modo da aggiungere elementi alla sommatoria e aumentare il valore del coefficiente di capitalizzazione in quanto viene considerato un individuo più giovane.

I gestori del fondo possono focalizzare la loro attenzione anche su obiettivi annuali. Tali target vengono calcolati in quanto il montante è convertito in rendita solo al momento del pensionamento.

Questi vengono scelti attraverso degli incrementi lineari annuali. Ad esempio per  $t = 1$  si può definire l'obiettivo come:

$$F_1 = (f_0 + cS_0)(1 + \mu_t)$$

#### **4 La dinamica salariale**

I modelli illustrati si basano sul salario a un tempo futuro, il cui vero valore non si conosce a priori. Di conseguenza al fondo spetta il compito d'introdurre una metodologia che possa darne una stima veritiera.

Un primo metodo è quello di considerare un tasso  $i$ , costante nel tempo, come il prevedibile tasso di variazione annua delle retribuzioni. Tale variazione sarà dovuta sia ad incrementi generalizzati del settore economico di appartenenza, a seguito dell'aumento del costo della vita e della produttività, che al prevedibile sviluppo di carriera. Di conseguenza, il salario annuo previsto per un lavoratore di età  $x$  e con un'anzianità  $t$  nel fondo, erogato in via anticipata ed in un'unica soluzione, sarà pari a:

$$s(x, t) = s(x, 0) \cdot \frac{I_t^g}{I_0^g} \cdot \frac{I_t^c}{I_0^c} = s(x, 0) \cdot (1 + i)^t$$

Dove  $s(x, 0)$  è il salario iniziale che percepisce il lavoratore quando sottoscrive l'adesione al fondo, mentre  $I^g$  è l'indice generale dei salari del settore lavorativo di appartenenza e  $I^c$  è quello riguardante gli sviluppi di carriera.

Come si può notare questo risulta essere un modello approssimativo in quanto non permette di tener conto della volatilità che questi salari possono avere rispetto a una medesima età. Di conseguenza il secondo metodo che si può utilizzare consiste nell'associare una distribuzione di probabilità al valore dei salari.

Tale distribuzione per ogni età  $x$  può essere assunta come una LogNormale. Ciò significa che il logaritmo naturale delle retribuzioni è distribuito normalmente.

Definendo  $y$  come i salari e  $z = \ln(y)$  e assumendo che  $\mu_y$  e  $\mu_z$  siano le rispettive medie così come  $\sigma_y^2$  e  $\sigma_z^2$  le rispettive varianze è noto che questi parametri sono connessi dalla seguente relazione:

$$\mu_y = e^{\mu_z + \frac{1}{2}\sigma_z^2}$$

$$\sigma_y^2 = e^{2\mu_z + \sigma_z^2} (e^{\sigma_z^2} - 1)$$

Se si assume che il salario medio  $\mu_y = s(x, t)$ , definito in precedenza, e che il coefficiente di variabilità dei salari  $y$ , denominato  $CV_y$  sia costante per tutte le età, allora è noto che  $\sigma_y = CV_y \cdot s(x, t)$ .

I parametri della distribuzione  $z$  possono essere computati facilmente come segue, risolvendo le formule appena mostrate:

$$\mu_z = \ln\left(\frac{\mu_y}{\sqrt{1 + CV_y^2}}\right)$$

$$\sigma_z^2 = \ln(1 + CV_y^2)$$

Un terzo metodo per la proiezione dei salari è quello di caratterizzare il processo mediante un'equazione stocastica differenziale. In questo caso si prende in considerazione il modello esposto da Battocchio e Menoncin (2002).

L'evoluzione dinamica dei salari è data da:

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \mu_L(t)dt + k_r \sigma dW_r(t) + k_S \sigma_S dW_S(t) + \sigma_L dW_\pi(t)$$

dove  $k_r$  e  $k_S$  sono due coefficienti di scala della volatilità che misurano come il rischio di tasso di interesse e degli asset in cui si è investito modificano i salari, mentre  $\sigma_L \neq 0$  è una volatilità non diversificabile che rappresenta un rischio “sistemico” del salario, ovvero un rischio che non appartiene ai rischi propri del mercato finanziario. La fonte di tale rischio è rappresentata da un moto browniano standard unidimensionale  $W_\pi(t)$  che si suppone essere indipendente da  $W_r(t)$ , moto browniano riferito al tasso privo di rischio, e  $W_S(t)$ , processo di Wiener riferito alle attività rischiose in cui il fondo ha investito. Infine si assume che la media istantanea dei salari è definita come la somma tra un tasso di interesse privo di rischio  $r(t)$  e una costante reale  $m_L$ , intesa come un premio per il rischio riferita ai salari.

Dopo aver applicato il lemma di Itô al logaritmo di  $L(t)$  si può trovare la soluzione esplicita dell'equazione che risulta essere:

$$L(t) = L_0 \exp \left( \int_0^t r(\tau) d\tau + \left( m_L - \frac{1}{2} k_r^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} k_S^2 \sigma_S^2 - \frac{1}{2} \sigma_L^2 \right) t + k_r \sigma W_r(t) + k_S \sigma_S W_S(t) + \sigma_L W_\pi(t) \right)$$

## **5 La struttura a termine dei tassi di interesse**

Nell'illustrazione dei modelli dei paragrafi precedenti si è sempre assunto come tasso di interesse un parametro costante nel tempo. Questo è noto essere un'assunzione errata, in quanto un problema cruciale della teoria finanziaria è stato quello di individuare un modello finanziario che descrivesse l'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi di interesse in funzione del tempo e della maturità prescelta.

I modelli che si andrà ora a sviluppare nel dettaglio si basano sul principio di non arbitraggio.

### **5.1 il Processo di Wiener**

L'aleatorietà dei cambiamenti del tasso di interesse risulta essere una caratteristica fondamentale dei mercati.

Sebbene il movimento dei prezzi e dei tassi sia definito da principi economici deterministici, l'enorme e variegata struttura formativa dei prezzi fa sembrare che questi si muovano seguendo una *random walk* ossia un cammino casuale. Di conseguenza un modello che sia affidabile ne deve tener conto. Lo strumento matematico che si prende in considerazione è perciò un processo di Wiener o anche nominato moto Browniano. Tale processo è un particolare tipo dei processi di Markov, con variazione media nulla e tasso di varianza unitario.

Formalmente, si dice che una variabile  $W$  segue un processo di Wiener se soddisfa le due seguenti proprietà:

- La variazione  $\Delta W = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$  dove  $\varepsilon$  è un'estrazione casuale da una normale standardizzata
- I valori di  $\Delta W$  in due qualsiasi intervalli  $\Delta t$  sono indipendenti

La prima implica che  $\Delta W$  si distribuisca come una normale con media pari a 0 e varianza pari a  $\Delta t$ .

La seconda implica che  $W$  segue un processo di Markov.

Nel calcolo ordinario si è soliti passare dalle variazioni piccole a quelle infinitesimali, di conseguenza il processo di Wiener è il limite di  $\Delta t \rightarrow 0$  del processo descritto sopra per  $W$ .

Il processo di Wiener che è stato sviluppato finora ha un tasso di deriva o drift pari a 0 e un tasso di varianza (*variance rate*) pari a 1. Un drift nullo implica che il valore atteso di  $W$  a ogni futuro istante di tempo è uguale al suo valore corrente. Il tasso di varianza pari a 1 significa che la varianza delle variazioni di  $W$  in un intervallo di lunghezza  $T$  è uguale a  $1 \cdot T$ . Ciò non è quanto si evidenzia nella realtà empirica della finanza. Di conseguenza è nata l'esigenza di introdurre i processi di Wiener generalizzati. In riferimento a una variabile  $x$  può essere definito in termini di  $dW$ , ossia considerando una variabile infinitesimale:

$$dx = a dt + b dW$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti.

Il termine  $a dt$  implica che  $x$  ha una variazione attesa, per unità di tempo, pari a  $a$ . Infatti, senza considerare la seconda componente alla destra dell'equazione, si ha, integrando rispetto al tempo,

$$x = x_0 + at$$

Dove  $x_0$  è il valore di  $x$  al tempo 0. In un intervallo di lunghezza  $T$ ,  $x$  aumenta in misura pari a  $adT$ .

Il termine  $bdW$  aggiunge "rumore" (*noise*) ossia variabilità al sentiero temporale seguito da  $x$ . La magnitudo di questa corrisponde a  $b$  volte un processo di Wiener.

Di conseguenza alla luce di quanto visto la variazione del valore di  $x$ ,  $\Delta x$ , in un piccolo intervallo di tempo  $\Delta t$  è:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Pertanto,  $\Delta x$  assume una distribuzione normale con media uguale ad  $a\sqrt{\Delta t}$  e varianza  $b^2\sqrt{\Delta t}$ .

La differenza tra un processo di Wiener standard e generalizzato è illustrato chiaramente nella figura seguente:

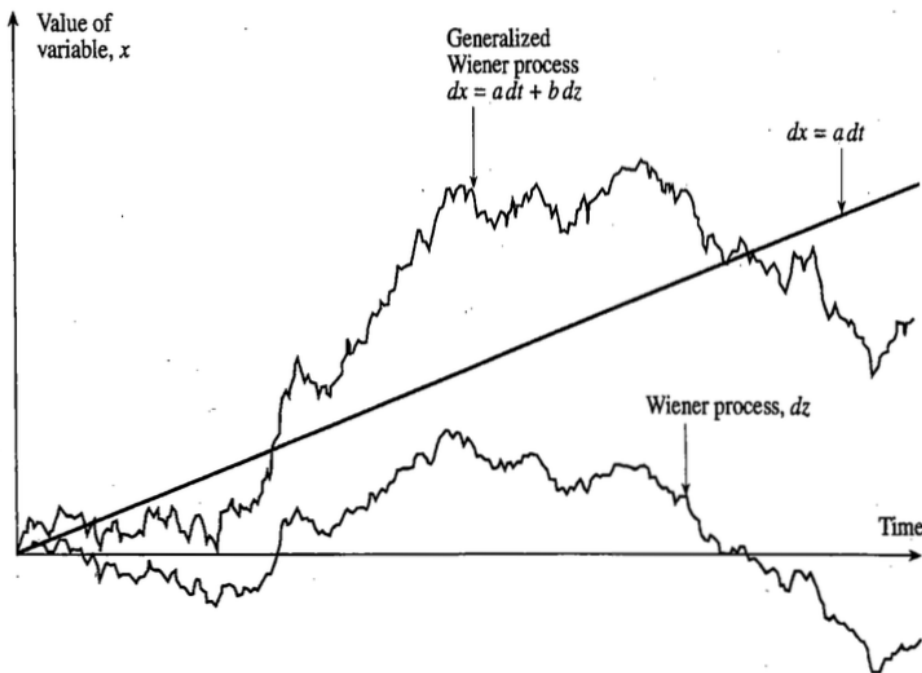


Figura 12 - Differenza di andamenti tra un processo di Wiener standard e generalizzato

Tale modello può essere utilizzato per calcolare la curva dei rendimenti che può assumere un attivo ad alto rischio in cui il fondo pensione può aver investito. Infatti si può assumere che  $x$  sia il prezzo dell'azione in cui si è investito e andare a simulare attraverso un approccio Monte Carlo il possibile cammino che tale prezzo avrà in un periodo futuro, su

un fissato arco temporale. Le formule sopra descritte infatti valgono anche se si considera al posto di  $\Delta t$  un intervallo più ampio che può essere T. Una volta noti il prezzo alla data odierna e il prezzo a una data futura T il calcolo del rendimento risulta immediato.

## 5.2 Il modello di Black – Scholes – Merton

Un ulteriore approccio per il calcolo dei rendimenti di un'attività ad alto rischio, come può essere un'azione è quello definito da Black – Scholes – Merton i quali arrivano a definire, basandosi sul *capital asset pricing model*, oltre a un valore a una data futura anche una distribuzione di probabilità che tale rendimento può assumere.

L'assunzione primaria che viene fatta è che il tasso di variazione istantaneo del prezzo di un'azione si distribuisca in modo normale con  $\mu$  tasso di rendimento atteso su base annua e  $\sigma$  la volatilità su base annua. Pertanto nell'intervallo  $\Delta t$  il tasso di variazione del prezzo di un'azione avrà media  $\mu\Delta t$  e deviazione standard  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ . In formule:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$$

Dove  $\Delta S$  è la variazione del prezzo dell'azione nell'intervallo  $\Delta t$  e  $\sigma^2\Delta t$  indica la varianza della distribuzione normale. A seguito del Lemma di Itô il modello implica che

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2T\right]$$

consegue che

$$\ln(S_T) \sim N\left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2T\right]$$

dove  $S_T$  è il prezzo dell'azione al tempo T e  $S_0$  è il prezzo al tempo iniziale 0.

Come si evince dall'equazione  $\ln(S_T)$  è distribuito normalmente, per cui  $S_T$  è logNormale. Viene data una distribuzione di probabilità al valore che può assumere l'azione in un istante temporale futuro, in particolare l'assunzione fatta è quella della lognormalità. Come è noto tale distribuzione può assumere valori tra 0 e  $+\infty$  e media, moda mediana,



assumono valori diversi. In base a tale equazione e alle proprietà della logNormale si può facilmente dimostrare che il valore atteso di  $S_T$  è dato da:

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

Questo giustifica la definizione di  $\mu$  come tasso di rendimento atteso.

Si può inoltre dimostrare che la varianza di  $S_T$  coincide con:

$$var(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

Queste proprietà appena definite possono essere utilizzate per avere informazioni circa la distribuzione del tasso di rendimento dell'azione relativo al periodo tra zero e T.

Se si definisce  $\eta$  come il tasso di rendimento annuo relativo al periodo tra 0 e T ne segue che

$S_T = S_0 e^{\eta T}$  e di conseguenza si può ricavare  $\eta$  come:

$$\eta = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right)$$

da cui segue, per il modello appena esposto che

$$\eta \sim N \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T} \right)$$

Si osserva perciò come la media dipenda da  $\mu$  ma non sia coincidente, in quanto non si è assunta una funzione lineare ma logaritmica per  $S_T$ . Inoltre la sua varianza diminuisce nel tempo e ciò è razionale. Si è infatti più certi che il tasso di rendimento dei prossimi 20 anni si avvicinerà di più alla media di quanto lo si è per il tasso di rendimento per il prossimo anno.

Per la stima dei parametri di questo modello sono proposte in letteratura diverse metodologie.

Per quanto concerne una delle più utilizzate è il CAPM ossia il *Capital Asset Pricing Model*, il quale lo stima in funzione del rischio.

Secondo tale metodologia il rischio di un investimento in un periodo di tempo fissato può essere diviso in due componenti: una detta rischio sistematico, che, essendo legato al tasso di rendimento del mercato, non può essere diversificato, mentre l'altra è nominata

rischio non-sistematico, che è proprio dell'attività finanziaria e può essere diversificato selezionando un portafoglio composto da diversi asset tutti diversi tra loro.

Per il CAPM il tasso di rendimento atteso dovrebbe dipendere esclusivamente dal rischio sistematico, infatti la sua formula è:

$$E(r) = \mu = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

dove  $r_m$  è il ritorno di un portafoglio formato da tutti gli investimenti possibili, ovvero il "tasso di rendimento del mercato",  $r_f$  è il tasso di rendimento di un investimento privo di rischio e  $\beta$  è un parametro misurante il rischio sistematico.

$r_m$  è perciò il tasso di interesse di mercato che approssimativamente coincide con il tasso di rendimento di un indice azionario molto ben diversificato. Il  $\beta$  misura la sensibilità del tasso di rendimento dell'attività finanziaria rispetto al tasso di rendimento del mercato.

Quando  $\beta=0$  i ritorni dell'asset non sono influenzati dal tasso di rendimento di mercato: in questo caso non esiste alcun rischio sistematico e il valore atteso di ritorno dell'asset coincide col tasso privo di rischio. Al contrario se  $\beta=1$ ,  $\mu$  corrisponde, in media, al rendimento del mercato.

La volatilità  $\sigma$  misura l'incertezza circa i flussi di rendimento del titolo. I valori tipici che questa può assumere sono tra il 15% e il 60%. Per una sua stima si possono utilizzare sia i dati storici sia un modello GARCH.

Per quanto riguarda la prima metodologia empirica, si assume che il prezzo dell'azione possa essere osservato a periodi fissi di tempo e quindi si avranno a disposizione i valori di  $S_i$ ; si assume inoltre che  $n+1$  siano il numero di osservazioni a disposizione e che  $\tau$  sia l'ampiezza dell'intervallo di tempo in anni. Con questi strumenti si possono definire  $u_i$  i rendimenti storici dell'azione e da questi arrivare a una stima della deviazione standard seguendone la definizione. In formule:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^2}$$

Come si è avuto modo di osservare in precedenza, la deviazione standard degli  $u_i$  è  $\sigma\sqrt{\tau}$ . La variabile  $s$  è una stima non distorta di  $\sigma\sqrt{\tau}$  perciò segue che per averne una stima bisogna dividere  $s$  per la radice di  $\tau$ .

Come è prassi, quando si usano i dati storici, bisogna fare delle considerazioni sul valore di  $n$  ovvero su quante osservazioni passate utilizzare per la stima di tale varianza. Aumentare  $n$  generalmente porta a una stima più accurata. Tuttavia la deviazione standard cambia nel tempo e dati che sono troppo vecchi potrebbero non essere rilevanti per una corretta stima in quanto si basano su dati troppo passati.

Modelli più sofisticati per la stima della volatilità sono gli EWMA o i modelli GARCH di cui però non si tratterà in questo lavoro.

### 5.3 Il modello Cox – Ingersoll – Ross

Per quanto concerne invece i modelli per i tassi di rendimento di titoli il cui profilo di rischio è basso si utilizzano criteri che cercano di modellizzare il tasso a breve.

Una prima metodologia utilizzata è quella proposta da Vasicek nel 1977 dove il cammino del tasso di interesse è dato da:

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma dW$$

con valori di  $\alpha, \gamma$  e  $\sigma$  positivi.

Tale modello introduce il concetto di ritorno alla media ossia *mean reversion*. Se  $r > \gamma$  il termine diffusivo è negativo e proporzionalmente alla differenza,  $r$  tende a diminuire, se invece  $r < \gamma$  il termine diffusivo è positivo e  $r$  tende ad aumentare.

Per questo motivo  $\gamma$  si definisce come la media di lunga periodo mentre  $\alpha$  indica la velocità di *mean reversion* mentre  $\sigma$  è la volatilità del tasso funzione di un processo di Wiener standard.

Di conseguenza il modello di Vasicek fornisce una descrizione piuttosto realistica dei processi osservati sulla serie storica del tasso a breve: *mean reversion* e aleatorietà delle variazioni. Esistono infatti numerose argomentazioni a supporto del ritorno alla media. Quando i tassi sono alti, l'economia tende a rallentare e c'è meno richiesta di finanziamento. Pertanto i tassi diminuiscono. Al contrario quando i tassi sono bassi, tende

ad esserci una maggiore richiesta di finanziamenti e questo conduce a un aumento dei tassi.

Tale modello, sebbene utilizzato largamente nella pratica, presenta dei difetti. Per esempio per alcune traiettorie del processo di Wiener i tassi a breve possono diventare negativi, ipotesi piuttosto irrealistica e sicuramente sbagliata nel caso di tassi nominali. In aggiunta il modello assume che la volatilità sia costante, indipendentemente dal livello del tasso e dall'istante temporale considerato.

Una soluzione a questi problemi è fornita dal modello di Cox, Ingersoll e Ross, denominato anche CIR. In formula tale modello può essere espresso come segue:

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

Si osservi quindi come la volatilità sia più alta per tassi più elevati prendendo in questo modo considerazione del *level effect*.

Dal modello si può facilmente ricavare la media e la varianza di  $r$  in un istante  $s$  successivo a  $t$  come riportato nelle seguenti formule:

$$E_t(r_s) = \gamma - (\gamma - r_t)e^{-\alpha(s-t)}$$

$$var_t(r_s) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha(s-t)}) [2r_t e^{-\alpha(s-t)} + \gamma(1 - e^{-\alpha(s-t)})]$$

e da cui è facilmente verificabile che  $\gamma$  rappresenta la media di lungo periodo. Infatti:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_t(r_s) = \gamma$$

Per stimare i parametri del modello si possono seguire due metodi.

Il primo si basa sui dati storici del tasso di interesse a breve e consente di effettuare una regressione lineare o il metodo della massima verosimiglianza.

Il secondo metodo si basa sui prezzi delle obbligazioni osservati in una certa data e consiste nel minimizzare la somma dei quadrati degli scarti tra le quotazioni effettive e le quotazioni teoriche fornite dal modello.

L'importante differenza tra le due metodologie è che la prima offre delle stime dei parametri del modello nel mondo reale, mentre la seconda offre stime nel mondo neutrale verso il rischio. Di conseguenza nel seguito si preferisce seguire il primo metodo. Questo parte dalla discretizzazione del modello CIR al prim'ordine di Eulero diventando:

$$r_{t+\Delta} - r_t = \alpha(\gamma - r_t)\Delta + \sigma\sqrt{r_t}\Delta\varepsilon_t$$

dove  $\varepsilon_t$  è una variabile aleatoria normale di media 0 e varianza 1.

Da sottolineare come la discretizzazione  $\Delta$  assuma un ruolo importante: l'approssimazione è tanto più precisa tanto più  $\Delta$  è piccolo, tenendo però conto che la simulazione è più veloce se  $\Delta$  è grande.

## **6 Il livello di funding**

Per osservare se un fondo pensione a prestazione definita è solvibile bisogna fare riferimento al livello di funding. Tale valore è fornito dal rapporto tra le attività accumulate e l'ammontare degli impegni tecnici iscritti in bilancio alla data di valutazione. Di conseguenza la solvibilità non viene valutata sulla singola posizione dell'aderente ma facendo riferimento a tutto l'insieme degli aderenti al fondo. Tale indicatore viene quindi espresso con:

$$\theta_x = \frac{Attivi_x}{Riserve_x}$$

Se tale valore coincide con 1 allora il fondo è in perfetto equilibrio infatti quanto viene accantonato corrisponde a quanto bisognerebbe accantonare. Se però tale valore risulta essere minore di 1 il fondo si trova in una situazione di insolvenza. Si è visto come in mercati quale quello Anglosassone ci siano dei limiti anche per un valore superiore a 1, tuttavia questo caso non verrà preso in considerazione. Tale indicatore inoltre porta informazioni importanti circa il rapporto tra le basi del primo e del secondo ordine: le attività vengono valutate con basi del secondo ordine mentre le riserve sono valutate con basi del primo ordine.

In formule si può riscrivere il livello di funding, prendendo in considerazione l'Individual Entry Age Method presentato nel paragrafo 2, come segue, soltanto nel caso in cui il fondo eroga una prestazione di vecchiaia:

$$\theta_x = \frac{\sum_{h=0}^{x-\alpha-1} l_{\alpha+h}^* \cdot k \cdot s_{\alpha+h}^* \cdot (1 + j_{\alpha+h}^*)^{x-(\alpha+h)}}{l_x^* \cdot V_x}$$

dove  $l_{\alpha+h}^*$  sono le persone effettivamente in vita all'età  $\alpha+h$ ,  $k$  è l'aliquota di contribuzione, richiesta ogni anno costante, ricavata con IEAM, quindi con le basi di primo ordine, e viene applicata al salario effettivamente percepito dal lavoratore in quell'anno. Infine  $j_{\alpha+h}^*$  rappresenta il tasso effettivo di rendimento realizzato in quell'anno. Di conseguenza la somma del prodotto di  $k$  e  $s$  corrisponde ai contributi versati fino a  $x - 1$ , moltiplicati per le effettive persone che li hanno versati. Si ricorda infatti che i contributi versati in  $x$  servono per finanziare le riserve tra  $x$  e  $x+1$ .

Ovviamente il numeratore può essere riscritto per mettere in luce la presenza di un fattore di attualizzazione demografica e finanziaria.

Il denominatore invece è dato da l'ammontare complessivo delle riserve del fondo ossia la riserva individuale calcolata per ogni singolo assicurato, rappresentativa della sua posizione, moltiplicata per le persone che effettivamente vantano ancora un diritto nei confronti del fondo.

Si può perciò facilmente intuire come il livello di funding sia influenzato dal rapporto tra le basi di diverso tipo. Si potrebbe dimostrare, ma per non appesantire la trattazione con formule troppo complesse non si entrerà nel dettaglio, che:

- Se viene scelto un tasso di rendimento  $j \gg j^*$ , restando invariati le altre basi, il livello di funding diventa minore di 1, in quanto gli attivi vengono rivalutati in misura minore rispetto al valore con cui le riserve matematiche vengono scontate
- Se  $p^* \gg p$ , fermo restando le altre basi, si avrà che al numeratore si riceveranno più contributi di quanto previsto, mentre al denominatore si accantonerà di più di quanto si era previsto. Si ha perciò un effetto duplice, tuttavia l'effetto dominante è quello che caratterizza le riserve e quindi si ricava che l'onere da accantonare è più rilevante dei benefici in termini di incasso di contributi e questo porta a una diminuzione sotto l'unità del livello di funding.

- Si osserva che in presenza di una dinamica salariale più importante rispetto a quella ipotizzata gli attivi crescono di più di quanto previsto (si sta applicando  $k$  a un salario più elevato), mentre le riserve rimangono invariate (dipendono esclusivamente dal salario ipotizzato) e di conseguenza ciò conduce ad un aumento del livello di funding. Questo però risulta essere un *overfunding* fittizio. Le riserve indicano il valore attuale atteso degli impegni del fondo e quindi si rifanno alle prestazioni che verranno erogate e sono ipotizzate essere funzione dell'ultimo salario disponibile. Nel momento in cui il fondo andrà ad erogare la prestazione questi la calcolerà sulla base del salario effettivo e non di quello ipotizzato e in quel momento si noterà l'effettiva diminuzione del livello di funding. Ciò nasce da un'anomalia delle formule che vengono utilizzate. Di conseguenza è pratica nei fondi pensione correggere il livello di funding attraverso un rapporto tra il salario ipotizzato e quello effettivo come illustrato nella seguente formula, ricavando il cosiddetto livello di funding effettivo :  $\theta_x^{eff} = \theta_x \cdot \frac{S_{x-1}}{S_{x-1}^*}$ .

Al raggiungimento dell'età di quiescenza  $\beta$ , l'ammontare degli attivi può essere utilizzato dal fondo per la sottoscrizione con una compagnia di assicurazione di una polizza rendita vitalizia per ciascun membro della generazione che abbia raggiunto quell'età, tenendo presente che le basi tecniche adottate dalla compagnia possono differire da quelle utilizzate dal fondo. Se queste sono ad esempio superiori per quanto riguarda la mortalità, si osserva un abbassamento del livello di funding. Ciò avviene in quanto nel momento in cui il soggetto aderisce al fondo non c'è ancora una convenzione e nel momento di erogazione è uso andare a rivedere le tavole per la conversione del montante in rendita. In questo modo tuttavia il fondo cede i suoi rischi biometrici e finanziari a un altro soggetto.

## **7 Solvibilità in un fondo pensione a contribuzione definita**

Al contrario di quanto visto nel caso a prestazione definita, un fondo a contribuzione definita non ha un livello di funding. Il solo compito di questo fondo è raccogliere le risorse e investirle anno per anno, cercando di ottenere il maggior rendimento possibile

dal mercato. Il montante viene poi trasformato in rendita attraverso i coefficienti con le modalità illustrate precedentemente.

Quindi l'unico vero rischio a cui è soggetto tale fondo è quello demografico e finanziario nel momento in cui decide di erogare il capitale accumulato in forma di rendita e consiste nella scelta delle basi tecniche. Tuttavia tale rischio può essere trasferito dal fondo pensione a una compagnia di assicurazione tramite una convenzione e quindi non gravare più sul fondo.

Può sorgere durante la fase di accumulo un ulteriore rischio per il fondo pensione ossia quello legato al rendimento minimo garantito. Il lavoratore italiano si trova di fronte a una scelta: o lasciare il TFR in azienda o decidere di investirlo in un fondo pensione. Di conseguenza per invogliare ad aderire, il fondo può decidere di garantire almeno un rendimento minimo che superi il tasso di rivalutazione del TFR. Questo implica perciò un rischio importante legato al tasso di interesse. Il fondo deve riuscire a battere con i propri investimenti quel valore.

In alcune gestioni internazionali, largamente negli Stati Uniti e Regno Unito, i fondi a contribuzione definita promettono un determinato tasso di sostituzione alla fine del periodo di accumulazione.

Questo porta perciò ad aggravare sia il rischio di tasso di interesse in quanto si cerca di ottenere un rendimento maggiore rispetto al caso precedente e inoltre si introduce un'ulteriore fonte di variabilità data dalla previsione del livello salariale che il lavoratore avrà alla fine della sua età lavorativa. In questo caso la funzione da massimizzare non diventa più il livello di funding bensì il tasso di sostituzione.



# IL RISCHIO DI LONGEVITÀ

---

## **1 La dinamica della mortalità**

Nel mondo odierno industrializzato è in atto un cambiamento demografico molto significativo. Si osserva un'importante riduzione dell'indice del tasso di natalità e un progressivo invecchiamento della popolazione, con un'incidenza della popolazione di età più avanzata.

Secondo stime ONU questa situazione diventerà un dato omogeneo per tutto il mondo verso l'anno 2075. Nel corso dei secoli si sono evidenziati dei periodi di diminuzione della popolazione conseguenza di epidemie, carestie, uragani, guerre da un lato ma anche di periodi di aumento come quello della rivoluzione industriale, la scomparsa della peste e miglioramento della sanità e delle condizioni igieniche.

Ora ci si trova in una situazione dove il tasso di fertilità, come accennato, sta diminuendo in maniera marcata e ciò è dovuto a diverse cause:

- al passaggio, verificatosi soprattutto dopo la seconda guerra mondiale, da una famiglia patriarcale, legata al lavoro della terra, ad una famiglia nucleare (marito, moglie ed un figlio), prodotto di una società coinvolta dallo sviluppo industriale post bellico, nell'ambito del quale anche le donne lavoravano fuori casa, impegnate in vari settori, e con meno tempo da dedicare alla famiglia;
- alla tendenza della epoca post industriale alla convivenza della coppia sotto lo stesso tetto senza contrazione di matrimonio o alla vita da single;

- alle difficoltà economiche di questi tempi dovute anche alla mancanza di un'occupazione stabile, di un lavoro a tempo indeterminato che potrebbe invece favorire l'impianto di una famiglia con prole.

Negli ultimi secoli inoltre l'aspettativa di vita alla nascita è cresciuta in maniera significativa infatti quest'ultima non superava i 50 anni nel diciannovesimo secolo nei Paesi più sviluppati quali il Regno Unito, Francia e Stati Uniti d'America.

Ciò è dovuto ai miglioramenti importanti effettuati in campo medico: molti studi dimostrano come questi hanno portato a identificare cure efficaci contro le malattie che avevano una maggiore probabilità di condurre le persone al decesso (come quelle del sistema cardiocircolatorio e i tumori) e a valutare quale poteva essere definita "un'alimentazione sana", così da prevenire eventuali problemi legati, per esempio, all'obesità.

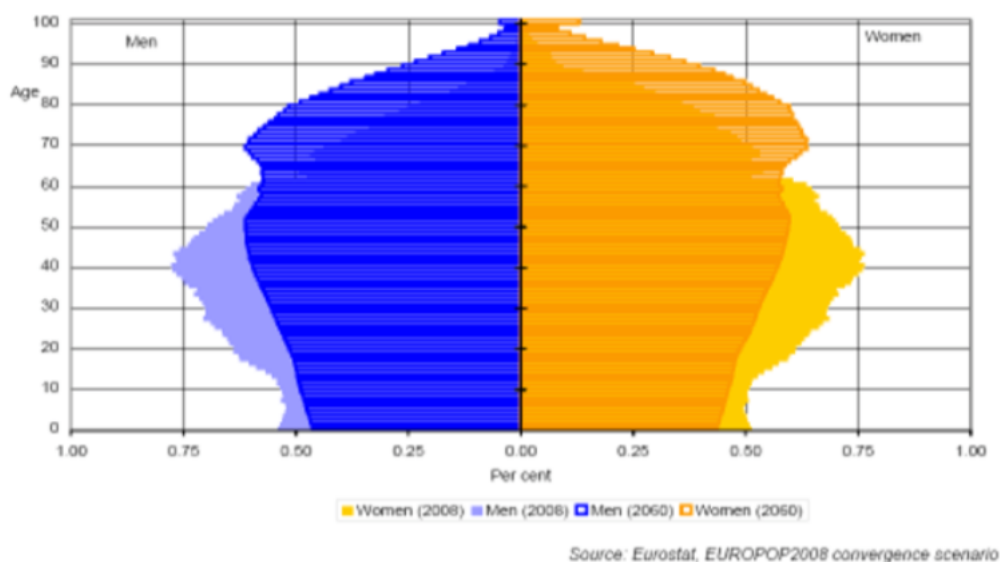
Di conseguenza, la speranza di vita è cresciuta fino a 65/70 anni intorno agli anni Sessanta, fino ad arrivare a ottant'anni all'inizio del ventunesimo secolo e, soprattutto nei paesi maggiormente sviluppati, non mostra segni di rallentamento. Da determinati studi inoltre si evince come essa nel futuro potrà arrivare anche alla soglia dei cent'anni, anche se, tuttavia, già esempi di persone ultracentenarie nella storia recente ve ne sono stati e ve ne sono tuttora.

Per quanto riguarda l'Italia, l'aspettativa media di vita è incrementata di venticinque anni a partire dalla seconda metà del diciannovesimo secolo fino all'inizio del ventunesimo: essa, infatti, nel 2014 è pari a 79,4 anni per gli uomini e 84,82 anni per le donne e, secondo stime effettuate dall'Istat, risulterà nel 2060 pari a 85,5 per i maschi e a 90,3 per le femmine. Di conseguenza, la nostra nazione è considerata una delle più longeve d'Europa e si colloca all'ottavo posto nel mondo; infatti, su un totale di 59 milioni di abitanti più di 8 milioni hanno superato i settant'anni, basandosi su dati Istat del 2011.

Tuttavia, l'incremento della speranza di vita, unito alla forte diminuzione della natalità, verificatasi nel corso dell'ultimo secolo, porta a un marcato mutamento nella struttura della popolazione. Questa sarà costituita da una quota sempre più consistente di persone anziane: le previsioni effettuate dall'Eurostat fino al 2060 indicano che nelle popolazioni dell'Unione Europea ad una significativa diminuzione sia della cosiddetta "popolazione giovanile" (persone comprese in una fascia d'età che va da 1 a 14 anni) che della

cosiddetta “popolazione attiva” (dai 15 ai 64 anni), corrisponderà, per contrasto, un grande aumento dei cittadini di età superiore ai 65 anni.

Nel seguente grafico si osserva il mutamento demografico previsto dall’Eurostat, confrontando la popolazione negli anni 2008 e 2060, si nota come la struttura della popolazione più a una botte rispetto a una piramide.



**Figura 13 - Evoluzione della piramide demografica della popolazione italiana**

Questo porta a un accrescimento negli anni del tasso di dipendenza degli anziani, il quale è un indice dato dal rapporto tra le persone componenti la popolazione “non attiva” e quelle della “popolazione attiva”. Perciò un numero sempre inferiore di lavoratori dovrà mantenere un numero sempre maggiore di persone in età pensionabile, arrivando nel 2060 in una situazione in cui vi sarà quasi un anziano da mantenere per ogni lavoratore. Infatti secondo elaborazioni effettuate dall’Eurostat, nel 2060 in Italia, tale rapporto sarà pari al 56,6%.

In particolare, secondo le previsioni dell’Istat, in Italia si verificherà il sorpasso in termini numerici della quota di popolazione over 65 nei confronti della popolazione “attiva” all’incirca nel 2030 e questo divario diventerà maggiore sempre di più negli anni successivi.

Dunque, il fatto che una persona che raggiunge l’età pensionabile a 65 anni abbia davanti a sé una aspettativa media di vita ancora di 15/20 anni ha dei risvolti negativi, in quanto

saranno necessari maggiori finanziamenti sia per quanto riguarda l'assistenza sanitaria che per quanto riguarda le pensioni.

Questo potrebbe influire negativamente sul bilancio dei fondi pensione, comportando un'insostenibilità a livello finanziario. Ed è proprio in questa sede che assume importanza il rischio di longevità e cioè il rischio che questi soggetti debbano erogare rendite a un numero di persone sempre maggiore e per un periodo di tempo che può essere superiore a quello previsto, in quanto una parte dei soggetti aderenti potrebbe vivere più a lungo del periodo inizialmente previsto.

Per poter distribuire in futuro le rendite accordate, gli erogatori dovranno accantonare, di anno in anno, le riserve sui premi versati dagli iscritti, le quali, tuttavia, potrebbero rivelarsi inadeguate rispetto alle prestazioni che si dovranno versare, in caso di errori di stima sulla vita media futura.

## **2 L'impatto del longevity risk**

Entrando maggiormente nel dettaglio si può definire il longevity risk come quel rischio che il tasso di sopravvivenza effettivo si discosti in maniera significativa rispetto a quello atteso.

Questo può essere classificato come segue:

- A livello individuale: ossia quando una persona vive più a lungo di quanto era stato previsto
- A livello globale: ovvero l'eventualità che l'intero gruppo di assicurati abbia una sopravvivenza media superiore a quella attesa

Per proteggere la propria solidità dal punto di vista patrimoniale a seguito di tale rischio un fondo pensione ha due strade.

La prima consiste nel gestire il rischio in proprio, perciò utilizzare delle tavole di mortalità proiettate in modo da determinare i valori attuariali delle rendite che verranno erogate in futuro. Questo implica che devono essere applicate delle leggi probabilistiche in modo da modellare l'incertezza sottostante l'evoluzione futura della mortalità. Tali proiezioni dei tassi di mortalità vengono infatti ottenute attraverso dei modelli stocastici.

La seconda strada invece è il trasferimento del rischio da parte del fondo a soggetti terzi e ciò può avvenire attraverso differenti modalità. Attraverso la stipulazione di una

convenzione con una compagnia di assicurazione o tramite la sottoscrizione di contratti riassicurativi. In aggiunta è possibile per il fondo procedere tramite la cosiddetta cartolarizzazione che consiste nel trasferimento del rischio ai mercati finanziari. Gli strumenti più utilizzati in questo caso sono le *Mortality – linked Securities*, come ad esempio i *longevity bond*, che si analizzeranno nei successivi paragrafi.

### **3 Le tavole demografiche**

Un fondo pensione per valutare l'entità delle riserve che dovrà accantonare e per far fronte alle prestazioni promesse ai propri iscritti dovrà fare riferimento, come si è fatto riferimento nel secondo capitolo, alle tavole demografiche.

Queste, prendendo in considerazione una specifica generazione, descrivono l'andamento del numero dei sopravvissuti dal momento della nascita fino alla morte.

Una tavola demografica, partendo da una popolazione teorica di 10000 o 100000 persone vive alla nascita, ossia l'età zero, prendendo in riferimento un sesso specifico, riporta per ogni età successiva quante persone sono rimaste in vita e quante invece sono decedute fino a quando non sono morti tutti gli elementi facenti parte della collettività iniziale.

Questa definizione vale se l'unica causa di uscita dalla tavola sia la morte. Si possono infatti creare, come osservato nel capitolo secondo, tavole con altre cause di uscita quali le dimissioni o l'invalidità/inabilità.

Questo procedimento è detto rilevamento longitudinale della mortalità e la tavola ottenuta è conosciuta come tavola di generazione (in quanto fa riferimento a un gruppo di individui nati tutti in corrispondenza della stessa epoca temporale  $t=0$ ).

Le tavole demografiche vengono compilate secondo le funzioni biometriche, le quali sono funzione dell'età  $x$  e consentono di determinare la probabilità di esistenza in vita dopo  $h$  anni o la probabilità di morte entro quell'età in un gruppo omogeneo di individui.

Nello specifico tali funzioni sono  $l_x$  e  $d_x$  dove la prima indica il numero di persone dell'insieme degli individui di partenza che hanno raggiunto l'età  $x$  con  $x$  compreso tra 0 e  $\omega$  età estrema in cui un soggetto può sopravvivere. Da cui si può trarre che  $l_0 = 10000$  e  $l_\omega = 0$ .

$\omega$  può essere collocata intorno ai 110 anni massimo 120. Di conseguenza  $l_x$  diminuisce sempre di più all'aumentare di  $x$  fino ad azzerarsi in corrispondenza di  $\omega$ .

$d_x$  indica invece il numero di persone che hanno raggiunto l'età  $x$  ma non hanno raggiunto in vita l'età  $x+1$  e quindi è dato dalla seguente differenza.  $d_x = l_x - l_{x+1}$ .

Questo termine perciò aumenta al crescere di  $x$  in quanto più si raggiungono età estreme più si incrementa il numero di persone che non sopravvivono fino all'età successiva.

Come si è visto nel capitolo 2 il rapporto tra due  $l_x$  rappresenta la probabilità di sopravvivenza di un individuo ovvero la frequenza con cui un individuo di età  $x$  può raggiungere in vita un'età  $x+n$ .

Si è inoltre visto come il rapporto tra  $d_x$  e  $l_x$  restituisca la probabilità di morte  $q_x$  che viene definita anche come tasso annuo di mortalità. Si può quindi concludere che una tavola demografica è costruita sulla base della seguente relazione ricorsiva (solo se l'unica causa di uscita dalla collettività è la morte):

$$l_{x+1} = l_x \cdot (1 - q_x)$$

Si possono costruire tavole demografiche che prendono in considerazione orizzonti pluriannuali; è il caso della speranza di vita, che esprime il numero medio di anni che si prevede che un individuo di età  $x$  sopravviva ancora, e la vita probabile, ossia il numero di anni che una persona di età  $x$  può vivere con incertezza e con probabilità pari a  $\frac{1}{2}$ .

Le tavole demografiche possono essere distinte, a seconda delle caratteristiche che presentano, in tavole di popolazione e in tavole di mercato.

Le prime vengono redatte sulla base di informazioni riguardanti l'intera popolazione di un Paese. Nel caso Italia queste vengono redatte con una cadenza decennale dall'Istituto Centrale di Statistica, vengono distinte per sesso e di norma vengono denominate SIM e SIF le quali rispettivamente significano "statistica di mortalità della popolazione maschile" e "statistica di mortalità della popolazione femminile".

Le seconde vengono ricavate utilizzando dei dati attinenti le osservazioni relative agli assicurati presso una Compagnia di assicurazione o, come nel caso in oggetto, gli iscritti a un fondo pensione. Tra queste troviamo ad esempio la IPS55 e la A62, basate sulla mortalità per le persone iscritte della generazione 1955 e 1962.

Nelle tavole demografiche riguardanti la sopravvivenza si possono notare delle caratteristiche ben definite circa il tasso di mortalità qui di seguito elencate:

- La mortalità infantile (ovvero i primi anni di vita), dove vi è un repentino aumento della probabilità di morte.
- Il periodo della gobba accidentale, nel quale le morti sono dovute fondamentalmente a eventi accidentali, come gli incidenti automobilistici o sul lavoro.
- Il periodo della mortalità senile, in corrispondenza del quale la probabilità di morte cresce tanto più si avvanza con l'età.

Alla base, però, dei modelli che si utilizzano per le proiezioni dei tassi di sopravvivenza non può esservi un'ipotesi statica di mortalità sia a causa dell'allungamento della vita verificatosi nel corso dell'ultimo secolo sia a causa dell'incertezza riguardante l'evoluzione futura della mortalità.

Non si può infatti avere la sicurezza a priori dell'entità, per esempio, di quelli che saranno i miglioramenti in campo medico o del cambiamento delle abitudini alimentari e degli stili di vita degli individui nei prossimi anni, o decenni.

In questo contesto tali previsioni non potranno essere fatte sulla base delle formule sopra riportate. Il fondo pensione dovrà perciò ricorrere, come sopra citato, all'utilizzo di tavole proiettate per stimare i futuri trend di sopravvivenza.

#### **4 La scelta del modello di stima**

Ogni modello stocastico, per essere considerato attendibile relativamente alla rappresentazione dell'evoluzione futura, deve soddisfare opportuni requisiti. Le linee guida da seguire, che sono state proposte da Cairns, Blake e Down in numerosi articoli da loro pubblicati dal 2006 al 2008, sono le seguenti:

- I tassi di mortalità devono essere positivi
- Il modello deve essere consistente rispetto ai dati storici e le dinamiche di lungo periodo devono essere biologicamente ragionevoli. Si è dimostrato che il tasso di mortalità aumenta con l'avanzare dell'età e, di conseguenza, costruire una tavola di mortalità in cui i tassi di mortalità diminuiscono potrebbe essere considerato irragionevole. Va sottolineato comunque che in alcune popolazioni per età molto avanzate (oltre i 100 anni) la probabilità di morte può avere diversi andamenti. In letteratura non c'è un consenso unanime riguardo al fatto che i rischi individuali di

morte per queste età possano crescere a ritmi costanti, ritmi accelerati, oppure rallentino. E' importante perciò porre attenzione sulle diverse dinamiche demografiche che influenzano le varie popolazioni.

- E' necessaria la robustezza delle stime dei parametri e delle previsioni: quando si definisce un modello va specificato qual è il range di anni di calendario e la serie di età da usare per stimare i parametri. In molti modelli si riscontra che un cambio della gamma di anni o di età considerati comporta una modifica relativamente modesta delle stime dei parametri, in linea con la variazione storica dei dati. Questi modelli possono essere definiti "robusti". Per quelli in cui tale caratteristica non è soddisfatta, non devono essere utilizzati in quanto non conducono a previsioni consistenti.
- I livelli di previsione dell'incertezza e le traiettorie centrali devono essere plausibili e consistenti con i trend e la variabilità storica, in relazione ai dati a disposizione sulla mortalità.
- Il modello dovrebbe essere semplice da attuare mediante metodi analitici o veloci algoritmi numerici.
- Il modello deve essere parsimonioso. Ciò implica che è opportuno evitare modelli eccessivamente parametrizzati. Questo problema può essere risolto utilizzando vari criteri, fra i quali i più utilizzati sono il Bayesian Information Criterion (BIC) o lo Schwarz Information Criterion (SIC). Questi infatti sono utili in quanto assegnano un "costo" legato all'introduzione di un nuovo parametro addizionale.
- Il modello deve consentire di ottenere, oltre alle stime puntuali di tassi di mortalità, anche delle stime intervallari di questi ultimi (intervalli di confidenza) in quanto esso si basa su leggi probabilistiche.
- Per alcuni Paesi, il modello dovrebbe incorporare un effetto stocastico di coorte. Cairns et al (2007) hanno dimostrato che per alcuni Paesi i tassi di mortalità sembrano essere determinati non solo dall'età o dagli effetti di periodo, ma anche dagli effetti riferiti all'anno di nascita. L'introduzione di questo *cohort effect* comporta un significativo miglioramento statistico dell'adattamento ai dati. Si suppone inoltre che questi effetti persisteranno nel futuro e le previsioni potranno essere migliorate.



In ogni caso è opportuno far notare che, anche se si verificassero tutte queste condizioni, rimarrà sempre una componente di incertezza nelle previsioni. Non vi è alcuna sicurezza su quale sia un modello “realmente esatto” e non si può sapere a priori se, in un’epoca temporale futura, vi saranno variazioni accidentali o meno che potrebbero portare a differenze significative tra i tassi di mortalità ipotizzati e quelli effettivamente osservati

## **5 I modelli di previsione della mortalità**

In questo paragrafo si dà una rappresentazione dei modelli di tipo stocastico in grado di effettuare una buona proiezione della mortalità.

Nella letteratura sono presenti due tipologie di modelli. Le prime prendono il nome di modelli estrapolativi ossia si pongono l’obiettivo di interpolare dei trend di mortalità osservati in passato sotto l’ipotesi che questi si ripetano nel futuro: l’obiettivo diviene quello di estrapolare il trend senza prendere in considerazione la natura stocastica della mortalità. Perciò sono stati sviluppati modelli cosiddetti stocastici. Questi ipotizzano che i tassi di mortalità osservati sono estrazioni di variabili casuali che rappresentano la mortalità passata e che i tassi proiettati siano stime di variabili casuali che rappresentano la mortalità futura.

Conseguenza di ciò è che i modelli stocastici offrono sia stime puntuali che intervalli di confidenza dei futuri tassi di mortalità.

Mentre i modelli estrapolativi si basano su leggi di mortalità i secondi sono dei modelli distribution – free dove il tasso centrale di mortalità è modellizzato come un processo stocastico.

In questa sede l’attenzione si focalizzerà sui modelli a tempo discreto quali: Il modello Lee – Carter con una sua estensione proposta da Brouhns, Denuit e Vermunt, il modello di Renshaw – Haberman, un modello di Cairns – Blake – Dowd ed infine il modello proposto da Plat.

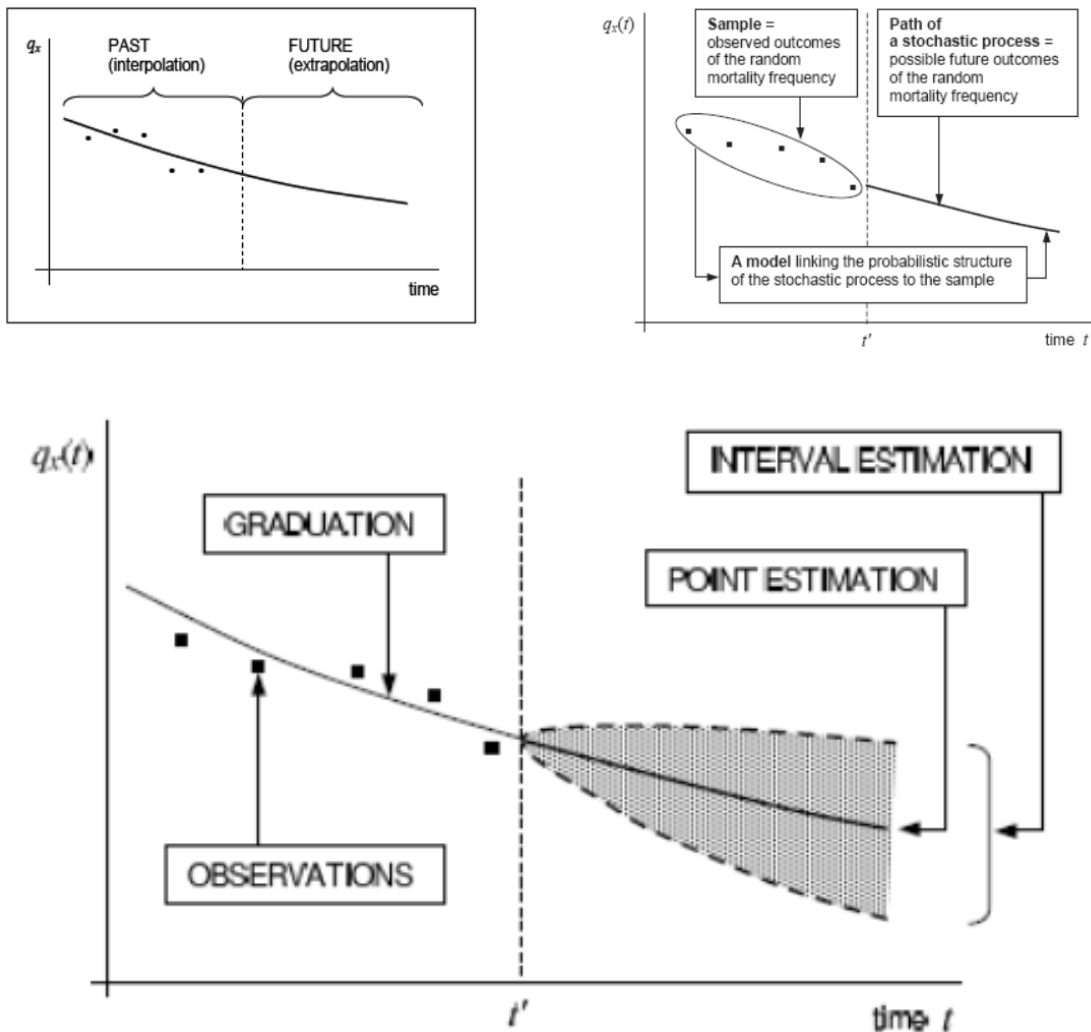


Figura 14 - differenza tra una stima puntuale e una intervallare

## 5.1 Il modello di Lee – Carter

Il modello di Lee - Carter rappresenta una base per gli studi stocastici della mortalità infatti è stato la base da cui partire per sviluppare numerose generalizzazioni per superarne i limiti.

Lee-Carter permette, oltre a una semplice maneggevolezza dei dati, di rappresentare in maniera efficace i miglioramenti nel trend della mortalità. Per il suo meccanismo di generazione dei parametri, anno per anno, cattura in modo ottimale la variazione del trend della mortalità, infatti i nuovi dati modificano la descrizione del fenomeno e di conseguenza evidenziano i cambiamenti di questo trend.

Presentato nel 1992 e pubblicato sul “Journal of the American Statistical Association”, ha come caratteristica fondamentale quella di essere semplice dal punto di vista applicativo e allo stesso tempo avere una capacità di descrizione del fenomeno molto accurata.

Tale metodo è puramente estrapolativo nel senso che non ingloba in alcun modo informazioni comportamentali, sociali o mediche, ma tutte le previsioni sono basate su come il fenomeno si è evoluto in passato. Appartiene di conseguenza a quella categoria di modelli nei quali la mortalità è espressa in funzione del tempo  $t$  e dell'età  $x$ .

Il punto di partenza è la matrice dei tassi centrali di mortalità  $m_x(t)$  con gli anni  $t$  posti sulle colonne e l'età  $x$  collocate sulle righe.

Il tasso centrale di mortalità è una probabilità di decesso centrale, cioè calcolata alla metà del periodo preso in considerazione, ed è dato dal rapporto tra il numero di morti e il numero medio di individui che fanno parte della popolazione. In formule:

$$m_x(t) = \frac{D_x(t)}{E_x(t)}$$

Dove  $D_x(t)$  è il numero di decessi all'età  $x$  in corrispondenza dell'anno  $t$  ed  $E_x(t)$  è il numero di persone esposte al rischio, ottenute come media del numero di persone che hanno vissuto durante l'anno  $t$ , per una determinata età  $x$ .

In aggiunta, come è uso nella letteratura attuariale, si assume che i tassi di mortalità specifici per un'età sono costanti entro fasce di età, permettendo di variare tra le diverse fasce. In particolare si suppone che:

$$m_{x+k}(t) = m_x(t), \quad \text{for } 0 < k < 1$$

Questo è in contrapposizione a  $q_x(t)$  che è la probabilità di decesso all'inizio del periodo (in questo caso il rapporto è tra decessi e numero di persone all'inizio del periodo).

Le previsioni dei tassi centrali di mortalità vengono ricavate ipotizzando un andamento esponenziale per ogni età  $x$ , quindi, il tasso di mortalità  $q_x(t)$  per ogni specifica età in corrispondenza delle varie epoche temporali  $t$  può essere ricavato scegliendo la seguente relazione che lega i tassi di decesso ai tassi di decesso centrali.

$$q_x(t) = 1 - e^{-m_x(t)}$$

Tali relazioni valgono se sono soddisfatte due assunzioni importanti:

- l'intensità di mortalità rimane costante per ogni anno di età e per ogni anno di calendario
- la popolazione è stazionaria ossia la sua numerosità rimane costante col passare del tempo a tutte le età

Infine gli esposti al rischio di mortalità sono ottenibili come una funzione di  $q_x(t)$  e del numero di individui di età  $x$  in vita all'inizio dell'anno  $t$ , denominati  $L_x(t)$

$$E_x(t) = \frac{-L_x(t) \cdot q_x(t)}{\ln(1 + q_x(t))}$$

Come si è visto il modello ipotizza un andamento esponenziale del tasso centrale di mortalità per ogni età  $x$ , ovvero l'assunzione di base è che la vita attesa per un soggetto di età  $x$  cresce nel tempo ma la velocità alla quale ciò avviene tende a ridursi.

Nella sua versione originale il modello è caratterizzato dalla seguente relazione:

$$m_x(t) = \exp(a_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t}) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(m_x(t)) = a_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t}$$

dove:

- $\epsilon_{x,t}$  è la componente accidentale che rappresenta la parte di mortalità che non è catturata dal modello. È assimilabile ad un processo *White Noise* il quale non è che un insieme di variabili normali indipendenti e identicamente distribuite con media nulla e varianza costante.
- $a_x$  è una media semplice di  $\ln(m_x(t))$  lungo l'intero periodo di osservazione e descrive il comportamento in media del tasso centrale di mortalità per ogni età  $x$ .
- $k_t$  è un indice di mortalità nel tempo e rappresenta, per tutte le età congiuntamente, come si è evoluta la mortalità nel passato.
- $\beta_t$  è un parametro di sensitività. Per ogni età spiega come  $\ln(m_x(t))$  reagisce al passare del tempo. Tale parametro sintetizza l'ampiezza del tasso di mortalità che si riduce con l'avanzare dell'età.

I parametri del modello non possono essere stimati con i metodi di regressione ordinari in quanto non compaiono alla destra dell'equazione delle variabili indipendenti, osservabili direttamente, ma solo parametri da stimare e l'ignoto indice  $k_t$ .

La stima viene perciò effettuata mediante il metodo SVD (*Singular Value Decomposition*) con l'ulteriore assunzione di omoschedasticità per quanto riguarda gli errori. La prima stima che viene cercata è quella del parametro  $a_x$  per ogni età  $x$ . A tale scopo si impone la normalizzazione del parametro  $k_t$  in maniera tale che

$$\sum_t k_t = 0$$

da cui si ottiene

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_x(t)) = n \cdot a_x + \beta_t \sum_{t=t_1}^{t_n} k_t + \sum_{t=t_1}^{t_n} \epsilon_{x,t}$$

Se  $\epsilon_{x,t}$  è 0 in media si può scrivere la seguente relazione come:

$$\widehat{a}_x = \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_x(t))}{n} = \ln \left[ \left( \prod_{t=t_1}^{t_n} m_x(t) \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

Si osserva perciò che  $a_x$  può essere stimato come la media geometrica del logaritmo dei tassi centrali di mortalità che possono essere ricavati dalle tavole di sopravvivenza.

Si suppone inoltre che

$$\sum_x \beta_x = 1$$

e di conseguenza

$$\sum_{x=0}^{\omega} \ln(m_x(t)) = \sum_{x=0}^{\omega} a_x + k_t \sum_{x=0}^{\omega} \beta_x + \sum_{x=0}^{\omega} \epsilon_{x,t}$$

Trascurando l'addendo somma degli errori l'indice  $k_t$  può approssimarsi come somma della media dei logaritmi dei tassi centrali di mortalità registrati in tutto il periodo di osservazione. In formule:

$$\widehat{k}_t = \sum_{x=0}^{\omega} \ln(m_x(t)) - \sum_{x=0}^{\omega} a_x$$

Per quanto concerne  $b_x$  questo può essere stimato regredendo  $\ln(m_x(t)) - a_x$  su  $k_t$ ; il risultato che si ottiene è di conseguenza:

$$\widehat{\beta}_x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} k_t (\ln(m_x(t)) - a_x)}{\sum_{x=0}^{\omega} k_t^2}$$

Il modello può perciò essere espresso come:

$$\widehat{m}_x(t) = \exp(\widehat{a}_x + \widehat{\beta}_x \widehat{k}_t)$$

Stimati i parametri si pone ora il problema di previsione dei valori futuri. Il modello assume la costanza di  $a_x$  e  $\beta_x$  che vengono ipotizzati indipendenti dal tempo. Di conseguenza sarà necessario proiettare solo  $k_t$ .

Quest'ultimo viene modellizzato tramite un processo stocastico, attraverso una procedura *Box-Jenkins* che serve per determinare un appropriato ARIMA(p,d,q), ossia un processo autoregressivo integrato a media mobile che ben si adatti alla rappresentazione dell'evoluzione dell'indice nel tempo. E' un'estensione proposta da *Box-Jenkins* dei processi ARMA volta a considerare anche processi non stazionari che però possono essere resi tali attraverso opportune differenziazioni. Il parametro p indica l'ordine della componente autoregressiva, d indica il numero di differenziazioni effettuate per rendere il processo stazionario e q è l'ordine della componente a media mobile.

Dagli studi di Haberman e Russolillo (2005) è emerso che i modelli che sono più appropriati per descrivere l'evoluzione temporale di  $k_t$  sono un ARIMA (0,1,0) per gli uomini e un modello ARIMA (0,1,1) per le donne. Focalizzandosi sul primo si osserva come  $k_t$  sia un modello *random walk* con termine di drift:

$$k_t = k_{t-1} - c + \epsilon_t$$

dove  $k_t$  è l'indice al tempo t, c è il rapporto tra il decremento globale di  $k_t$  e il numero di periodi in cui il decremento si è realizzato, mentre  $\epsilon_t$  è il termine di errore al tempo t.

Per quanto riguarda l'intervallo di confidenza si definisce lo *standard error* associato ad s periodi di previsione come segue:

$$\sigma_h = \sigma_1 \sqrt{h} \quad \text{con } 2 \leq h \leq s \text{ e } h \in N$$

Dove  $\sigma_1$  è lo *standard error* della stima che indica l'incertezza associata ad un anno di previsione.

Si evidenzia come all'aumentare dell'orizzonte temporale di previsione la deviazione standard cresce in ragione della radice quadrata dell'orizzonte medesimo e quindi meno che proporzionalmente.

Avendo in questo modo proiettato  $k_t$  e sulla base della costanza di  $a_x$  e  $\beta_x$  si può ottenere dalla relazione caratteristica gli  $m_x(t)$  per ogni età  $x$  e per ogni epoca  $t$ . Infine dagli  $m_x(t)$  si può risalire alle  $q_x(t)$  e dunque alla tabulazione di intere tavole di mortalità.

## 5.2 Il modello di Poisson log-bilineare (Brounhs, Denuit e Vermunt)

Il modello Lee Carter assume che gli errori siano omoschedastici, ossia che abbiano varianza costante nel tempo. Questa assunzione, che deriva dal metodo dei minimi quadrati ordinari usati per la stima, sembra essere poco realistica, in quanto il logaritmo dell'intensità di mortalità osservata è più variabile alle età anziane che non a quelle giovani, essendo rimasti in vita un numero di persone inferiore rispetto a quello di partenza della coorte.

Nel 2002, Brounhs, Denuit e Vermunt propongono una modifica del modello di Lee – Carter. Pensando il numero di decessi come un processo casuale strettamente crescente, questi ipotizzano che una distribuzione di Poisson sia più plausibile come assunzione. In ordine perciò di sopperire i problemi associati al metodo dei Minimi Quadrati Ordinari, la metodologia, proposta dagli autori, assume che la distribuzione casuale dei decessi sia per ogni età ed anno di calendario una distribuzione di Poisson così descritta:

$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(E_x(t) \cdot m_x(t))$$

dove  $E_x(t)$  è, come già detto, il numero medio di esposti al rischio.

In un tale modello si suppone un'intensità di mortalità con una forma log – bilineare, simile a quella del modello di Lee – Carter, come espresso nella formula seguente:

$$\ln(m_x(t)) = a_x + \beta_x^1 k_t^1$$

Come si evince è la stessa struttura del modello di Lee – Carter dove il significato dei parametri  $a_x$ ,  $\beta_x^1$ ,  $k_t^1$  rimane lo stesso, infatti i parametri sono sottoposti ai medesimi vincoli del modello di Lee –Carter.

Anziché far ricorso al metodo dei Minimi Quadrati, questi parametri possono essere stimati attraverso la massimizzazione della funzione di massima logVerosimiglianza data dalla seguente equazione:

$$L(a, \beta, k) = \sum_x \sum_t D_x(t) \cdot (a_x + \beta_x^1 k_t^1) - E_x(t) \cdot \exp(a_x + \beta_x^1 k_t^1) + cost$$

Le iterazioni per stimare i modelli log-lineari con termini bilineari sono ottenute aggiornando il set di parametri  $\hat{\eta}$  (sotto i vincoli posti in precedenza) fissando gli altri parametri dei loro valori stimati, seguendo la seguente regola:

$$\hat{\eta}^{(v+1)} = \hat{\eta}^{(v)} - \frac{\partial L^{(v)} / \partial \eta}{\partial^2 L^{(v)} / \partial \eta^2}$$

Dove  $L^{(v)} = L(\hat{\eta}^{(v)})$ .

Il criterio per terminare la procedura si ha quando si è in presenza di un incremento molto piccolo della funzione di massima verosimiglianza.

Infine per il termine  $k_t^1$  viene ancora una volta proposta una metodologia legata ai processi ARIMA.

### 5.3 Il modello di Renshaw e Haberman

Il modello di Renshaw Haberman rappresenta una generalizzazione di quello di Lee – Carter ed è stato sviluppato con l'obiettivo di non considerare solo gli effetti di età e anno di calendario nella proiezioni dei tassi di mortalità, ma anche un'ulteriore componente denominata effetto coorte. Gli autori hanno studiato i possibili cambiamenti dell'estendere il modello di BDV tenendo conto di questo effetto attraverso l'ultimo termine dell'equazione seguente denominato  $\gamma_{t-x}$ .

$$\ln(m_x(t)) = a_x + \beta_x^1 k_t^1 + \theta_x \gamma_{t-x}$$

Dove  $k_t^1$  è l'effetto casuale di periodo e  $\gamma_{t-x}$  è l'effetto casuale della coorte.



Come il modello di Lee – Carter anche questo soffre di problemi di identificazione dei parametri così due nuovi vincoli ulteriori sono stati imposti:

$$\sum_x \beta_x^1 = 1$$

$$\sum_x k_t^1 = 0$$

$$\sum_{x,t} \gamma_{t-x} = 0$$

$$\sum_x \theta_x = 1$$

Ultimamente Renshaw e Haberman hanno proposto vincoli alternativi per  $k_t^1$  e  $\beta_x^1$  in modo tale da raggiungere un maggior fitting del modello che sono:

$$k_t^1 = 0$$

$$\beta_x^1 > 0$$

Il primo serve a implementare la procedura di fitting del modello, il secondo invece assicura il segno consistente dell'indice di periodo, eliminando un effetto arbitrario sul totale dei tassi di mortalità.

Gli autori suggeriscono l'utilizzo di un algoritmo iterativo simile a quello proposto da BDV per la stima dei parametri, tuttavia analisi più approfondite hanno dimostrato una convergenza lenta delle stime di massima verosimiglianza. Questo potrebbe condurre a una mancanza di robustezza del modello, portando ad ottenere un set di parametri diversi per scelte differenti di range di età. Infine, è stato sviluppato un metodo Bootstrap per stimare anche la variabilità.

#### **5.4 Il modello di Cairns – Blake – Dowd.**

Cairns, Blake e Dowd proposero numerosi metodi per il calcolo della mortalità. Il lavoro iniziale è stato esteso nel 2007, al fine di considerare l'effetto coorte. Due fattori stocastici riguardano il modello di seguito analizzato.

Il primo tratta nello stesso modo il tasso di mortalità a tutte le età, mentre il secondo descrive un effetto sul tasso proporzionale all'età. L'evidenza empirica mostra che entrambi questi fattori sono necessari per raggiungere un fitting empirico soddisfacente per l'evoluzione della mortalità, ossia per modellare adeguatamente i trend storici del tasso di mortalità a diverse età.

Il modello si basa su una funzione logistica della probabilità di morte  $q_x(t)$ , assumendo una relazione lineare in  $x$  per un fissato  $t$ , come segue:

$$\text{logit } q_x(t) = \ln\left(\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}[(x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2] + \gamma_{t-x}$$

Dove:

- $k_t^{(1)}, k_t^{(2)}$  sono processi stocastici in particolare random walk bivariate con drift,
- $k_t^{(3)}$  è una componente aggiuntiva di periodo
- $\bar{x} = (x_n - x_1 + 1)^{-1} \sum_{x=x_1}^{x_n} x$  è la media in un range di età di riferimento ed
- $\sigma_x^2 = (x_n - x_1 + 1)^{-1} \sum_{x=x_1}^{x_n} (x - \bar{x})^2$  è la varianza.

La riduzione nel tempo dei tassi di mortalità a tutte le età è catturata dall'intercetta  $k_t^{(1)}$ , mentre  $k_t^{(2)}$  è la pendenza con un trend crescente al fine di considerare incrementi della mortalità più grandi per età più piccole. Rispetto al modello originale, questa versione estesa include l'effetto dell'età attraverso il coefficiente di curvatura  $k_t^{(3)}[(x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2]$  e l'effetto coorte  $\gamma_{t-x}$ , ossia una funzione dell'anno di nascita  $t - x$  con fluttuazioni intorno allo 0.

Anche questo modello richiede alcuni vincoli di identificabilità per eliminare scelte arbitrarie dei parametri. In particolare si assume che

$$\sum_{c=c_0}^{c_1} \gamma_c = 0$$

$$\sum_{c=c_0}^{c_1} c\gamma_c = 0$$

$$\sum_{c=c_0}^{c_1} c^2 \gamma_c = 0$$

Dove  $c_0$  e  $c_1$  sono anni di nascita iniziali e finali scelti per fittare l'effetto coorte,  $c$  invece è uguale a  $t - x$ .

La presenza di due fattori permette di introdurre una correlazione imperfetta dei cambiamenti nei tassi di mortalità che spesso l'evidenza empirica conferma. Il modello originale di Lee Carter assume invece una correlazione piena, usando soltanto un singolo fattore.

### 5.5 Il modello di Plat

Al fine di migliorare i modelli esistenti rimuovendo ogni lato negativo, Plat propone un nuovo modello della mortalità stocastico definito come segue:

$$\ln(m_x(t)) = a_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(\bar{x} - x) + k_t^{(3)}(\bar{x} - x)^+ + \gamma_{t-x}$$

Il parametro  $a_x$  è l'equivalente del primo termine di Lee Carter, modellando l'andamento della mortalità al variare dell'età. I fattori  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$  e  $k_t^{(3)}$  descrivono gli effetti dei cambiamenti della mortalità a seconda dell'anno di calendario, rispettivamente per l'età, per differenti classi di età e per le dinamiche delle età più giovani che può essere rimosso per analisi di età anziane. Infine l'effetto coorte è modellato attraverso  $\gamma_{t-x}$ , come un processo di *mean reversion* senza trend, mentre si assume un processo mean reverting stazionario per i fattori  $k_t^{(2)}$  e  $k_t^{(3)}$ .

Il punto di partenza per la parametrizzazione del modello si basa sui seguenti vincoli, simili al modello precedente:

$$\sum_{c=c_0}^{c_1} \gamma_c = 0$$

$$\sum_{c=c_0}^{c_1} c \gamma_c = 0$$

$$\sum_t k_t^{(3)} = 0$$

Dove  $c_0$  e  $c_1$  sono gli anni di nascita iniziali e finali usati per fittare l'effetto coorte e  $c$  è uguale a  $t - x$ . I primi due vincoli permettono al processo  $\gamma_{t-x}$  di considerare solo l'effetto coorte senza realizzare una compensazione per gli effetti legati all'età e all'anno di calendario, mentre l'ultimo ha la funzione di normalizzare i fattori.

Come nei modelli precedenti si assume che il numero delle morti sia descritto da una distribuzione di Poisson, permettendo così di stimare  $a_x, k_t^{(1)}, k_t^{(2)}, k_t^{(3)}$  e  $\gamma_{t-x}$  attraverso un algoritmo iterativo che massimizza la funzione di logVerosimiglianza.

## **6 Gestione del longevity risk**

Il rischio di longevità è stato riconosciuto come una delle peggiori minacce per i gestori di un fondo pensione, infatti in Delong et al. (2008) si è concluso che i fondi pensione con un maggiore rischio di longevità sono soggetti a un più alto rischio che deve essere assolutamente trattato.

Tale argomento ha portato a numerose trattazioni da parte di molti accademici e operatori del settore che hanno condotto a diverse soluzioni di risk management che prendono in considerazione o piani particolari di gestione del fondo o l'utilizzo di strumenti derivati.

A seguito della natura sistematica del rischio aggregato di longevità le forme riassicurative tradizionali, basate su effetti pooling, non sono efficaci.

In caso di una riassicurazione Stop – Loss il contratto prevede che siano a carico del riassicuratore i pagamenti in eccesso rispetto a una data soglia, detta priorità, calcolata di norma in funzione di una percentuale dei contributi incassati su base collettiva. Di conseguenza utili o perdite di lieve entità verranno conservate dall'assicuratore mentre perdite di grandi entità verranno parzialmente coperte dal riassicuratore. Questa tipologia contrattuale porta a un requisito di capitale (per ulteriori approfondimenti si guardi Cummins e Trainar (2008)) che tende a zero all'aumentare delle polizze sottoscritte.

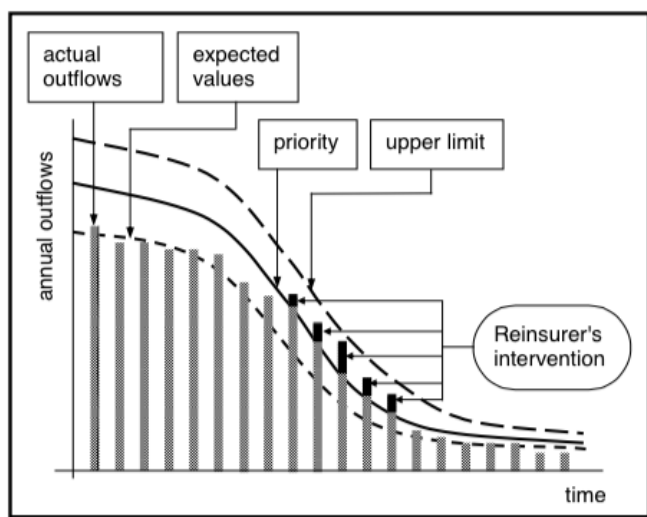


Figura 15 - Esempio di un possibile trattato di riassicurazione

Tuttavia in alcuni casi ciò non è corretto. Il modello di riassicurazione tradizionale infatti inizia ad avere notevoli problemi nel momento in cui i rischi all'interno del portafoglio del riassicuratore, come quello di longevità, sono correlati e fortemente asimmetrici, portando ad un notevole aumento del rischio a carico del riassicuratore e del relativo capitale da detenere. Sotto queste condizioni, il prezzo della copertura potrebbe essere troppo alto e divenire quasi proibitivo, portando ad una diminuzione della richiesta di riassicurazione.

Sono state perciò sviluppate nuove tecniche di trasferimento del rischio. Questa nuova gamma di prodotti comprende i contratti di assicurazione strutturati di tipo pluriennale o *multi – line*, utilizzati per cartolarizzare (o, utilizzando il termine inglese, “*securitize*”) i rischi assicurabili e catturare gli investitori del mercato dei capitali come una risorsa addizionale per aumentare la capacità sottoscrittiva.

La *securitization* infatti può aiutare a risolvere le inefficienze del mercato riassicurativo in diverse maniere.

Innanzitutto i rischi che sono correlati all'interno del mercato riassicurativo potrebbero essere incorrelati con altri rischi nell'economia: ad esempio il rischio di longevità che è collegato come si è visto dalla matrice della Formula Standard ad altri rischi, è ampiamente incorrelato con il mercato dei titoli finanziari. Passando direttamente questi rischi al mercato, si potrebbe rendere questi contratti più attraenti per gli investitori, in

quanto si riuscirebbe a trasferire e diversificare il rischio ad un costo minore della riassicurazione.

In aggiunta, comparato al volume totale di titoli scambiati nel mercato, il capitale proprio delle imprese di riassicurazione è molto ridotto e di conseguenza è più efficiente trasferire i rischi direttamente al mercato che, se propriamente strutturato, è in grado di ridurre o eliminare il rischio di credito implicito nelle polizze di riassicurazione.

Su questa linea si sono sviluppate le forme riassicurative di secondo livello di cui un classico esempio sono i longevity swap.

Uno swap è un contratto attraverso il quale due parti si accordano di scambiare uno o più futuri flussi di cassa dove almeno uno di questi è incerto. Un Survivor Swap può perciò essere definito come uno swap dove almeno un pagamento dipende dalla incertezza della mortalità.

Nel caso più elementare un Longevity Swap prevede lo scambio tra un pagamento sicuro a una data con un pagamento dipendente dalla mortalità incerta. Più precisamente si suppone che al tempo 0 un soggetto, che può essere una compagnia di riassicurazione, firmi un contratto per scambiare un valore al tempo presente  $K(t)$ , che può essere il valore attuale atteso delle rendite data una determinata base tecnica, per un ammontare casuale  $S(t)$  a un tempo futuro  $t$ .  $K(t)$  può essere perciò interpretato come una cedola e per contenere il rischio di credito è sensato per le due parti specificare che viene scambiata solo la differenza netta tra i due ammontari.

L'impresa A paga un'impresa B un ammontare  $K(t) - S(t)$  nel momento in cui  $K(t) \geq S(t)$  mentre B paga A un ammontare pari a  $S(t) - K(t)$  nel caso opposto, tenendo in considerazione che  $S(t)$  indica quante persone, partendo da una specifica numerosità iniziale al tempo 0, sono effettivamente sopravvissuti al tempo  $t$ .

Di conseguenza questo mostra che se l'ammontare dei benefici è superiore all'importo di riferimento, il fondo pensione contabilizza una perdita e il riassicuratore paga la differenza al fondo; viceversa se viene contabilizzato un guadagno da parte del fondo questo paga la differenza al riassicuratore.

In conclusione per il fondo pensione si è passati da flussi aleatori a flussi certi con una copertura quasi totale con una riduzione drastica del rischio.

Questi contratti non hanno trovato tuttavia molta applicazione nella realtà in quanto definiti molto onerosi per entrambe le parti soprattutto in termini di tariffazione per il fondo pensione.

Hanno preso maggior piede, seppure con limiti che si osserveranno nel seguito, i cosiddetti Longevity Bond o Survivor Bond.

## 6.1 I Longevity Bond

I longevity Bond sono strumenti derivati legati alla mortalità, negoziati su mercati organizzati. Comparati ad altri strumenti dello stesso tipo (chiamati *mortality – linked securities*) permettono una copertura specifica che non aumenta il rischio di credito. Infatti il rischio di credito è gestito da scambi che avvengono tra i trader e i margini che vengono a loro richiesti.

Diverse alternative di longevity bond sono state proposte in letteratura. In questa sezione si consideri un derivato con le seguenti caratteristiche:

- L'obbligazione viene emessa per coprire il rischio di longevità di rendite di un portafoglio, erogate in via anticipata
- L'obbligazione eroga delle cedole proporzionali al numero di sopravvissuti di una coorte data. I pagamenti della cedola sono perciò dipendenti dalla mortalità. Se i membri della coorte vivono più a lungo di quanto si aspetta, il pagamento ulteriore viene compensato con il pagamento della cedola dell'obbligazione
- L'obbligazione garantisce il rimborso principale

Seguendo l'approccio di Lin e Cox (2005) si considera un longevity bond con cedole basate sulla differenza tra i sopravvissuti effettivi e quelli attesi di una specifica generazione.

Per definire i flussi di cassa del contratto si consideri un fondo pensione che deve pagare immediatamente delle rendite a una coorte di  $l_{x_0}$  individui con età  $x_0$  al tempo iniziale. Sia  $R$  la rata di pensione annuale di un percettore di rendita e che  $l_{x_0+t}$  il numero di sopravvissuti all'età  $x_0 + t$  per  $t$  che assume valori  $1, 2, \dots, \omega - x_0$ .

Segue che il fondo pensione pagherà un ammontare pari a  $R \cdot l_{x_0+t}$  dove, come si è avuto modo di vedere, è un valore non noto all'età  $x_0$ . Infine si definisce  $\overline{l_{x_0+t}}$  il valore atteso dei sopravvissuti in  $x_0 + t$ . Le differenze tra  $\overline{l_{x_0+t}}$  ed  $l_{x_0+t}$  rappresentano le perdite che sostiene il fondo pensione per ogni anno  $t$ .

Tali perdite possono essere coperte attraverso la cartolarizzazione. Ipotizzando l'esistenza di un'obbligazione con cedola governativa con scadenza T che paghi  $R \cdot C_t$ , flussi di cassa aggregati, per ogni anno t e che paghi a scadenza  $R \cdot F$ . Mediante una Special Purpose Company (SPC) le cedole possono essere divise tra il fondo pensione e gli investitori in due strumenti finanziari dipendenti sulla realizzazione effettiva della mortalità per ogni istante futuro. In formule si ha:

$$R \cdot C_t = R \cdot (B_t + D_t)$$

dove  $R \cdot B_t$  rappresenta il guadagno ricevuto dal fondo pensione per coprire la perdita fino a un livello massimo di  $R \cdot C_t$ , mentre  $R \cdot D_t$  sono i pagamenti ricevuti dagli investitori.

Di conseguenza se si considera un'obbligazione con cedole costanti  $R \cdot C$  i pagamenti che il fondo può ricevere sono  $R \cdot B_t$  dove  $B_t$  è uguale a:

$$B_t = \begin{cases} C & \text{se } l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} > C \\ l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} & \text{se } 0 < l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} \leq C \\ 0 & \text{se } l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} \leq 0 \end{cases}$$

mentre i pagamenti per gli investitori sono determinati in funzione di  $D_t$  che è uguale a:

$$D_t = \begin{cases} 0 & \text{se } l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} > C \\ l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} & \text{se } 0 < l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} \leq C \\ C & \text{se } l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}} \leq 0 \end{cases}$$

Il pagamento del fondo al tempo 0 è in funzione di  $l_{x_0+t}$  mentre i contributi che verranno versati da ogni membro della generazione dipenderanno dal valore atteso dei flussi di cassa e di conseguenza da  $\overline{l_{x_0+t}}$ . Perciò comprando il Longevity Bond la variabile casuale che definisce la perdita del fondo al tempo t sarà data da:

$$Loss(t) = R \cdot (l_{x_0+t} - \overline{l_{x_0+t}})$$

che dopo aver comprato lo strumento derivato diventa:

$$Loss(t)^{LB} = Loss(t) - R \cdot B_t$$



Si supponga che SPC compri, per un prezzo  $W$ , un'obbligazione con cedola pari a  $R \cdot C$  e valore nominale a scadenza  $T$  del valore di  $R \cdot F$ . Sia  $P$  il premio che il fondo pensione paga alla SPC per coprire il proprio rischio di longevità e  $V$  sia il prezzo pagato dagli investitori per acquistare il Longevity Bond emesso dalla SPC con valore  $R \cdot F$  e cedole  $R \cdot D_t$ .

SPC ha un profitto se  $P + V \geq W$ . In questo caso per semplicità si assume che  $P + V = W$ .

La struttura delle transazioni può così essere riassunta:

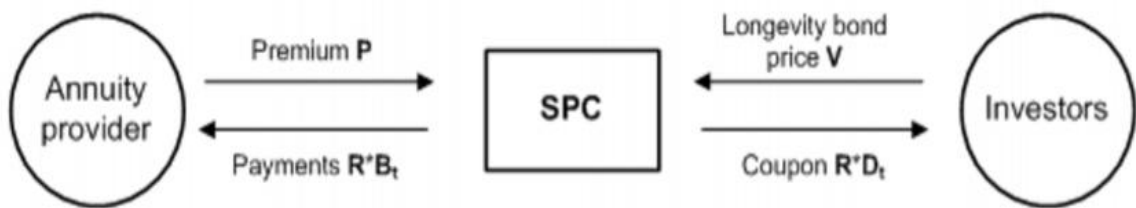


Figura 16 - Struttura delle transizioni in un Longevity Bond

Definendo  $d(0, t)$  il fattore di attualizzazione finanziaria al tempo 0, il prezzo del Longevity Bond è ottenuto attraverso la tecnica del valore attuale atteso, dove il valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri è calcolato attraverso la probabilità aggiustate per il rischio.

Assumendo perciò l'indipendenza tra il tasso di d'interesse e la mortalità il prezzo dell'obbligazione diventa:

$$W = R \cdot F \cdot d(0, T) + R \cdot C \sum_{t=1}^T d(0, t)$$

mentre il premio  $P$  e il prezzo del Longevity Bond  $V$  sono dati da:

$$P = R \sum_{t=1}^T \tilde{E}[B_t] d(0, t)$$

$$V = R \cdot F \cdot d(0, T) + R \sum_{t=1}^T \tilde{E}[D_t] d(0, t)$$

dove  $\tilde{E}[B_t]$  e  $\tilde{E}[D_t]$  sono i valori attesi rispettivamente di  $B_t$  e  $D_t$  sotto le probabilità aggiustate per il rischio.

## 6.2 La trasformata di Wang

Lo sviluppo di un mercato per i derivati legati alla mortalità dipende dal prezzo che lo strumento dovrebbe avere per essere competitivo per i potenziali compratori e venditori. Prezzarlo risulta essere molto difficile in quanto non può essere stimato usando la curva dei tassi spot e i metodi di assenza di arbitraggio a causa dell'incompletezza del mercato. Per questa ragione nella pratica trovano spunto due differenti approcci.

Il primo consiste nell'adattare la struttura di pricing, basata sull'assenza di arbitraggio, dei derivati legati ai tassi di interesse alla valutazione e cartolarizzazione degli strumenti finanziari legati alla mortalità. Si ottiene che il prezzo di un longevity bond corrisponde al valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri, calcolato attraverso le probabilità neutrali verso il rischio.

Un secondo approccio è basato su un operatore di distorsione chiamato Trasformata di Wang, che distorce la distribuzione di probabilità della mortalità proiettata per generare dei valori attesi aggiustati per il rischio e che possono essere attualizzati al tasso privo di rischio.

Dal lavoro di Levantesi et al. (2009) emerge come ci siano sostanziali e importanti differenze tra queste due metodologie tanto che risulta molto difficile definire quale delle due sia la migliore. Si osserva che tali contraddizioni nascono in Italia soprattutto per la mancanza di un mercato secondario per le rendite. Gli autori arrivano alla conclusione che un'unica misura neutrale verso il rischio potrebbe non esistere a causa dell'incompletezza del mercato dei derivati legati alla mortalità, mentre sembra essere più appropriato l'approccio distorsivo per l'incompletezza dei mercati. Tuttavia tale metodo risulta incoerente con i modelli di pricing *mark to market* applicati per gli altri strumenti finanziari, dove il valore di uno strumento o contratto finanziario è sistematicamente aggiustato in funzione dei prezzi correnti di mercato.

Per l'analisi che verrà condotta in seguito ci si soffermerà solamente sull'illustrazione della trasformata di Wang.

La trasformata di Wang si basa sull'idea che il mercato delle rendite prenda in considerazione l'incertezza della tavola di mortalità solamente quando questa viene data. Le assunzioni sottostanti sono che gli investitori accettano la stessa distribuzione trasformata e che il rischio di tasso di interesse e il rischio di mortalità siano indipendenti. Definendo  $\Phi(x)$  la funzione di ripartizione di una normale standardizzata, Wang determina l'operatore di distorsione come:

$$g_\lambda(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u) - \lambda]$$

dove  $u$  assume valori tra 0 e 1 e viene introdotto un parametro  $\lambda$  che riflette il rischio insito nei dati a disposizione e quindi può essere interpretato come il prezzo di mercato del rischio, riflettendo il livello di rischio sistematico.

Perciò dando una distribuzione con una funzione di ripartizione  $F(t)$ , una distribuzione distorta  $F^*(t)$  è determinata da  $\lambda$  secondo la seguente equazione:

$$F^*(t) = \Phi[\Phi^{-1}(F(t)) - \lambda]$$

Perciò data una qualsiasi passività  $X$ , su un orizzonte temporale  $[0, T]$ , il suo valore risulta essere il valore attuale, atteso sotto la distribuzione ottenuta dall'operatore distorto. Quindi la trasformata di Wang conduce a un *fair value*, aggiustato per il rischio, di  $X$  al tempo  $T$  che può essere ulteriormente attualizzata attraverso il tasso privo di rischio.

Seguendo quanto indicato da Lin e Cox (2005), si possono usare i valori delle rendite per stimare il prezzo di mercato del rischio. Il valore di  $\lambda$  è il risultato della seguente espressione:

$$a_{x_0}^{market}(t_0) = \sum_{t \geq 1} \{1 - \Phi[\Phi^{-1}({}_t\widehat{q}_{x_0}) - \lambda_{x_0}(t_0)]\} d(0, t)$$

Da notare come  ${}_t\widehat{q}_{x_0}$  gioca il ruolo della distribuzione  $F$  della formula precedente e rappresenta la probabilità che un percettore di rendita di età  $x_0$  non raggiunge l'età  $x_0 + t$  in riferimento a una tavola di sopravvivenza proiettata di riferimento.

Per concludere si può definire la corrispondente probabilità di morte come:

$${}_t\widehat{q}_{x_0}^* = \Phi[\Phi^{-1}({}_t\widehat{q}_{x_0}) - \lambda_{x_0}(t_0)]$$

A seguito di questa impostazione P e V sono calcolate come segue:

$$P = R \sum_{t=1}^T E^*[B_t]d(0, t)$$

$$V = R \cdot F \cdot d(0, t) + R \sum_{t=1}^T E^*[D_t]d(0, t)$$

Dove  $E^*[\cdot]$  è il valore atteso associato con distribuzione trasformata di Wang  ${}_t\widehat{q}_{x_0}^*$ .

Nella pratica questo significa che gli erogatori delle rendite, i fondi pensione ad esempio, aggiustano la distribuzione di probabilità di morte per compensare il rischio che gli assicurati vivano più a lungo di quanto ipotizzato. Ciò conduce alla conclusione che il prezzo di mercato per il rischio dovrebbe essere positivo, ovvero, il numero atteso di superstiti sotto le probabilità trasformate dovrebbe essere più alto rispetto a quello dato dalla tabella di partenza.

# UN'ANALISI DI SOLVIBILITA'

---

## **1 Introduzione**

Sulla scia di quanto esposto nei capitoli precedenti si è cercato di mostrare, attraverso delle analisi di sensitività, quali sono effettivamente gli elementi che minano la solvibilità di un fondo pensione e quale sia l'importanza dell'impatto che questi producono.

L'analisi si concentrerà su entrambe le tipologie di fondo presentate, ossia un fondo a prestazione definita e uno a contribuzione definita. Per quanto riguarda la prima tipologia l'analisi sarà concentrata soltanto sulla fase di erogazione, mentre per quanto riguarda la seconda l'attenzione sarà focalizzata sia sulla fase di accumulo che su quella di erogazione.

Come misura di sensitività è stato scelto il livello di funding che, come mostrato nel secondo capitolo, è influenzato da tre dinamiche. Di cui nel seguito se ne analizzeranno solo due. La prima è quella riguardante il tasso d'interesse, ossia i rendimenti che riesce effettivamente a ottenere il fondo dopo aver istituito un tasso tecnico come ipotesi del prim'ordine. La seconda riguarda l'andamento della collettività del fondo e quindi si è preso in considerazione il rischio legato alle ipotesi fatte sulla sopravvivenza ovvero di quanto l'andamento della popolazione sotto rischio si discosta dalle ipotesi fatte nel momento di definizione del contributo.

Nel prosieguo la linea guida sarà quella di mostrare come si muoverebbero le risorse e le riserve di questi fondi, qualora le condizioni fossero statiche durante tutti gli anni presi in considerazione e in seguito mostrare come queste varierebbero nel caso in cui tali componenti diventassero stocastiche.

## **2 Ipotesi sui fondi**

Si ipotizza che entrambi i fondi presi in considerazione sono chiusi ossia non sono soggetti all'ingresso di nuovi iscritti. Si segue in questo modo sia la normativa italiana che quella che verrà prevista dagli IORPs secondo la quale la valutazione della solvibilità deve avvenire a gruppo chiuso.

Per entrambi viene applicato un approccio per generazioni. Tale criterio consiste nel considerare l'insieme degli aderenti del fondo come una somma composta di varie generazioni, ognuna di esse costituita da caratteristiche "analoghe". Ogni generazione viene esaminata separatamente così che il risultato assicurativo di tutto il fondo venga determinato di anno in anno quale somma dei risultati ottenuti per ciascuna generazione. Per semplicità di analisi si farà riferimento esclusivamente a una singola generazione. Si assume che le adesioni al fondo siano reciprocamente indipendenti tra di loro e abbiano le seguenti caratteristiche:

- L'anno di sottoscrizione al fondo
- L'età dell'assicurato alla stipula,  $\alpha$
- Gli stessi anni di contribuzione e quindi di pagamento del contributo,  $n$
- Stesse basi demografiche ( $p_x$ ) e finanziarie  $j$
- Stesso sesso degli assicurati
- Stessa dinamica salariale

Tali caratteristiche sono, per ognuno dei fondi, riassunte nella tabella sottostante e sono state prese come dati di input per le elaborazioni dello scenario di base che verranno in seguito mostrate.

PARAMETRI	PRESTAZIONE DEFINITA	CONTRIBUZIONE DEFINITA
Aderenti al fondo	5000	5000
Età alla stipula	25	25
Anni di contribuzione	42	42
Tavole demografiche	SIM92	SIM92
Salario iniziale	1	1
Tasso dinamica salariale	3%	3%
Tasso rivalutazione pens.	2%	2%
Tasso tecnico	5%	5%

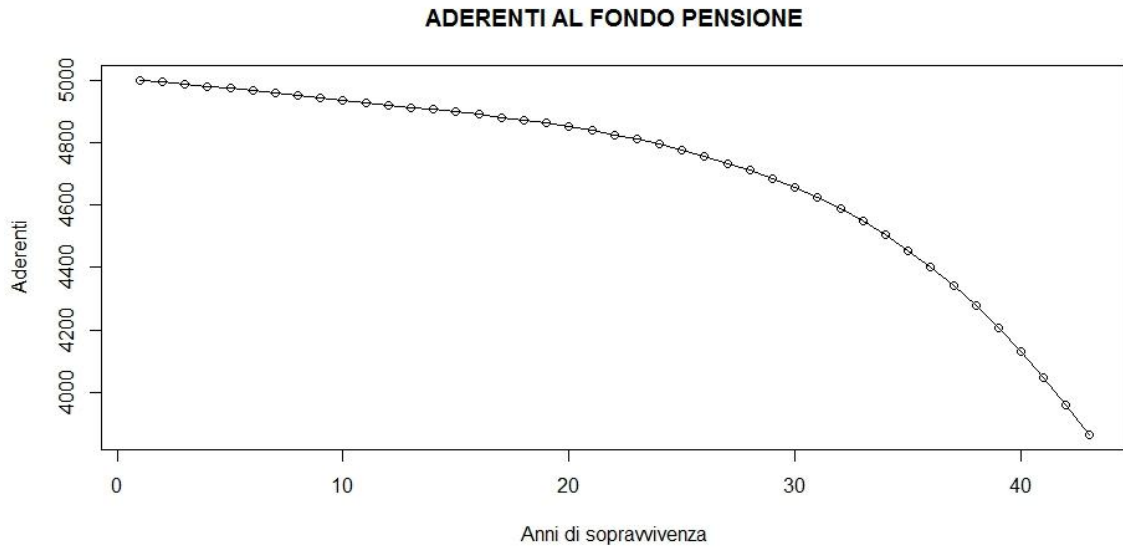
Tabella 3 - Ipotesi alla base dei fondi analizzati

### **3 Il fondo a prestazione definita**

Il fondo a prestazione definita ha come metodologia, per il calcolo del contributo da richiedere agli aderenti durante i 42 anni della fase di accumulazione, il metodo Individual Entry Age, illustrato nel secondo capitolo.

Dai dati che sono stati elencati in precedenza ne manca uno fondamentale: il  $\frac{1}{k}$ , che rappresenta un tasso di rendimento riconosciuto per ogni anno di contribuzione. Il valore che è stato scelto per  $k$  è pari a 80. Ciò comporta che la prima rata di pensione sarà calcolata come  $\frac{42}{80}$  dell'ultimo salario percepito dal lavoratore, portando ad un tasso di sostituzione pari al 52.5% che teoricamente risulta essere idoneo per il mercato italiano, dove lo Stato già provvede all'erogazione di un'importante rata pensionistica.

Come specificato si prende in considerazione una generazione di 5000 aderenti omogenei tra di loro; di conseguenza le valutazioni effettuate sul singolo sono analoghe per tutti. Inizialmente si analizza un fondo a prestazione definita che promette ai suoi assicurati solo una prestazione di vecchiaia al raggiungimento di una determinata età. Seguendo le basi demografiche del prim'ordine l'andamento della numerosità degli aderenti al fondo diventa il seguente:



**Figura 17 - Andamento aderenti fondo pensione causa uscita solo morte**

L'andamento degli aderenti risulta essere "lineare", senza salti importanti. Ciò è dovuto al fatto che l'individuo è giovane nel momento in cui decide di aderire al fondo e questo non prevede uscite per altre cause. Le probabilità di sopravvivenza in questi anni sono molto elevate, pari o prossime al 99% , e questo spiega l'andamento molto leggero a scendere, che si intensifica solo dopo il superamento del 50° anno di età dove le probabilità di morte tendono ad aumentare in maniera più evidente.

Nel caso di sola prestazione di vecchiaia si ha che l'andamento della riserva matematica è quello illustrato nella seguente figura.



## RISERVA MATEMATICA

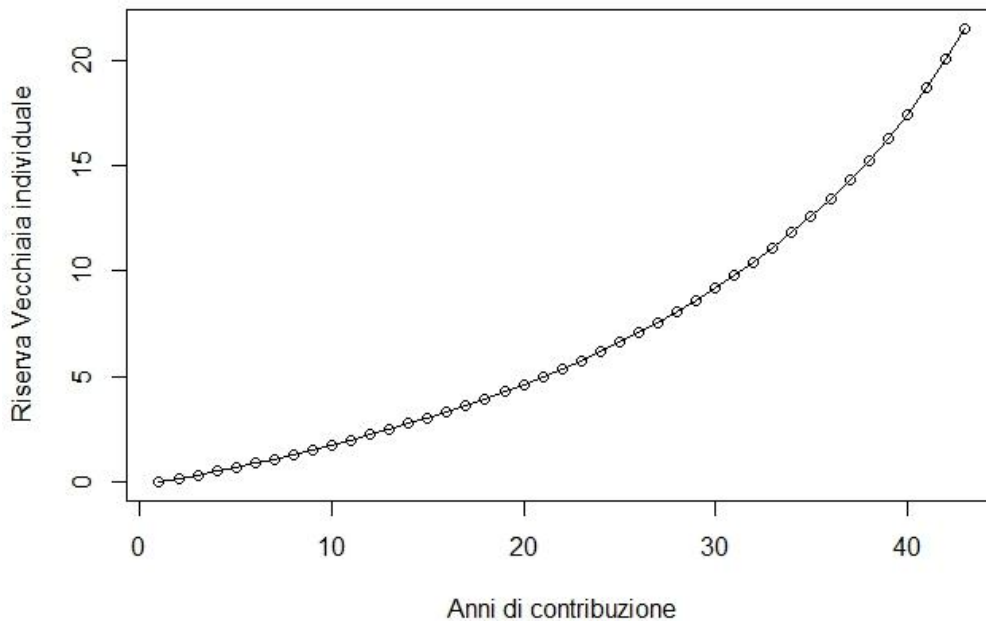


Figura 18 - Andamento riserva matematica, unica uscita

Come si nota, il valore della riserva in fase di accumulo cresce in maniera esponenziale, con una concavità rivolta verso l'alto. Da un valore pari a 0 nel momento di sottoscrizione arriva a 21,52 che è minore del valore che ci si attenderebbe, in quanto si sta prendendo in considerazione il valore attuale atteso delle rate future e di conseguenza bisogna calcolare l'effetto del tasso tecnico e dell'attualizzazione che ovviamente ha come risultato quello di ridurre il valore.

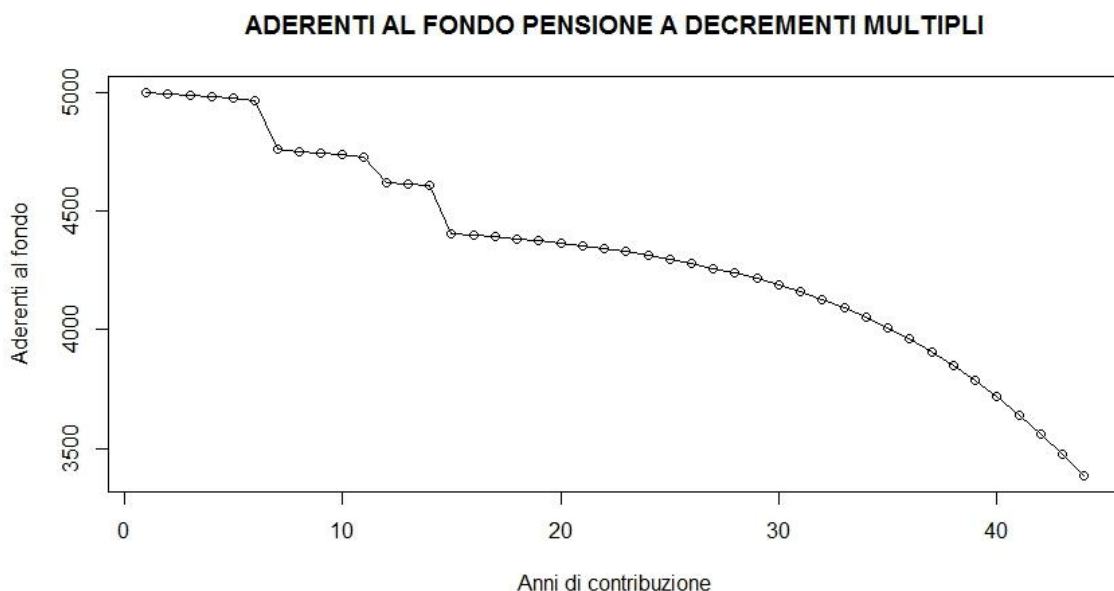
Come si è avuto modo di osservare nel capitolo due per attualizzare le future rate di pensione, che verranno erogate sotto forma di rendita all'avente diritto, ci si avvale di un tasso sintetico  $u$ , nel caso si voglia calcolare il valore del contributo, ed un tasso  $r$  nel caso dell'aliquota che, come il contributo, assume valore costante per tutta la fase di accumulazione. A seguito dei parametri utilizzati, i valori assunti da questi indici sono rispettivamente del 1.96% ed 0.97%. I valori del contributo  $c$  e dell'aliquota  $k$  risultano rispettivamente pari a 0.158 e 9,71%.

Nella realtà tuttavia i fondi pensione prevedono l'erogazione di prestazioni per più cause. Nel nostro caso di studio si è scelto di prendere in considerazione la prestazione di invalidità, il trasferimento della posizione ed infine il pagamento di pensione indiretta al superstite, nel caso il lavoratore muoia nella fase di accumulo.

Questi fenomeni possono occorrere tutti gli anni con diverse probabilità di accadimento. Spetta al fondo stimare correttamente delle probabilità di transizione da uno stato all'altro per i suoi aderenti che permettano di avere in media quell'andamento. Per far ciò il fondo di norma si basa su database storici in suo possesso o tramite elaborazioni tecniche, statistiche ed attuariali. Per problemi di software non è stato possibile analizzare l'andamento della solvibilità di un fondo in presenza di questi avvenimenti in maniera costante, di conseguenza sono state apportate delle semplificazioni in modo tale da tenerle comunque in considerazione. Sono state scelte delle probabilità di transizione solamente per alcuni specifici anni, che sono molto più elevate rispetto a quelle che nella realtà si è soliti osservare. Ciò è stato fatto in modo tale da avere una collettività per quella causa abbastanza grande da poterne seguire in maniera importante lo sviluppo. Si è ipotizzato che i soggetti possano uscire per invalidità solamente tra il quinto e sesto anno, per dimissioni dal tredicesimo e quattordicesimo anno e morire, lasciando un superstite, tra il decimo e undicesimo.

Le probabilità di uscita sono rispettivamente del 4%, a fronte di un valore reale che si aggira intorno alle probabilità per mille, 2,11% e 2.17%.

Conseguenza di ciò è il nuovo andamento delle persone aderenti al fondo illustrato nella figura seguente.

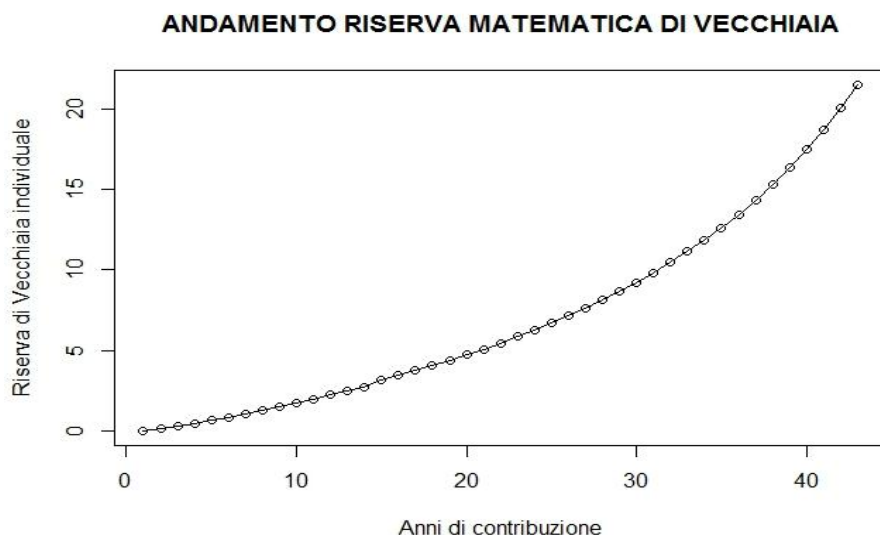


**Figura 19 - Andamento aderenti fondo pensione, più cause**

Gli scalini del grafico mostrano in maniera pronunciata queste ulteriori uscite.

In termini di numerosità si ha che tra il quinto e sesto anno diventeranno invalidi duecento persone, tra il decimo e undicesimo moriranno e lasceranno un superstite cento lavoratori mentre tra il tredicesimo e quattordicesimo decideranno di cambiare fondo duecento persone.

Il nuovo livello della riserva matematica individuale di invalidità diventa il seguente:



**Figura 20 - Andamento riserva matematica, più cause di uscita**

Si può osservare come l'andamento della riserva è simile e assume valori iniziali e finali uguali a quella per sola prestazione di vecchiaia. Il valore iniziale è definito per costruzione pari a 0, mentre il valore finale coincide in quanto a livello individuale se il soggetto arriva in vita all'età  $\beta=67$  anni, le risorse che servono per far fronte ai futuri impegni devono essere le medesime. Tuttavia l'andamento della riserva in questo secondo caso assume valori più bassi, in quanto la probabilità di arrivare alla prestazione di vecchiaia è minore a seguito di possibili ulteriori cause di uscita. Tuttavia questo andamento risulta poco marcato a causa delle importanti semplificazioni scelte. Maggiori sono le probabilità di uscita maggiore sarà il divario tra i due andamenti delle riserve.

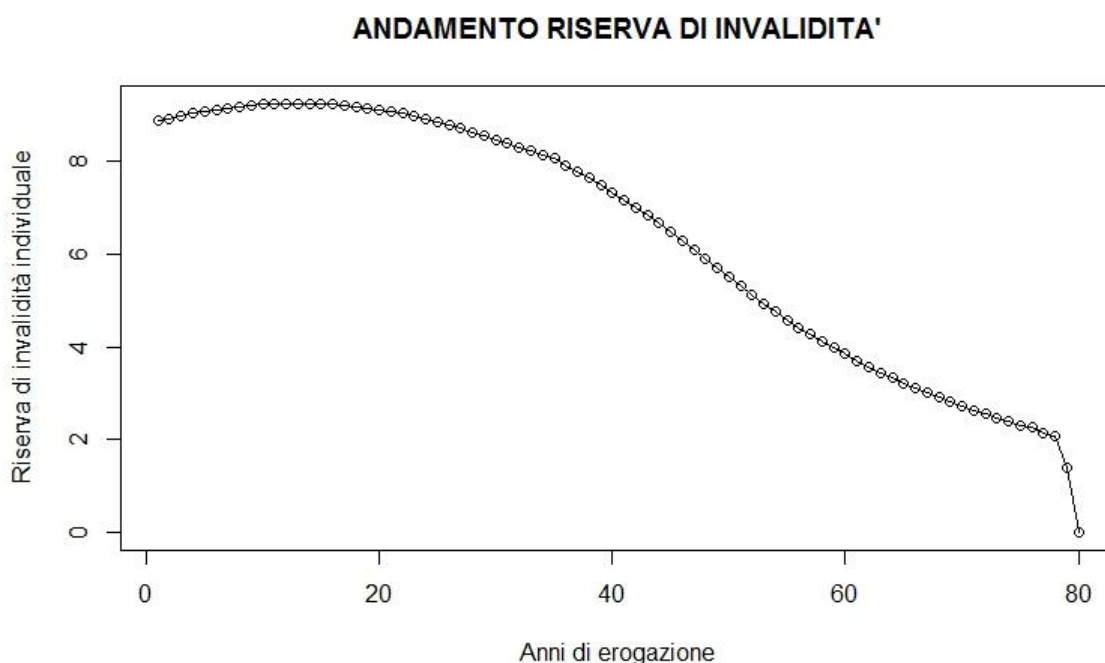
Questa particolarità dell'andamento è confermata dai nuovi valori che assumono il contributo e l'aliquota che sono rispettivamente 0,151 e 9,41%, inferiori a quelli che si erano trovati nel caso precedente.

Per quanto riguarda la prestazione di invalidità, sono state effettuate delle modifiche al calcolo della prestazione rispetto a quanto visto nel capitolo due. La nuova formula per calcolare il valore della riserva matematica per ogni anno  $x$  diventa la seguente:

$$A_{\alpha}^{a,i} = \sum_{x=\alpha+n}^{\beta-1} x^{-\alpha} E_{\alpha}^{j,p^a} \cdot \left( \frac{x - \alpha + \varepsilon \cdot (\beta - x)}{k} s_{x-1} \right) \cdot \ddot{a}_x^{u,p^i} \cdot q_x^{a,i}$$

La nuova prestazione, come si evince, ha una modifica al numeratore. Viene riconosciuto a titolo gratuito, soprattutto se l'evento avviene in anni giovani come nel caso preso in considerazione, un numero figurativo di anni di contribuzione, pari ad esempio a un'aliquota  $\varepsilon$  di quelli mancanti all'età di quiescenza  $\beta$ . Nel caso preso in considerazione si è ipotizzata un'aliquota pari al 40%. Come tavola di sopravvivenza per gli invalidi invece si è deciso di operare mediante una semplificazione ma con risultati prossimi alla realtà operativa. Si è utilizzata una tavola le cui probabilità di morte sono state incrementate del 20% rispetto a quelle del prim'ordine, in modo tale da tener in considerazione l'effetto dell'infortunio.

L'evoluzione della riserva matematica su tutta la durata del contratto è illustrata nella figura sottostante.



**Figura 21 - Andamento riserva matematica di invalidità**

La riserva parte da un valore molto elevato, per essere solo al 5° anno di età di iscrizione al fondo, pari a 8,87 e si osserva come, dopo una prima fase in cui ha un andamento crescente questa decresca seppur non linearmente verso lo 0 dopo ottanta anni di erogazione. La presenza di un valore iniziale così elevato è legata all'introduzione di quel

fattore definito in precedenza  $\varepsilon \cdot (\beta - x)$ . Viene infatti “regalato” parte della prestazione al lavoratore invalido, in particolare gli viene riconosciuto un aumento del tasso di sostituzione del 20% rispetto a quello che effettivamente avrebbe dovuto ricevere, come un risarcimento per compensare l’evento di essere divenuto invalido.

L’iniziale effetto crescente è sostanzialmente dovuto al fatto che durante la fase di erogazione della riserva, in un’ottica di rate crescenti, si hanno due effetti contrastanti. Da un lato più passa il tempo meno solo le rate che devono essere pagate, dall’altro le rate che mancano da pagare sono più rilevanti in termini monetari poiché sono soggette alla rivalutazione. A seguito di questi effetti, la riserva può sempre aumentare ed è quello che accade in questo caso. Nel lungo periodo comunque si osserva che l’effetto sarà decrescente, seppur non lineare proprio per la presenza di rate non costanti.

Discorsi analoghi possono essere fatti per la prestazione a superstiti di un soggetto attivo. In questo caso non si ha quell’effetto di compensazione nel definire la prestazione, anzi si è in presenza di una riduzione in quanto la prestazione è calcolata come una percentuale fissa del 60% della prestazione che il lavoratore avrebbe ricevuto in quel momento e non quella dell’età di quiescenza, al cui raggiungimento mancano ancora trent’anni di contribuzione. Per quanto riguarda l’andamento valgono gli stessi commenti fatti per il caso precedente. Come ipotesi di sopravvivenza del superstite si è deciso di effettuare una semplificazione che di solito vale anche nella realtà, ossia di mantenere inalterata la tavola di mortalità di riferimento, usando però uno spostamento demografico per tener conto del cambio di sesso, da maschile a femminile, e la differenza di età al matrimonio. Tale valore è stato posto uguale a 3, in linea con quanto ipotizzato nella normativa italiana.

L’andamento della riserva matematica risulta perciò essere il seguente.

### ANDAMENTO RISERVA SUPERSTITE DA ATTIVO

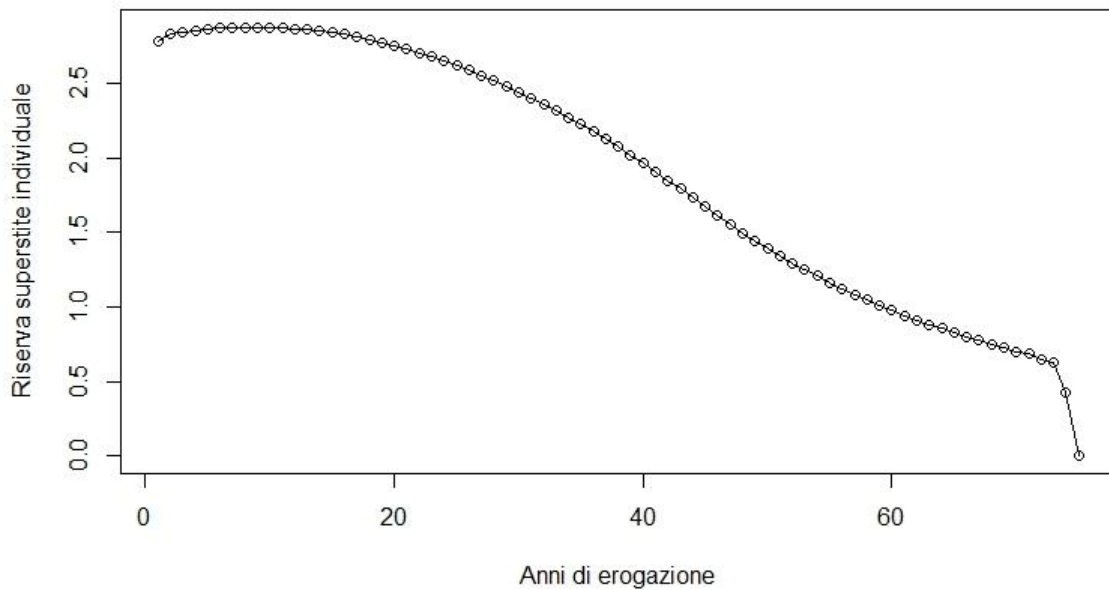


Figura 22 - Andamento riserva matematica superstite da attivo

Per quanto riguarda la terza causa di uscita si è deciso di introdurre un concetto proprio dei fondi pensione a contribuzione definita che comunque può essere applicato anche ai fondi a prestazione definita che è la portabilità. Questa corrisponde alla corresponsione di in un'unica soluzione di una misura forfettaria dei contributi versati, ovvero la possibilità di portare la sua posizione maturata, termini di contributi versati, in un altro fondo pensione. In questo caso parlare di riserva matematica non è propriamente corretto, in quanto non entrano delle dinamiche tecnico attuariali se non solo nel saper prevedere in media quante persone decideranno di trasferire la loro posizione nei vari anni. Si ipotizza inoltre che questi valori possano essere riscattati solo a inizio anno.

Il grafico seguente mostra come si evolve la situazione contributiva di un soggetto ovvero come si muove il valore degli asset, dei contributi che vengono sommati e capitalizzati anno per anno. La linea verticale mostra il momento in cui durante la fase di erogazione, per nostra ipotesi, le persone possono decidere di dimettersi dal fondo e quindi quanto deve essere il valore individuale che il fondo deve possedere per far fronte a quelle richieste.

## ANDAMENTO CONTRIBUTI

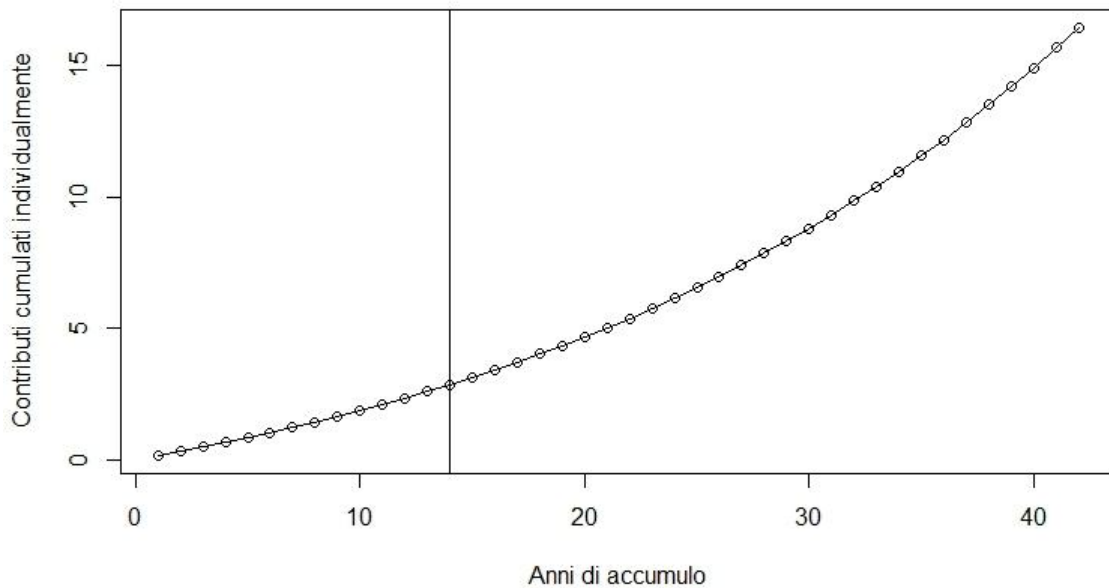


Figura 23 - Andamento riserva per dimissioni

Come si osserva il valore all'età tredici in cui può avvenire il riscatto è pari a 2.6, molto più elevato di quello che è richiesto per la riserva di vecchiaia corrispondente. Ciò è dovuto a due motivi. Il primo consiste nel fatto che tale valore risente anche degli oneri che devono essere pagati a coloro che sono invalidi e quindi per un effetto solidaristico serve che i lavoratori attivi paghino anche per coloro che non possono più contribuire. Il secondo motivo è racchiuso nella tecnica di accantonamento dell'IEAM. Tale metodo prevede il pagamento di un contributo costante nel tempo, di conseguenza nei primi anni verrà pagato un premio molto superiore a quello che dal punto di vista attuariale sarebbe corretto. Si stanno anticipando quote di contribuzione future. Nel lungo periodo si chiederà invece meno. Ciò evidenzia come un fondo gestito con l'Individual Entry Age mostra più sicurezza rispetto ad altre tipologie di accumulo. Col passare degli anni questo effetto è minore e di conseguenza il distacco tra le due componenti si assottiglia sempre di più, fino a coincidere in arrivo all'età  $\beta$ .

Un'aliquota che porterebbe l'equilibrio attuariale tra tutti gli anni presi singolarmente, tipica di un altro sistema di accantonamento chiamato Current Unit Method (CUM), sia nella realtà poco praticabile in quanto, se all'inizio richiede un contributo da parte del lavoratore molto contenuto, negli ultimi anni, in una logica di salario crescente,

richiederebbe a quest'ultimo uno sforzo enorme per il pagamento al fondo pensione, arrivando a un'aliquota che equivale al 40% dell'ultimo salario.

#### **4 Il fondo a contribuzione definita**

Il fondo a contribuzione definita è stato costruito attraverso il metodo proposto da Vigna e Haberman presentato nel capitolo secondo.

Anche per questo fondo si è deciso di optare per un orizzonte temporale di contribuzione pari a quarantadue anni, con le caratteristiche elencate nella tabella precedentemente illustrata.

Come è noto l'unico parametro che manca per la definizione del modello è l'aliquota di contribuzione che viene scelta dal lavoratore in fase di sottoscrizione. Nella realtà operativa e nella maggior parte dei casi, il lavoratore decide di destinare al fondo il suo Trattamento di Fine Rapporto ovvero una porzione della retribuzione del lavoratore. Tale TFR nella pratica consiste in un'aliquota del salario che spetta al lavoratore per ogni anno di lavoro in azienda ed è pari al 6,91% della sua retribuzione ed è utilizzata per il calcolo del contributo. Ovviamente si potevano assumere anche valori superiori per tener conto del contributo da parte del datore di lavoro e di quello personale del lavoratore.

Per questa tipologia si andrà ad osservare non solo la fase di accumulazione ma anche quella di erogazione, in modo tale da analizzare come effettivamente varierà il requisito di capitale in entrambe le fasi. La fase di erogazione è peculiare in quanto coincide per entrambi i fondi. Una volta raggiunto il montante sul quale verrà in seguito erogata la rendita, escludendo la modalità del calcolo della rata di pensione, la modalità di gestione è la medesima negli anni successivi. La differenza la si trova appunto nel calcolo della rata come spiegato nel primo capitolo. Nel caso a contribuzione invece questa è fissata e una volta raggiunto un determinato montante, a seconda dei rendimenti che il fondo sarà in grado di raggiungere dal mercato, verrà decisa la prestazione facendo riferimento anche a determinate basi tecniche che in quel momento verranno decise. Quindi, come si evince da questo discorso, l'analisi che verrà condotta non terrà in considerazione il caso in cui il fondo decida di scaricare i rischi su un altro soggetto, quale può essere un'assicurazione o un altro intermediario, stipulando una convenzione sull'erogazione della pensione.



Inoltre, come è noto, il fondo pensione a contribuzione definita può scegliere se garantire un rendimento minimo ai propri iscritti. Nella realtà questo aspetto è quasi sempre verificato per motivi sostanzialmente commerciali. Il lavoratore deve decidere se lasciare il proprio TFR in azienda o investirlo in un fondo. Lasciare il TFR in azienda comporta che questo abbia una rivalutazione che è definita dalla normativa pari a 1,5% più il 75% del tasso di inflazione registrato per quell'anno. Di conseguenza per rendere il fondo pensione più attrattivo per i propri clienti e garantirsi più risorse i gestori sono disposti a concedere un tasso che sia almeno pari al valore di rivalutazione del TFR.

Nella nostra analisi si prende in considerazione un fondo che ha un tasso minimo garantito pari a  $j = 4\%$ .

Per quanto riguarda le ipotesi di dinamica salariale si è deciso di lasciare invariata quella che si era fatta per il fondo a prestazione definita.

A livello individuale si può osservare l'andamento della posizione maturata dall'aderente nei quarantadue anni di contribuzione. Questa mostra una crescita convessa, regolare, ricordando infatti che ci si trova in ipotesi di stazionarietà dei parametri.

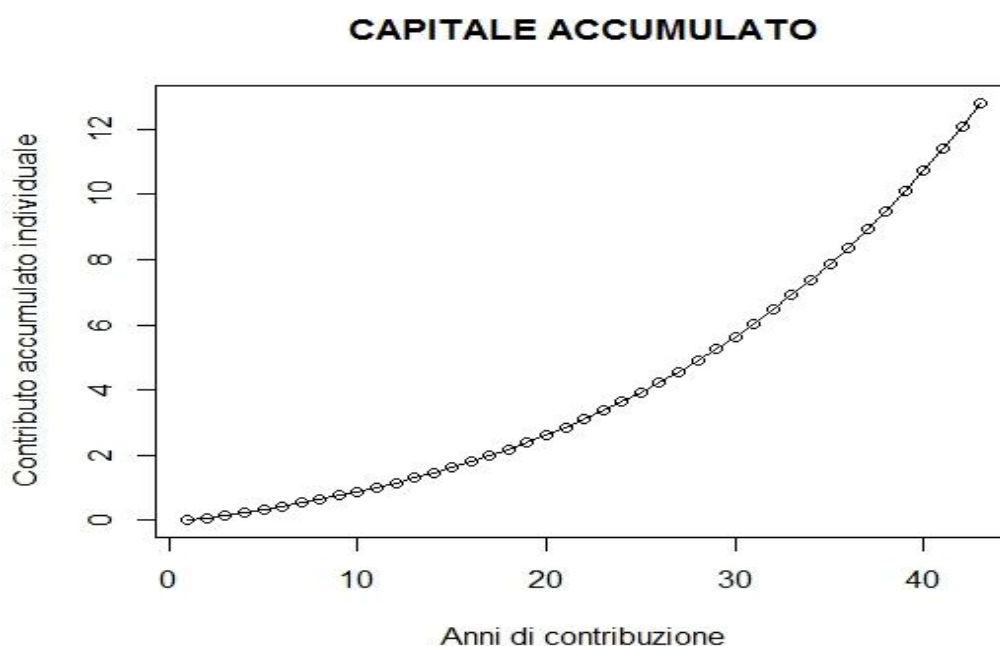


Figura 24 - Andamento posizione individuale capitalizzata

Come si può osservare con un contributo pari all'aliquota del TFR si raggiunge un valore di 12,82 che sarà il montante da tramutare in rendita, attraverso la moltiplicazione con un coefficiente. Nella realtà operativa tali coefficienti possono essere calcolati attraverso

opportune basi tecniche dal fondo, oppure si può far riferimento alla normativa esistente e utilizzare i cosiddetti coefficienti di Dini. Nell'analisi effettuata si è deciso di fare un'approssimazione ossia non prendere in considerazione la possibilità di prestazione anche a superstiti di pensionato ma solo prestazioni di vecchiaia. Di conseguenza l'unica scelta fatta riguarda il tasso tecnico e la base demografica di riferimento che sono stati indicati nella tabella iniziale, che coincidono con quelle utilizzate per la prestazione definita.

Il coefficiente calcolato attraverso le ipotesi fatte è pari a 8,19% che è di gran lunga più elevato rispetto a quello proposto dalla normativa, pari a 5,6%, proprio per le semplificazioni apportate. Il valore attuale atteso infatti diminuisce in maniera sensibile al denominatore della formula per il calcolo di tale coefficiente e di conseguenza questo ne produce un aumento.

La rata di pensione così calcolata è pari a 1.05 che garantisce un tasso di sostituzione del 30% in rapporto all'ultimo salario percepito dal lavoratore. Il montante diventa riserva matematica e il suo andamento a livello individuale negli anni futuri sarà il seguente:

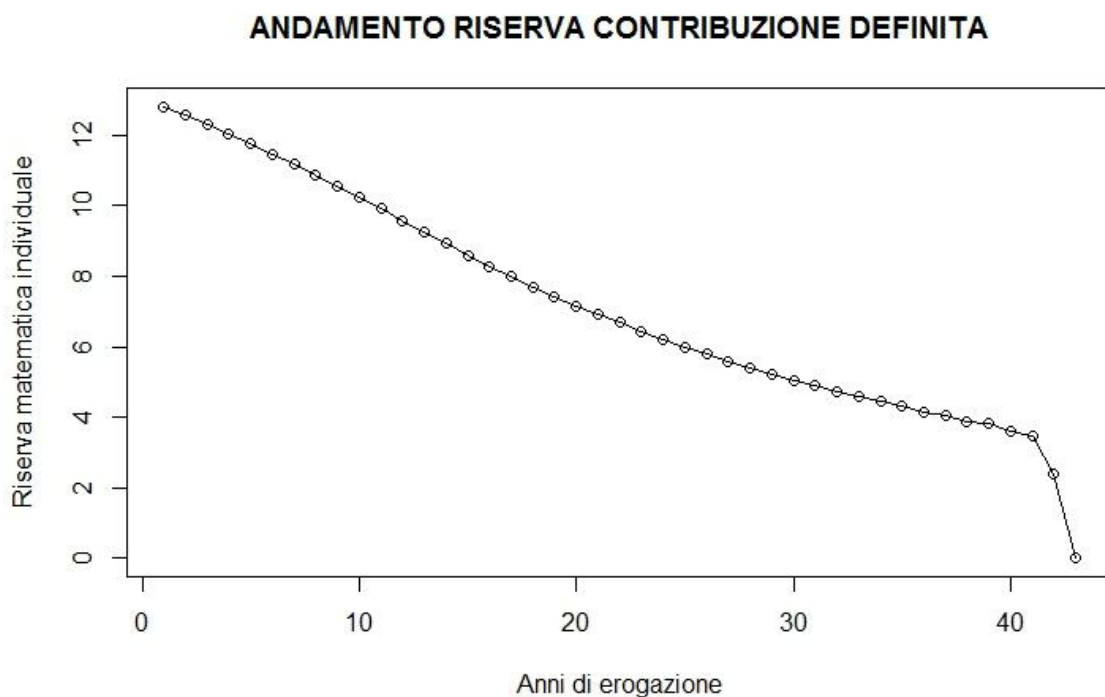


Figura 25 - Andamento riserva matematica, fase di erogazione

A differenza delle altre riserve, l'andamento è strettamente decrescente e ciò è legato al rapporto tra il tasso di interesse  $j$  e il tasso di rivalutazione  $\delta$  che conduce a una diminuzione del suo valore.

## **5 Una misura di rischio.**

Le misure di rischio di perdita si pongono l'obiettivo di calcolare, su base statistica, il livello di perdita che può determinare una manifestazione avversa di una variabile aleatoria. Nell'ambito di gestione dei rischi di un fondo pensione interessano sia le misure di rischio di deviazione sia quelle di perdita. Tuttavia se l'analisi viene svolta in un'ottica di solvibilità, il ruolo delle misure di rischio di perdita assume una valenza preponderante.

Le proprietà solitamente richieste alle misure di rischio di perdita sono: equivalenza traslazionale, omogeneità, sub-additività, monotonicità e di expectation boundedness, ossia che il valore assunto da una misura di rischio di perdita deve essere superiore alle perdite attese. Due sono le misure di rischio fondamentali che soddisfano o in toto o in parte queste proprietà. Tali misure sono il value at risk e il tail-var. Nell'analisi effettuata, si terrà l'attenzione sul VaR.

Il value at risk associato ad una variabile aleatoria monetaria è pari alla perdita che si verifica in un worst case scenario opportunamente definito. Tenuto conto che il worst case scenario non può essere definito come lo scenario peggiore possibile perché esistono sempre degli eventi del tutto improbabili che però possono essere teoricamente possibili, si adotta una definizione su basi probabilistiche. Dato un livello di confidenza prefissato  $(1-\alpha)$ , il worst case scenario corrisponde alla situazione in cui esiste il  $(1-\alpha)\%$  di probabilità di fare meglio del worst case scenario e solo l' $\alpha\%$  di fare peggio.

La definizione formale del value at risk è differente a seconda che si considerino variabili di stock, quale può essere un elemento dell'attivo o del passivo, o variabili di flusso espressive delle variazioni delle variabili di stock in un periodo temporale.

Nell'analisi effettuata si sono prese in considerazione alcune variabili di flusso e la variabile aleatoria su cui è stato calcolato il value at risk che assume valori positivi per risultati sfavorevoli. Di conseguenza il worst case scenario con un livello di confidenza del  $(1-\alpha)$  corrisponde al  $\alpha$ -esimo percentile della distribuzione e il value at risk corrisponde all'opposto di tale percentile.

Il value at risk rappresenta dunque quanto si può perdere, dato un livello di confidenza prefissato. La misurazione del rischio tuttavia richiede di specificare preliminarmente, oltre il livello di confidenza, anche l'orizzonte temporale.

Il livello di confidenza esprime il massimo profilo di rischio accettabile dall'impresa. La scelta di un valore elevato, ad esempio 99.9%, implica un atteggiamento prudentiale, mentre un basso livello, ad esempio 95%, implica un atteggiamento maggiormente aggressivo. Nell'ambito degli IORPs la scelta del livello di confidenza indica il massimo rischio che il regolatore ritiene che i fondi pensione possano assumersi per poter operare sul mercato, al fine di tutelare adeguatamente gli aderenti al fondo.

Per rendere più intuitivo il concetto di value at risk nella pratica si ricorre al concetto di capital at risk (CaR) che è il capitale proprio del fondo che partendo dal tempo 0, sulla base di una fissata probabilità di confidenza, si considera a rischio di erosione fino al tempo T. E' infatti il capitale minimo di cui un'impresa dovrebbe disporre per essere in grado di sopportare i rischi in uno scenario avverso, su un orizzonte temporale, espressivo della tolleranza al rischio dell'impresa. Tale capitale coincide con il value at risk. I livelli di tolleranza al rischio sono stabiliti dai massimi vertici aziendali. Tuttavia con il profilo normativo che si sta delineando in questi anni, tale tolleranza viene imposta dalla normativa europea. Il livello di confidenza di riferimento assume valore pari a 99.5% che è espressivo di una tolleranza al rischio bassa. Per quanto riguarda l'orizzonte temporale la scelta fatta a livello europeo è pari a 1 anno.

L'utilizzo di un value at risk con un livello di confidenza del 99.5% su un orizzonte temporale annuo è l'approccio che è stato seguito nell'analisi al fine di ottenere un requisito di capitale.

## **6 Il rischio di tasso di interesse**

In questo capitolo verrà analizzato il rischio legato al tasso di interesse ossia di quanto il rendimento che il fondo riesce a ottenere dal mercato si discosta dal valore scelto nelle basi di prim'ordine.

L'iter processuale con cui è stato svolto il lavoro consiste nell'ipotizzare che il fondo pensione possa investire in soli due asset con due profili di rischio differenti, legati in particolar modo alla volatilità che questi rappresentano.

Di conseguenza si è pensato di rivedere la formula del livello di funding in modo tale da tener in considerazione questa doppia dinamica che ne influenzerà il valore.

Il nuovo livello di funding può essere perciò definito come:

$$\theta_x = \frac{\sum_{h=0}^{x-\alpha-1} l_{\alpha+h}^* \cdot k \cdot s_{\alpha+h}^* \cdot [(1 - y_t)(1 + \tilde{\mu}_t) + y_t(1 + \tilde{\lambda}_t)]^{x-(\alpha+h)}}{l_x^* \cdot V_x}$$

Dove  $y_t$  è la quota investita in un'attività ad alto rischio e di conseguenza  $(1 - y_t)$  la quota di capitale investita in un'attività a basso rischio.  $\tilde{\mu}_t$  e  $\tilde{\lambda}_t$  corrispondono invece ai possibili valori che possono assumere rispettivamente il tasso di interesse della componente a basso rischio e quello ad alto rischio. Quindi si osserva come il livello di funding sia in questo caso soggetto a due fattori di rischio. Il primo è quello più diretto ossia il tasso di interesse che si riuscirà effettivamente ad ottenere dal mercato e quindi dalle singole componenti, il secondo invece è legato al management delle risorse ossia legato alle quote investite. Il gestore del fondo deve, per un principio di diversificazione, investire i propri asset in diverse categorie di prodotti e come si vedrà nel seguito una diversa allocazione delle risorse può portare a importanti risultati differenti.

Per quanto riguarda la componente a basso rischio si è ipotizzato che il fondo investa in titoli di stato, in particolar modo in Buoni del Tesoro Poliennali (BTP), con scadenza a 5 anni. In questo caso si ipotizza che il fondo non abbia problemi di duration e quindi non si prendono in considerazione problemi di Asset Liability Management che comunque sono una fonte importante di rischio per i gestori di un fondo pensione e che viene giustamente presa in considerazione dalla normativa europea.

Il BTP è considerato un titolo a basso profilo di rischio in quanto innanzitutto è emesso da uno Stato Sovrano, ossia l'Italia, quindi diventerebbe insoluto solamente se lo Stato Italiano fallisse durante il periodo prima della scadenza. Questa probabilità esiste, ma è molto contenuta. Inoltre, essendo un'obbligazione, ovviamente è soggetta alle dinamiche del mercato, tuttavia al momento della scadenza paga sempre quanto promesso. Spetta al gestore del fondo saper gestire l'andamento del rendimento di questo strumento durante la sua vita. Se si prende infatti in considerazione un BTP che a scadenza paga 100 e che è stato emesso a un prezzo pari a 88, se si calcola il Tasso implicito di rendimento (TIR), questo sarebbe pari al 2,6% ed è quello che l'investitore riceve all'anno, se mantiene la sua posizione fino a scadenza. Il TIR però ovviamente è soggetto alle

dinamiche del mercato e quindi può scendere o salire a seconda che sul mercato vengano emessi degli strumenti che garantiscono rendimenti maggiori o minori. Sotto questo aspetto si osserva la volatilità del rendimento ed emerge l'importanza delle tecniche di Asset Allocation, in quanto bisogna evitare che il fondo debba disinvestire per problemi di liquidità (ad esempio deve pagare delle prestazioni superiori a quelle previste ai propri aderenti per motivi imprevisti), in un momento in cui il tasso di rendimento sia minore del TIR, in modo da non contabilizzare una perdita.

Per simulare un possibile andamento del tasso di interesse di un BTP in letteratura si è soliti utilizzare il modello di Cox – Ingersoll – Ross presentato nel capitolo due che ben si adatta ai dati se le previsioni vengono fatte nel breve periodo. L'ideale sarebbe un giorno in quanto si basa su equazioni differenziali che lavorano su intervalli infinitesimali, risulta però difficile andare a ricavarne i parametri data una serie storica.

Nella nostra analisi si è ricorso a una metodologia semplice basata sul calcolo della media e varianza delle serie storiche riguardanti l'andamento di due BTP, con scadenza 5 anni emessi nell'anno 2011. Gli andamenti di tali BTP sono rappresentati dalle figure sottostanti, dove l'analisi è stata fatta su valori mensili.



Figura 26 - Quotazioni BTP scadenza Aprile 2016



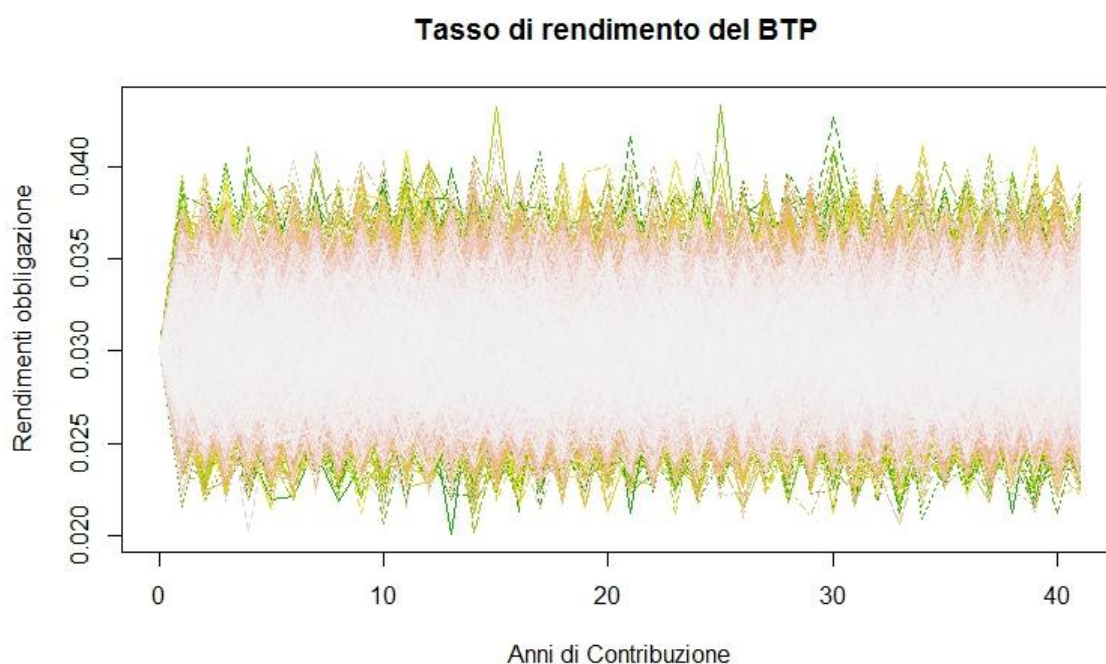
Figura 27 - Quotazioni BTP scadenza Settembre 2016

Come si può osservare in entrambi i grafici sono presenti dei picchi negativi nell'anno 2011. Questo è dovuto al fatto che in quell'anno i titoli di stato italiani sono stati soggetti a una forte volatilità a seguito della Crisi Economica e lo Stato è stato costretto a vendere i suoi titoli con un rendimento molto elevato e questo ha portato i BTP già emessi a subire una forte diminuzione di valore in termini di rendimento. Al contrario si osserva come negli ultimi anni abbiano riacquisito valore, in quanto il Paese sta cominciando a uscire dalla crisi e può emettere titoli di stato con un rendimento molto contenuto e ciò fa apprezzare i BTP, come quelli considerati in questa analisi, che offrono un rendimento maggiore di quello offerto dal mercato. In conclusione si osserva come entrambi i titoli, essendo prossimi a scadenza tendono a raggiungere il loro valore nominale pari a 100.

I parametri con cui si è svolta la simulazione del CIR sono riassunti nella seguente tabella:

Parametro	Valore
Ritorno alla media $\alpha$	1,5
Media di lungo periodo $\gamma$	3%
Volatilità annua $\sigma$	2%

Sulla base di 10000 simulazioni del modello il risultato per la componente obbligazionaria è il seguente:



**Figura 28 - Simulazione tasso di rendimento di un BTP**

La media si stanza vicino al 3% raggiungendola molto velocemente per ogni anno. La volatilità contenuta del 2% su base annua permette che il valore del rendimento non sia mai negativo e che non si discosti troppo dal valore medio. Questo dà prova di come il titolo sia a basso rischio.

Per quanto riguarda invece il titolo azionario si è fatta un'ipotesi differente. Si ipotizza che il gestore del fondo investa gli asset in modo da avere un paniere che possa essere ben rappresentato dall'indice FTSE.MIB ossia l'indice di riferimento per il mercato italiano.

Per questa componente del tasso di interesse si è ipotizzato di modellarla attraverso un Moto Browniano Geometrico ossia il modello di Black – Scholes presentato nel capitolo secondo. Questo modello, come nel caso del CIR, offre andamenti verosimili del cammino dell'azione negli anni futuri se è tarato su un breve periodo, infatti si basa anch'esso su equazioni differenziali che riguardano brevi spazi temporali.

Per stimarne i parametri si è deciso di lavorare sulla serie storica degli ultimi cinque anni del titolo azionario e di ricavarne i parametri attraverso delle analisi su questa. L'orizzonte



temporale è stato così definito in modo da essere coerente con quanto svolto per il titolo obbligazionario.

I dati a disposizione sono anche in questo caso mensili. La serie storica oggetto di analisi è la seguente:

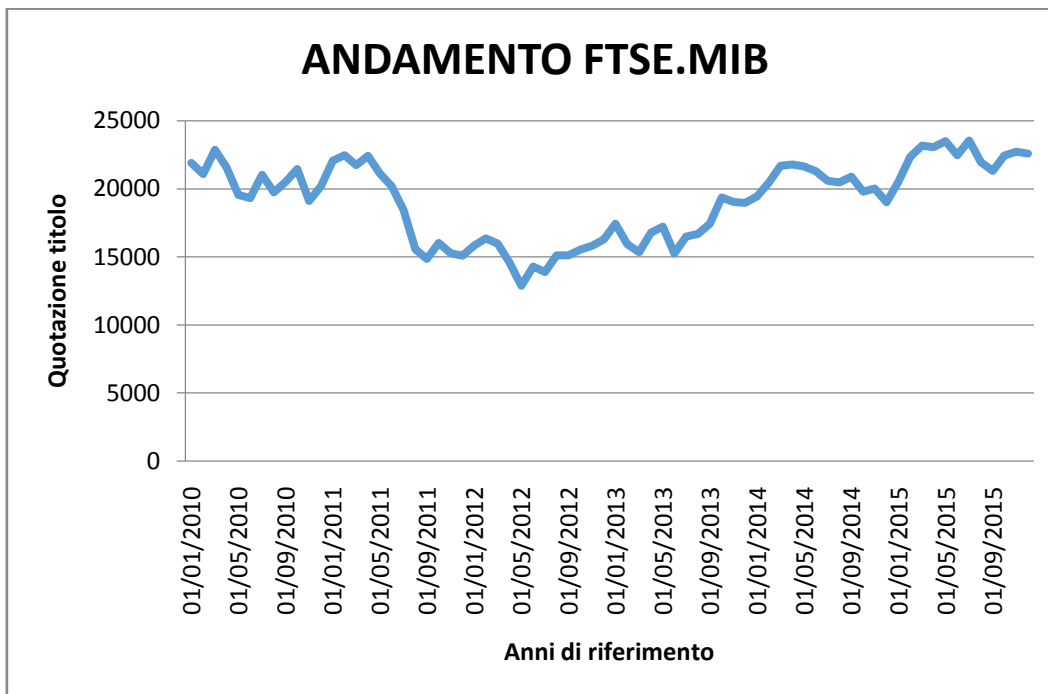


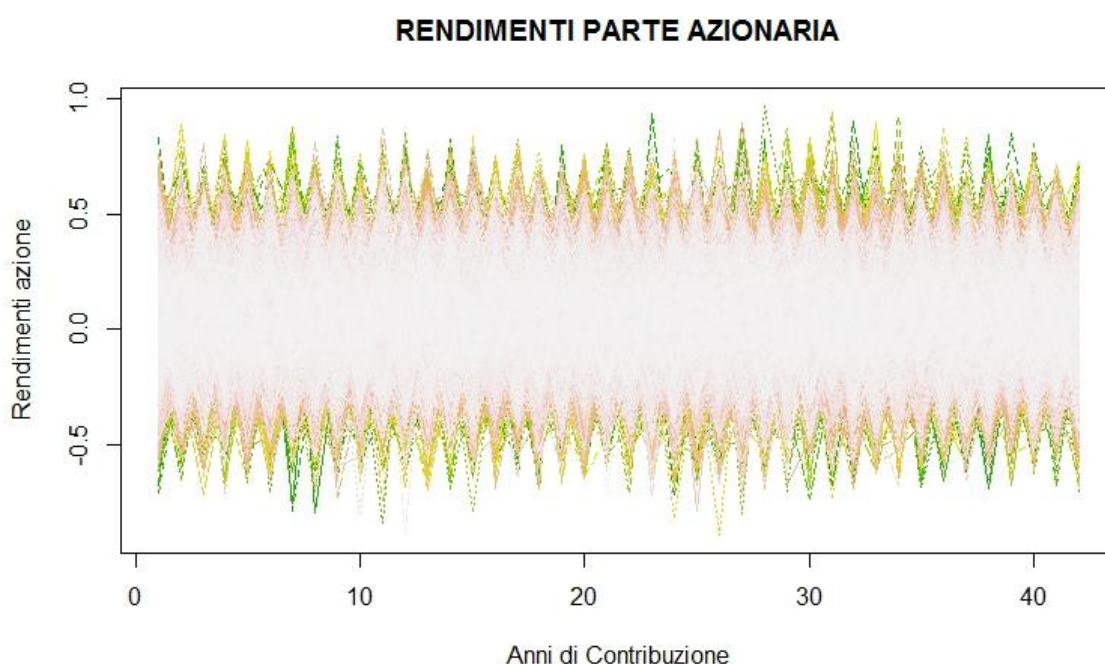
Figura 29 - Andamento FTSE.MIB

Come si può osservare la volatilità presente in questo processo è maggiore rispetto a quella analizzata precedentemente e ancora una volta si nota la forte diminuzione dei valore nell'anno 2011 a seguito della forte crisi economica che ha provocato una caduta dei listini.

Dall'analisi svolta si sono ricavati i valori del modello di Black – Scholes, riassunti in tabella.

Parametro	Valore
Media di lungo periodo $\gamma$	8%
Volatilità annua $\sigma$	20%

Si è proceduto in seguito a simulare i valori dell'azione su base mensile effettuando 10000 simulazioni del modello B&S e da queste ricavare i dati sui rendimenti mensili e annuali che servono per completare la nostra analisi. Il risultato annuo è riassunto nella figura seguente. Si osserva come la media di lungo periodo sia stabile intorno all'8% e come sia importante la volatilità che può portare anche in casi molto estremi ad un aumento del 100% del titolo su base annua, se non addirittura alla perdita della metà della propria posizione con rendimenti negativi che toccano anche il -50%.



**Figura 30 - Simulazione tasso di rendimento di un Azione**

L'analisi che verrà in seguito fatta è divisa per scenari. Ogni scenario si differenzia dall'altro a seguito della metodologia di Asset Allocation scelta dal gestore delle risorse del fondo.

Nello scenario base si investirà nella quota obbligazionaria il 70% delle risorse mentre nella quota azionaria il restante 30%. Nel secondo scenario che è quello caratterizzato da una gestione più aggressiva, tipica delle gestioni in età più giovane quando si è lontani dall'età pensionabile, prevede l'investimento in azioni del 40% delle risorse e per il 60% in titoli obbligazionari. Infine il terzo scenario è quello più sicuro, tipico di quella fase in cui il soggetto è prossimo alla pensione e quindi la sua propensione al rischio è molto contenuta in quanto cerca di non perdere e conservare il patrimonio accumulato negli

anni. In questo scenario si è deciso di investire in obbligazioni l'80% del patrimonio e in titoli azionari il restante 20%.

In questo modo si cerca di osservare come varia il requisito di capitale e i momenti della distribuzione del livello di funding in funzione non solo della volatilità dei tassi ma anche in un'ottica di investimenti da parte dei gestori del fondo.

L'analisi è svolta sotto l'ipotesi di assenza di problemi di duration per fini di semplificazione.

## 6.1 Focus: Fondo a prestazione definita

### SCENARIO 1

In questo scenario si è deciso di investire seguendo le quote del 70% e del 30%. Il risultato a livello di portafoglio è il seguente:

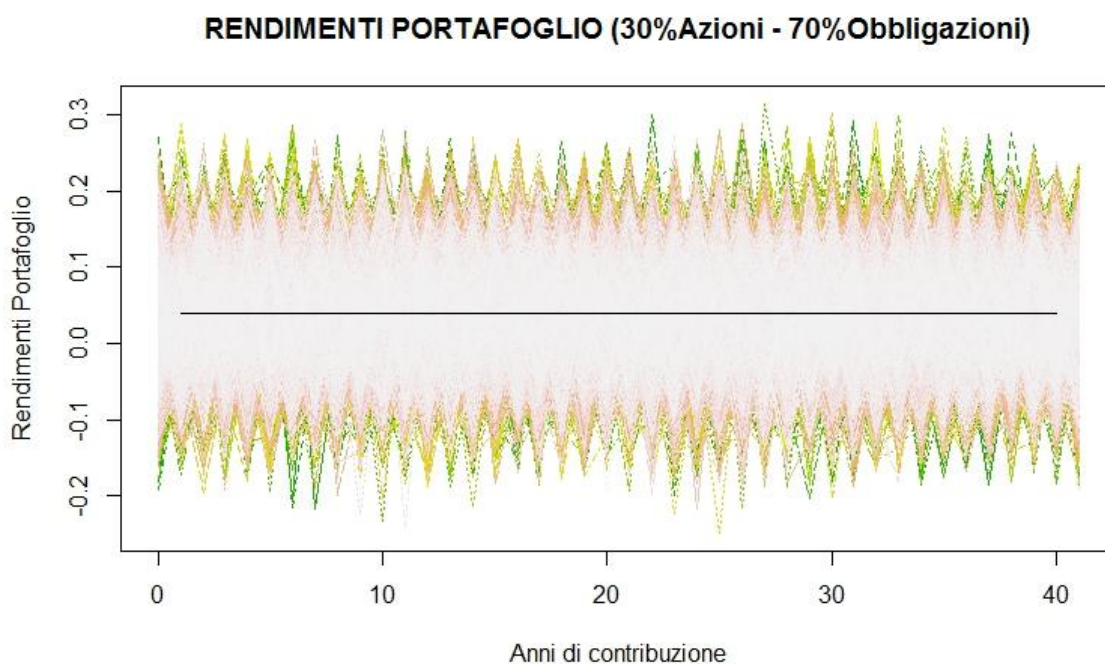
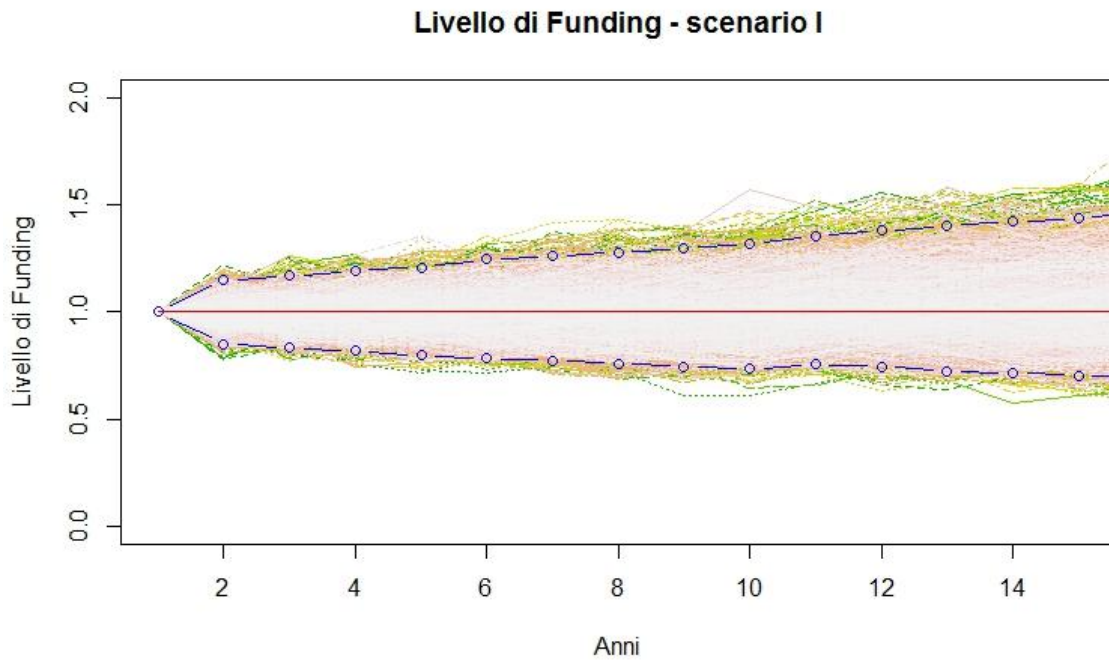


Figura 31 - Rendimento portafoglio - I scenario

Come si può osservare, la media in questo caso è pari al 4% per tutti gli anni. Di conseguenza i valori medi che ci si aspetterà dalle analisi successive devono essere uguali a quelli del prim'ordine. Per quanto riguarda i valori estremi si osserva come la maggioranza di elementi obbligazionari mitiga in maniera importante sia gli scenari

superiori ma soprattutto quelli inferiori che possono portare a perdite importanti per il fondo.

Andando a calcolare il livello di Funding di un fondo a prestazione definita come descritto nei paragrafi precedenti, e quindi mediante tali simulazioni, si ottiene il risultato seguente.



**Figura 32 - Simulazioni livello di Funding - I scenario, prestazione**

La riga nera centrale mostra un andamento medio costante mentre le righe blu intorno mostrano i percentili delle varie distribuzioni. In particolar modo quella superiore indica il 99.5-esimo percentile mentre quella inferiore indica il 0.5-esimo percentile.

I momenti relativi ai vari istanti temporali sono di seguito riassunti in tabella:

<b>Istante temporale</b>	<b>Media</b>	<b>Scarto quadr. med.</b>	<b>Indice ass.</b>
t=1	1	0,058	0
t=2	1	0,065	0,065
t=3	1	0,072	0,115
t=4	1	0,080	0,164

t=5	1	0,088	0,223
...	...	...	...
t=42	1	0,275	0,893

**Tabella 4 - Momenti livello di Funding - I scenario, prestazione**

Come si può notare, la media non cambia, è sempre pari a 1 ossia indica piena solvibilità da parte del fondo: gli attivi sono esattamente pari ai passivi. Di conseguenza in media il fondo risulta essere sempre solvibile. Tuttavia si osserva come la volatilità aumenti di anno in anno partendo da un 5% iniziale fino ad arrivare a un 27% al quarantaduesimo anno di contribuzione. L'asimmetria cresce anch'essa con l'aumentare dell'orizzonte temporale preso in considerazione e raggiunge livelli importanti già al quinto anno. Da notare come questa sia positiva e che quindi abbia una coda verso destra e una gobba sinistra che diventano sempre più separate tra di loro. Questo significa che maggiore tempo passa maggiormente i percentili della distribuzione si allontaneranno dal valore medio.

Se si volesse trovare un requisito di capitale per un fondo esposto a tali variazioni del tasso di interesse, anziché osservare il livello di funding, è necessario osservare come varia la differenza anno per anno tra le attività e le passività del fondo che viene denominata  $F_t$ . Si ricorda che tale valore del patrimonio è definito su base collettiva e tiene in considerazione tutte le riserve e attività del fondo pensione. Di conseguenza sia negli attivi che nei passivi sono compresi gli attivi e le riserve delle diverse cause di invalidità, superstiti da attivo e dimissioni.

L'andamento del patrimonio dell'impresa è riassunto nella figura sottostante:

### PATRIMONIO NETTO DEL FONDO PENSIONE

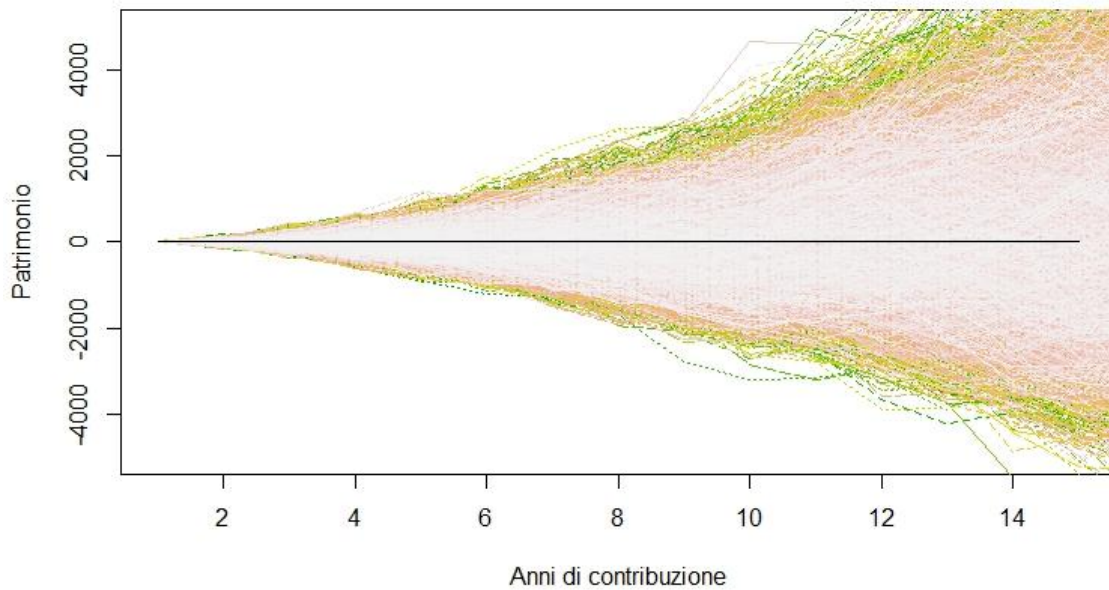


Figura 33 - Simulazioni del patrimonio - I scenario, prestazione

Da questo grafico ancor di più si osserva come l'andamento in media sia uguale a 0 ossia come in media ci si aspetti che il fondo sia pienamente solvibile e che quindi non richieda un requisito di capitale da accantonare per pareggiare attivi e passivi. Con l'aumentare degli anni la volatilità di questo patrimonio cresce sempre di più, poiché si è in presenza di un effetto cumulato. L'asimmetria anch'essa cresce in maniera marcata nel tempo con valori sempre più positivi.

in questo caso, per calcolare un requisito di capitale si è utilizzato un approccio value at risk con un livello di confidenza del 99.5% e si è deciso di operare su più orizzonti temporali per vedere come questo si evolve nel corso degli anni.

Il requisito ha un andamento crescente e già al 15° anno arriverebbe a un valore molto elevato. Nella realtà operativa di solito si preferisce guardare a un valore percentuale, seguendo la linea del decreto ministeriale che definiva il requisito di capitale per i fondi pensione come il 4% delle riserve matematiche del fondo.

Nel grafico che segue si osserva come il requisito, calcolato come una percentuale delle riserve, varia in riferimento a differenti istanti temporali. Il primo elemento è calcolato come il  $CaR(0,1)/RM(0)$ , mentre i restanti partendo da questo aggiungono quanto questo rischio si aggravi in percentuale delle riserve al tempo precedente. Tale aggravio si calcola della seguente logica:

$$\frac{CaR(0, T) - CaR(0, T - 1)}{RM(T - 1)}$$

### Evoluzione del CaR/RM

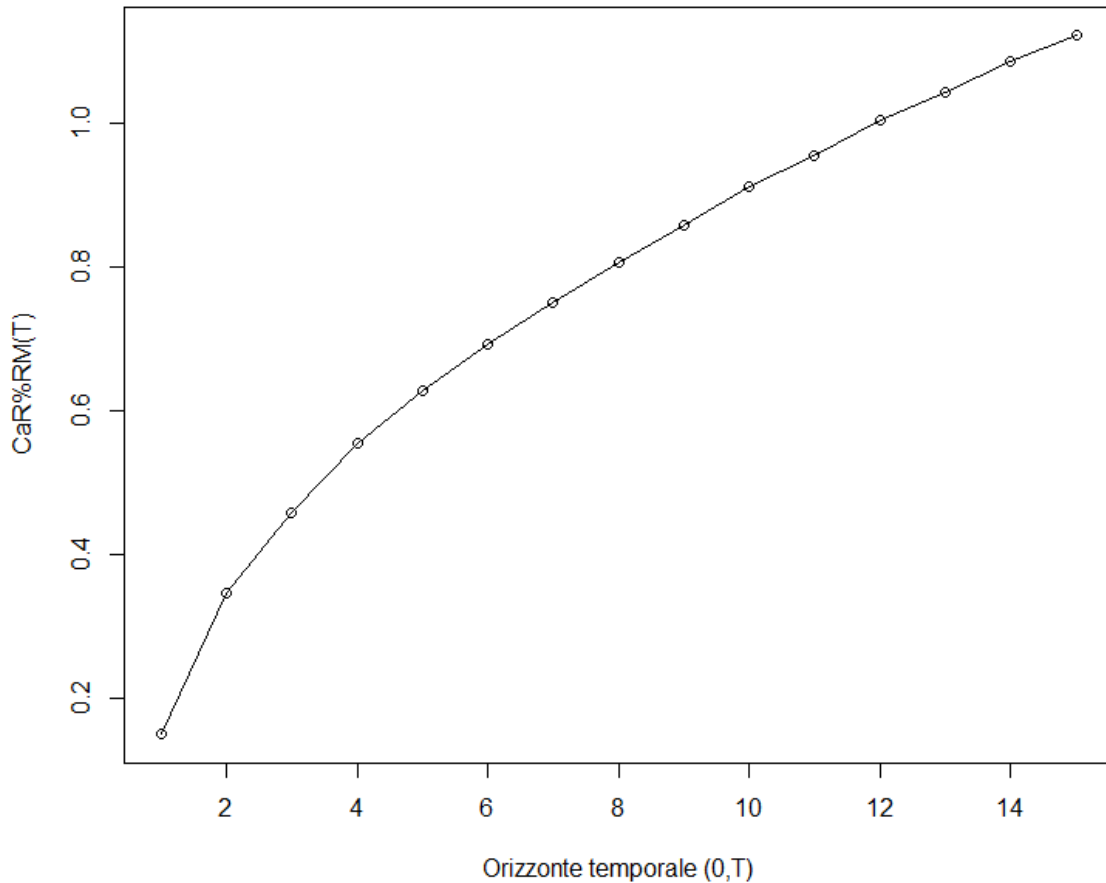


Figura 34 - Andamento requisito di capitale - I scenario, prestazione

Il rapporto già su un orizzonte temporale di un anno è molto elevato: corrisponde infatti al 15% delle riserve matematiche e aumenta sensibilmente all'aumentare di T, fino a raggiungere valori che superano il 100% di tali riserve. Ciò è dovuto principalmente all'aumentare della volatilità e dell'indice di asimmetria negli anni. Infatti all'aumentare dell'antidurata la media rimane invariata mentre il percentile assume valori sempre più distanti da questa e ciò comporta un aumento della distanza tra le due variabili che definiscono il requisito di capitale del fondo.

## SCENARIO 2

In questo scenario si è deciso di investire seguendo le quote del 60% in obbligazioni e del 40% in azioni. Il risultato a livello di portafoglio è il seguente:

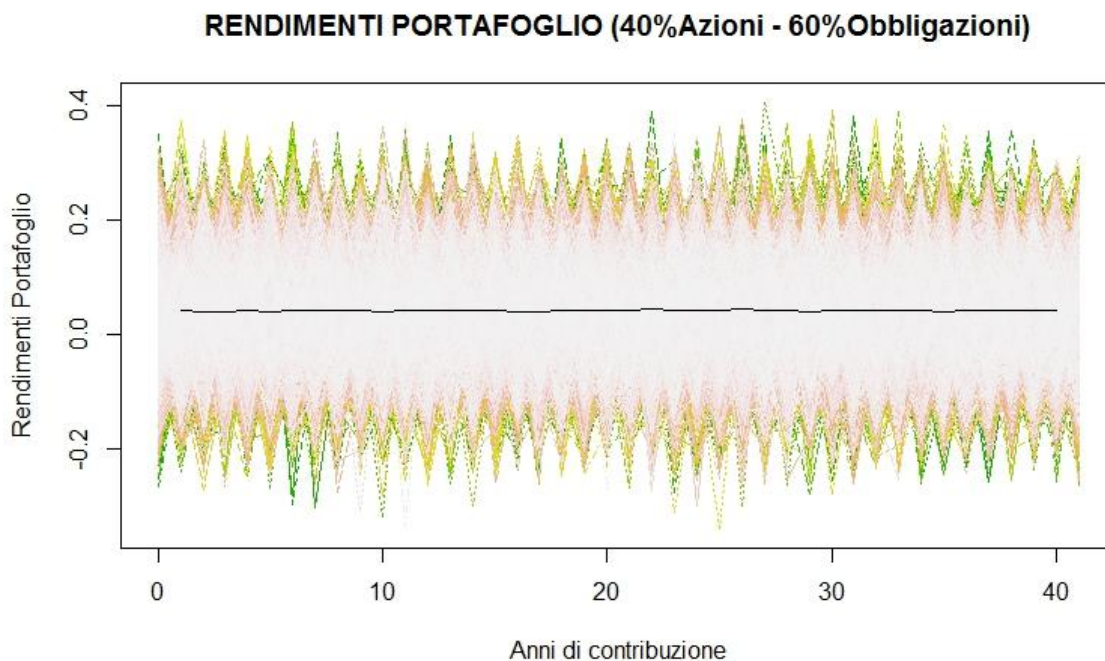


Figura 35 - Rendimento portafoglio - Il scenario

Come si può osservare, la media in questo caso è superiore al 4% per tutti gli anni. Di conseguenza i valori medi, che ci si aspetterà dalle analisi successive, devono essere superiori a quelli del prim'ordine. Ci si attende un valore medio del livello di funding sistematicamente sopra l'unità. Per quanto riguarda i valori estremi si osserva come l'aumento di valori azionari aumenti i valori superiori che può raggiungere il rendimento di portafoglio, ma a differenza del primo scenario si ha anche un ulteriore aumento delle perdite che il fondo può subire a causa degli andamenti della componente azionaria. Andando a calcolare il livello di funding si ottiene il risultato seguente.



### Livello di Funding - scenario II

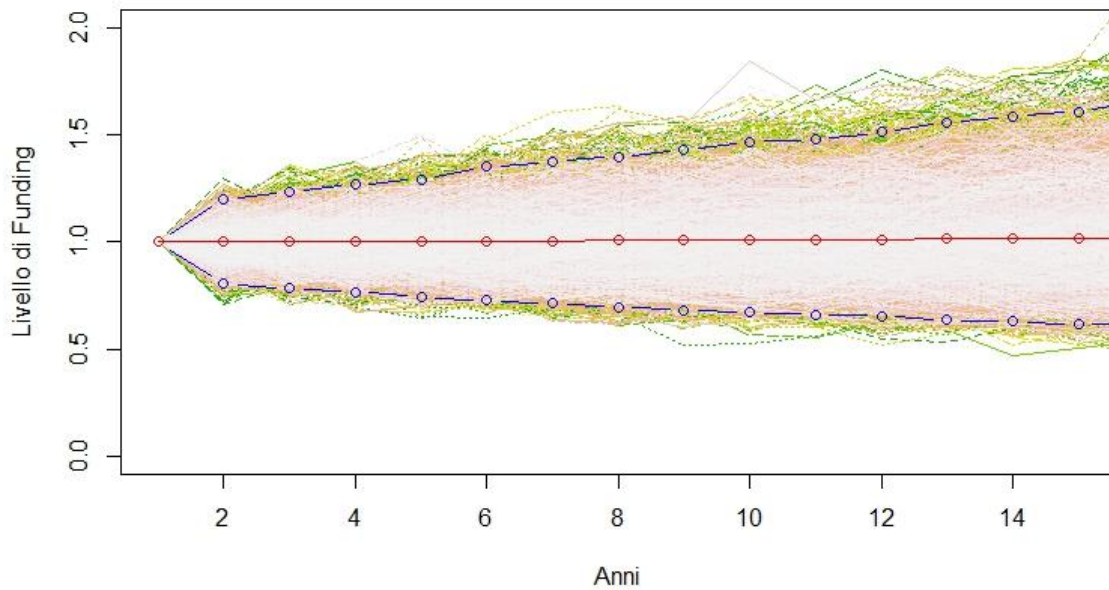


Figura 36 - Simulazioni livello di Funding - Il scenario, prestazione

La riga nera centrale mostra un andamento medio che come si era ipotizzato è crescente, mentre le righe blu intorno mostrano i percentili delle varie distribuzioni. In particolare quella superiore indica il 99.5-esimo percentile mentre quella inferiore indica il 0.5-esimo percentile.

I momenti relativi ai vari istanti temporali sono di seguito riassunti in tabella:

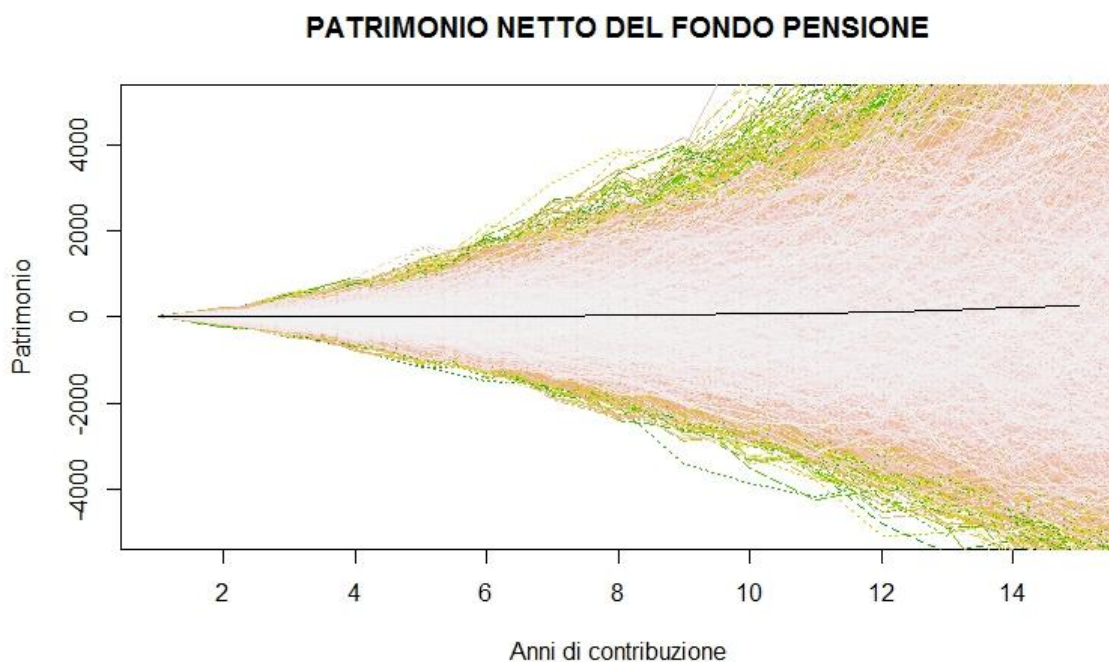
Istante temporale	Media	Scarto quadr. med.	Indice ass.
t=1	1,00	0,077	0
t=2	1,011	0,087	0,087
t=3	1,018	0,096	0,154
t=4	1,021	0,107	0,215
t=5	1,023	0,118	0,288
...	...	...	...
t=42	1,07	0,40	1,233

Tabella 5 - Momenti livello di Funding - Il scenario, prestazione

La media cambia seppure non in maniera molto importante ma comunque mostra un andamento crescente. Ciò implica che in media il fondo sarà sempre solvibile e che avrà anche un avanzo di risorse. Tuttavia si osserva come la volatilità aumenti di anno in anno partendo da un 7% iniziale fino ad arrivare a un 40% al quarantaduesimo anno di contribuzione. Valori molto più elevati rispetto allo scenario base. Questo spiega come mai il grafico sia molto più ampio rispetto allo studio precedente. Allo stesso modo l'asimmetria cresce anch'essa con l'aumentare dell'orizzonte temporale preso in considerazione e raggiunge livelli importanti già al quinto anno. Da notare come questa sia positiva e che quindi come ancora una volta la maggior parte dei cammini sia concentrata in livelli sotto la media. Questo significa che maggiore tempo passa, ancora di più rispetto al caso iniziale, i percentili della distribuzione si allontaneranno dal valore medio.

Per quanto riguarda il requisito di capitale per un fondo esposto a tali variazioni del tasso di interesse, bisogna osservare l'andamento di  $F_t$ .

L'andamento del patrimonio dell'impresa è riassunto nella figura seguente:



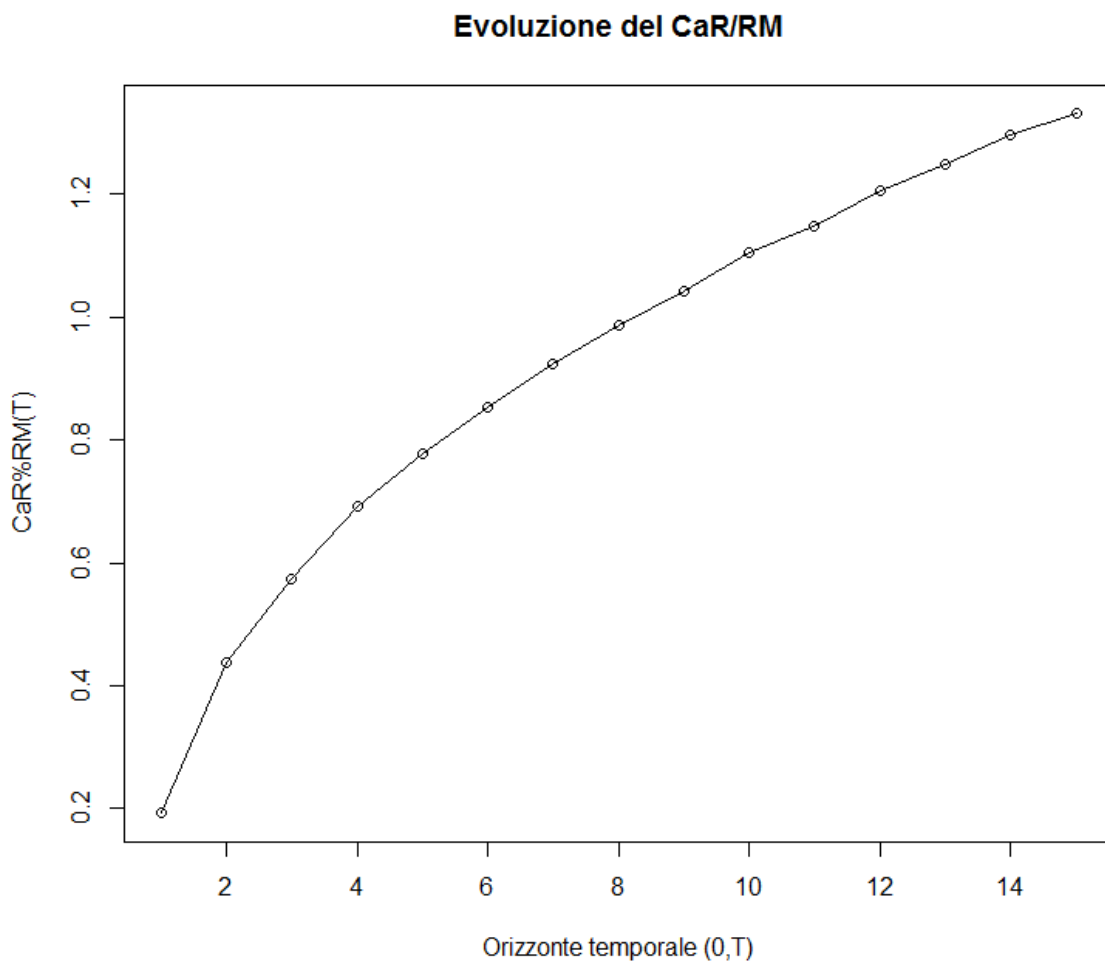
**Figura 37 - Simulazioni del patrimonio - Il scenario, prestazione**

Da questo grafico si osserva come l'andamento in media sia crescente ossia come in media si aspetti che il fondo abbia un avanzo dai propri attivi e che quindi non richieda un requisito di capitale da accantonare per pareggiare attivi e passivi, ma che anzi possa

permettersi di indebitarsi per quella cifra. Con l'aumentare degli anni la volatilità di questo patrimonio tuttavia cresce in modo molto importante poiché si è in presenza di un effetto cumulato ed è più esposto alla volatilità azionaria. L'asimmetria anch'essa cresce in maniera marcata nel tempo con valori sempre più positivi.

Per quanto riguarda il requisito di capitale in termini di Capital at Risk, si osserva in figura come questo raggiunga più rapidamente valori molto più elevati rispetto allo scenario base.

L'andamento del CaR in percentuale delle riserve matematiche del fondo è il seguente:



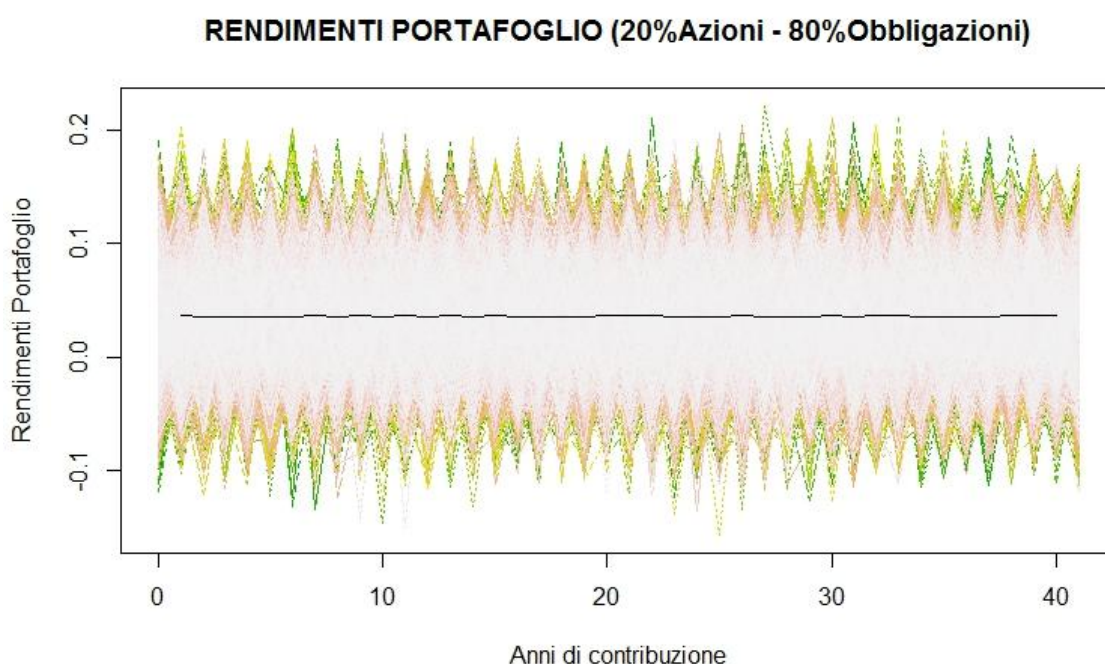
**Figura 38 - Andamento requisito di capitale - Il scenario, prestazione**

Tale valore già al primo anno è molto elevato, corrisponde infatti al 19% delle riserve matematiche e aumenta sensibilmente allungando l'orizzonte temporale, fino a raggiungere valori che superano il 100% di tali riserve al decimo anno, quindi molto prima rispetto allo scenario base. Ciò è dovuto principalmente all'aumentare della volatilità e

dell'indice di asimmetria negli anni. Infatti all'aumentare dell'antidurata la media cresce ma il percentile assume valori sempre più distanti da questa. I due effetti non si compensano, anzi la maggior volatilità e asimmetria portano ad avere un requisito di capitale ben superiore rispetto allo scenario base e di 5 volte superiore a quanto previsto dalla normativa.

### SCENARIO 3

In questo scenario si è deciso di investire l'80% delle risorse in obbligazioni e il restante 20% in azioni. Il risultato a livello di portafoglio è il seguente:

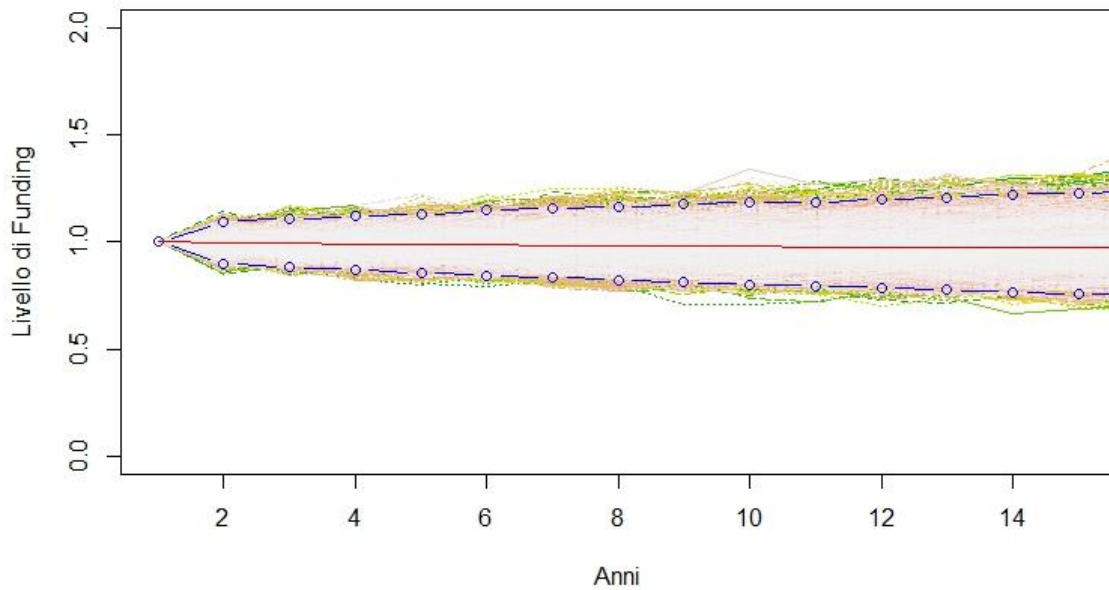


**Figura 39 - Rendimento portafoglio - III scenario**

La media in questo caso è inferiore al 4% per tutti gli anni, si attesta su valori del 3,5% e 3,6%. Di conseguenza i valori medi che ci si aspetterà dalle analisi successive devono essere minori rispetto a quelli del prim'ordine. Il risultato sarà un valore medio del livello di funding sistematicamente inferiore all'unità. Per quanto riguarda i valori estremi si osserva come l'aumento della quota obbligazionaria diminuisca i valori superiori che può raggiungere il rendimento di portafoglio e come, a differenza del primo scenario, si ha anche una diminuzione delle perdite che il fondo può subire a causa degli andamenti della componente azionaria, il cui ruolo è molto limitato.

Andando a calcolare il livello di funding del fondo si ottiene il seguente risultato.

**Livello di Funding - scenario III**



**Figura 40 - Simulazioni livello di Funding - III scenario, prestazione**

La riga nera centrale mostra un andamento medio che come si era ipotizzato è decrescente, mentre le righe blu intorno mostrano i soliti percentili delle varie distribuzioni.

I momenti relativi ai vari istanti temporali sono di seguito riassunti in tabella:

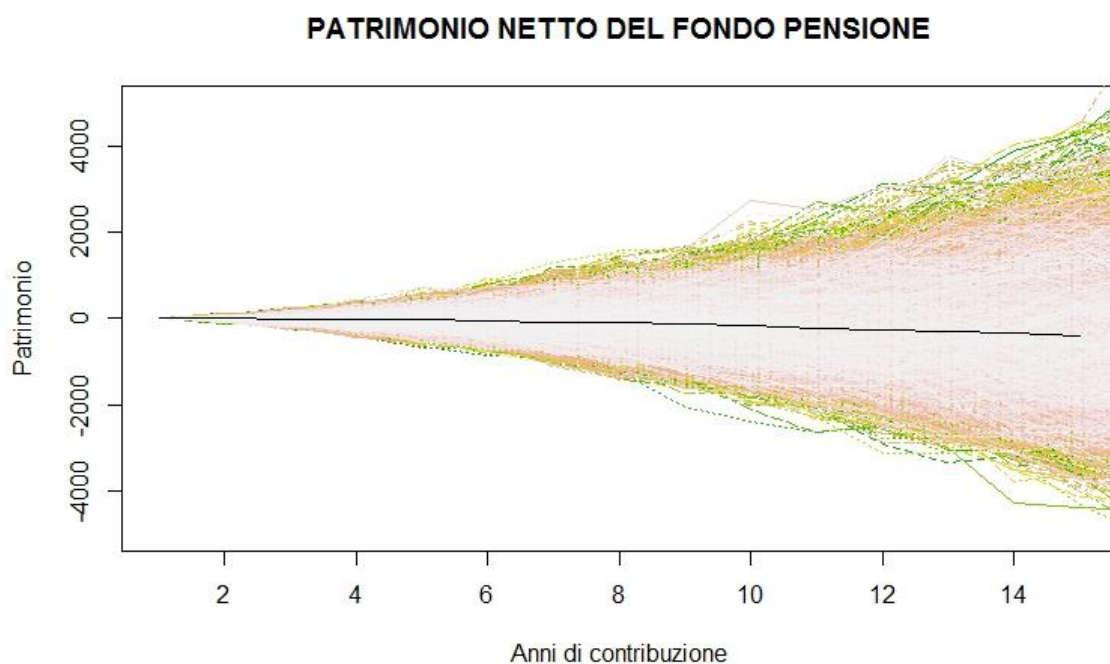
<b>Istante temporale</b>	<b>Media</b>	<b>Scarto quadr. med.</b>	<b>Indice ass.</b>
t=1	1,00	0,038	0
t=2	0,996	0,043	0,043
t=3	0,993	0,047	0,077
t=4	0,991	0,053	0,112
t=5	0,989	0,058	0,158
...	...	...	...
t=42	0,909	0,163	0,57

**Tabella 6 - Momenti livello di Funding - III scenario, prestazione**

La media cambia in modo molto importante mostrando un andamento decrescente. Ciò implica che in media il fondo sarà sempre insolubile e che in media contabilizzerà sempre una perdita. Tuttavia si osserva come la volatilità aumenti di anno in anno partendo da un 3,8% iniziale fino ad arrivare a un 16% al quarantaduesimo anno di contribuzione. Valori molto più ridotti rispetto allo scenario base. Questo spiega come mai il grafico sia molto più concentrato su valori intorno alla media rispetto allo studio precedente. Allo stesso modo l'asimmetria cresce anch'essa con l'aumentare dell'orizzonte temporale preso in considerazione e raggiunge livelli importanti. Questa è positiva e quindi ancora una volta la maggior parte dei cammini è concentrata in livelli sotto la media.

Per quanto riguarda il requisito di capitale per un fondo esposto a tali variazioni del tasso di interesse, si osserva l'andamento di  $F_t$ .

L'andamento del patrimonio dell'impresa è riassunto nella figura seguente:

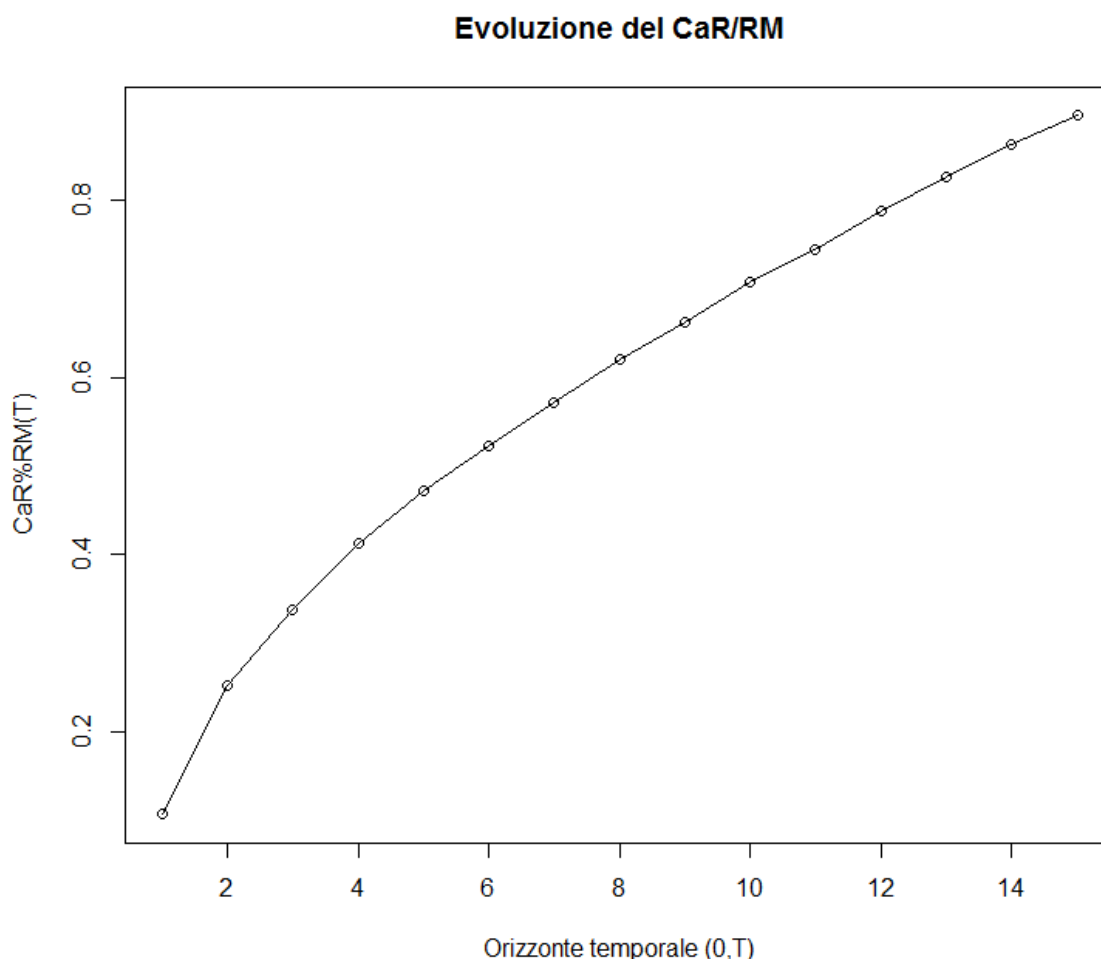


**Figura 41 - Simulazioni del patrimonio - III scenario, prestazione**

Da questo grafico si osserva come l'andamento in media sia decrescente ossia come in media si aspetti che il fondo abbia una perdita e come questo richieda un requisito di capitale ancora più importante per tener conto di questo effetto. Con l'aumentare degli anni la volatilità di questo patrimonio cresce in modo molto importante poiché si è in presenza di un effetto cumulato con una variabilità più ridotta rispetto agli scenari precedentemente analizzati.

Per quanto riguarda il CaR l'andamento della crescita è molto più blando rispetto allo scenario base, con una curva che cresce lentamente e raggiunge valori minori.

L'andamento del CaR in percentuale delle riserve matematiche del fondo risulta essere il seguente:



**Figura 42 - Andamento requisito di capitale - III scenario, prestazione**

Il valore del rapporto su un orizzonte annuo è meno elevato rispetto ai casi precedenti. Corrisponde infatti al 10% delle riserve matematiche e aumenta sensibilmente negli anni fino a raggiungere valori intorno all' 80%. Ciò è dovuto principalmente alla volatilità e all'indice di asimmetria che crescono in maniera molto leggera. Infatti all'aumentare dell'antidurata la media diminuisce e il percentile assume valori sempre negativi. La scarsa volatilità però porta a un effetto di riduzione del capitale a rischio rispetto ai casi precedenti. Questo effetto tuttavia non è sintomo di meno rischiosità dell'impresa. Infatti va ricordato che la media sta diminuendo, arrivando a valori lontani dall'unità e questo

dovrebbe far preoccupare i gestori di un fondo. Questo è sintomo di una gestione poco prudente in quanto in media il fondo si aspetta sempre una perdita. Emerge così in maniera importante come bisogna sempre e comunque porre attenzione all'andamento della media nel lungo periodo.

## 6.2 Focus: Fondo a contribuzione definita

### FASE DI ACCUMULO

#### SCENARIO 1

Il fondo a contribuzione definita che si va ora ad analizzare è composto da 5000 aderenti i quali contribuiscono in egual misura per il medesimo orizzonte temporale. Si è ipotizzato che durante la fase di accumulo il fondo garantisca un tasso di rendimento minimo pari al 4%. Se così fosse l'andamento complessivo degli asset che questo avrebbe sarebbe il seguente:

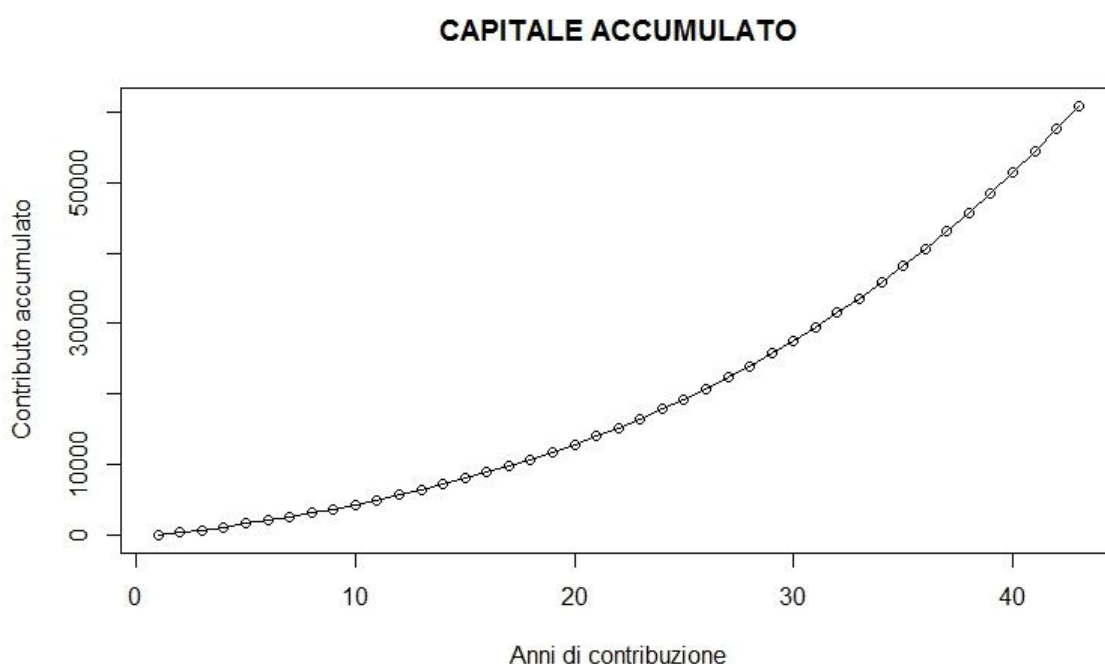


Figura 43 - Andamento contributi cumulati

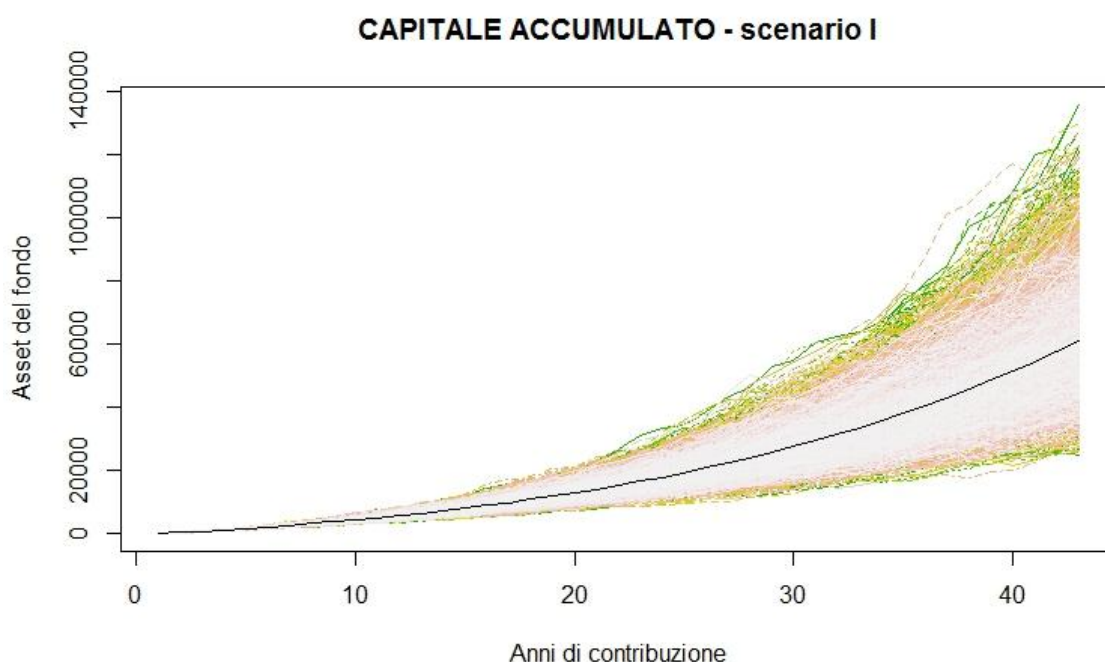
Andamento crescente con concavità rivolta verso l'alto. La crescita è influenzata da una legge di sopravvivenza. Nel caso specifico si è scelto di seguire le probabilità di sopravvivenza desunte dalla tavola SIM92. Ciò significa che se al primo anno 5000



persone pagheranno il contributo, se le ipotesi fatte sono corrette, durante gli anni sempre meno contributi verranno versati in termini di numero, fino ad arrivare all'ultimo anno dove i contributi verranno pagati da circa 3960 persone. Tuttavia va ricordato che, essendo sotto un'ipotesi di salario crescente, l'importo dei contributi diventerà sempre maggiore. Questi aspetti spiegano l'andamento che cresce sempre ma con velocità differenti.

Nello scenario base si sono fatte le stesse ipotesi del fondo a prestazione definita, di conseguenza per ogni anno la media dei rendimenti prevista dal fondo risulta essere uguale a quella dello scenario statico.

La nuova fase di accumulo sotto questi aspetti risulta essere:



**Figura 44 - Simulazioni capitale accumulato - I scenario, contribuzione**

Come si può osservare dalla figura la volatilità degli asset cresce con l'aumentare del volume considerato. L'andamento evidenziato dalla riga nera risulta essere quello medio che per le ipotesi fatte coincide con quello dello scenario statico.

Se non ci fosse un rendimento minimo garantito dal fondo pensione il rischio legato al tasso di interesse sarebbe totalmente a carico dell'aderente al fondo. Per darne un'idea si può osservare la distribuzione del tasso di sostituzione che il lavoratore avrebbe alla fine del periodo di contribuzione.

Questa mostra infatti come la media sia intorno al 30% come lo era per il caso statico, tuttavia, esistono scenari sia maggiori e soprattutto minori. Questo spiega il motivo per cui i fondi che non garantiscono un rendimento minimo sono pochi sul mercato.

Seguendo quanto fatto anche per i fondi a prestazione definita si può osservare l'andamento che avrebbe negli anni la dotazione di patrimonio che dovrebbe possedere il fondo per pareggiare gli attivi coi passivi, dove per passivi in questa situazione è inteso il valore degli asset che il fondo dovrebbe possedere per garantire il tasso del 4%.

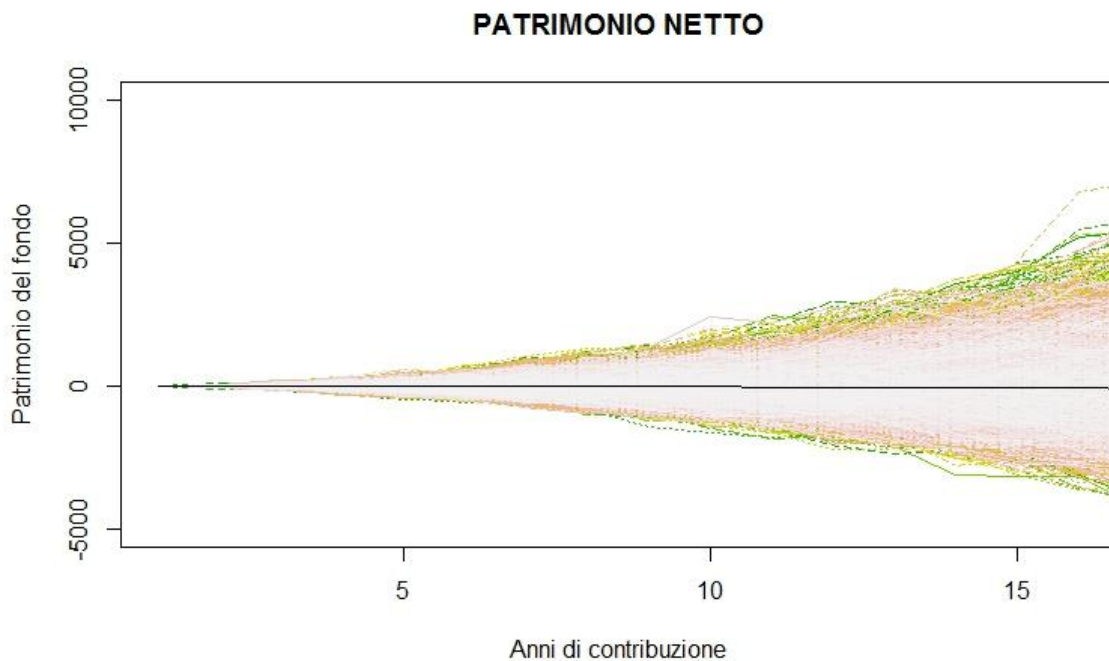


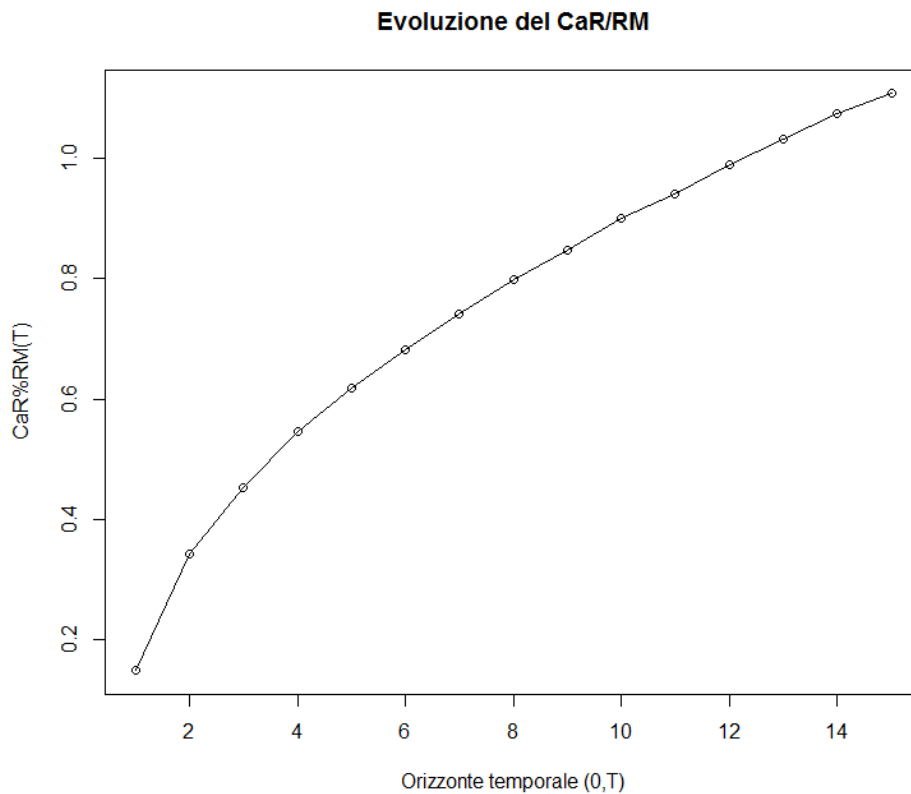
Figura 45 - Simulazioni del patrimonio netto - I scenario, contribuzione/ accumulo

Come era lecito attendersi la media rimane intorno a valori prossimi a 0, sebbene si osservi un leggero andamento decrescente in quanto si stanno prendendo in considerazione contributi cumulati, quindi la situazione dell'anno precedente influenza quella dell'anno successivo. Si osserva inoltre che la volatilità tende ad aumentare con il passare degli anni così come l'indice di asimmetria.

Su questo valore poi viene calcolato un possibile requisito di capitale mediante la tecnica del value at risk, sempre con un determinato livello di confidenza.

Per quanto riguarda il Capital at Risk si ottiene un andamento molto simile a quello visto per lo scenario I per il fondo a prestazione definita. Un andamento crescente ma meno che proporzionale.

I valori simili sono prevedibili in quanto la fonte stocastica dell'evento risulta essere la medesima. Quello che varia tra i due è solo il calcolo del contributo che nel primo caso risulta essere in funzione della prestazione mentre nel secondo caso è definito a priori. La gestione delle risorse successivamente a questa fase risulta essere lo stesso.

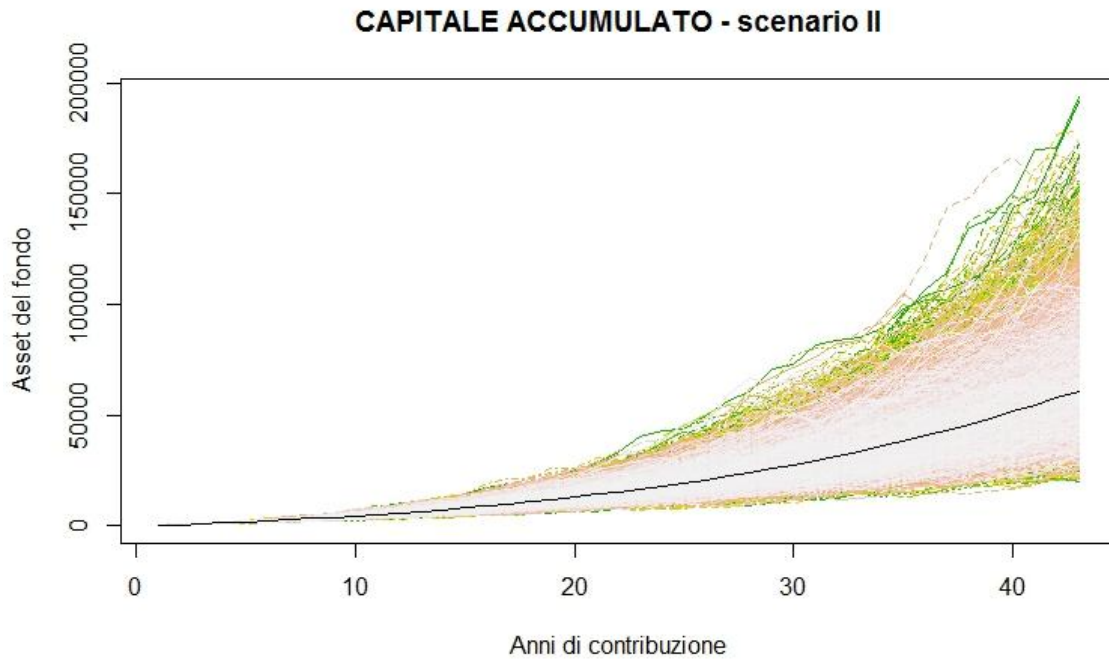


**Figura 46 - Andamento requisito di capitale - I scenario, contribuzione/accumulo**

### SCENARIO 2

Nel secondo scenario si osserva come ancora una volta il maggior peso dato alla componente azionaria comporti una maggiore volatilità dell'andamento del fondo.

I nuovi cammini simulati portano a un andamento riassunto nella figura seguente:

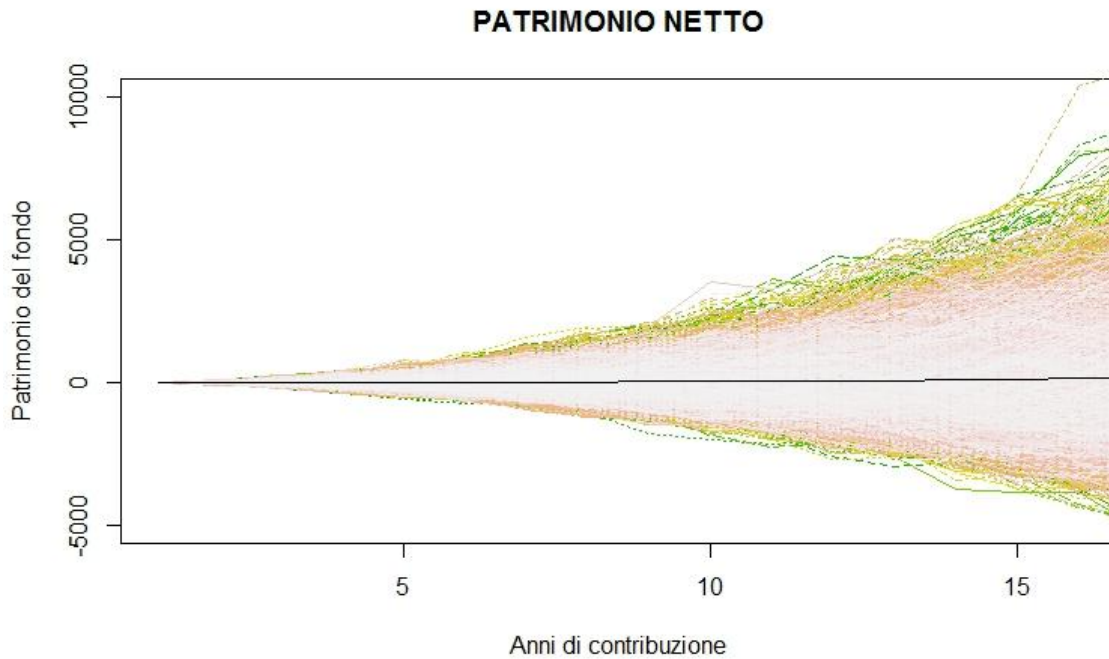


**Figura 47 - Simulazioni capitale accumulato - Il scenario, contribuzione**

In termini di tasso di sostituzione questo comporta che il fondo abbia una maggiore probabilità sia di offrirne uno molto superiore a quello del 30% iniziale, sia ha buone possibilità di offrirne uno inferiore.

Si osserva come negli ultimi anni l'asimmetria diventa molto marcata. La parte verde superiore del grafico mostra i cammini superiori al 99% e quindi in quell'area rientra soltanto l'1% dei casi della distribuzione, quindi possono essere considerati come scenari estremi da parte del fondo, difficilmente raggiungibili.

Ciò si riassume in maniera eloquente nella distribuzione del possibile patrimonio netto negli anni, come ben delineato dal grafico sottostante:



**Figura 48 - Simulazioni del patrimonio netto - Il scenario, contribuzione/ accumulo**

Il valore medio tende ad aumentare e che quindi ci si attende che il fondo sia sempre solvibile e che anzi abbia più risorse rispetto a quelle necessarie per far garantire quel rendimento agli aderenti. Tuttavia la volatilità aumenta in maniera importante, così come l'indice di asimmetria.

Utilizzando il VaR, si osserva come questo si rifletta in un requisito molto più elevato rispetto allo scenario base. Per lo stesso motivo illustrato nel grafico precedente si osservano valori simili al medesimo scenario del caso aderente al fondo pensione a prestazione definita.

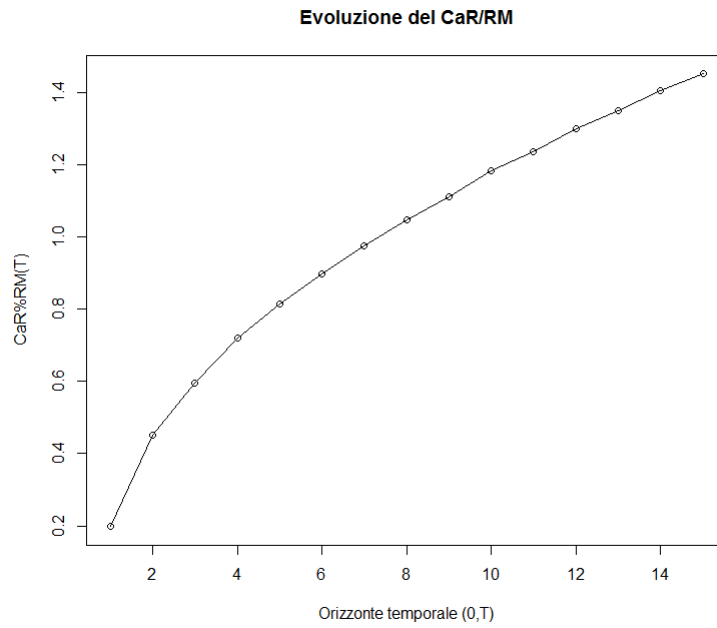


Figura 49 - Andamento requisito di capitale - Il scenario, contribuzione/accumulo

### SCENARIO 3

Nel secondo scenario si osserva come ancora una volta il maggior peso data alla componente obbligazionaria comporti una minore volatilità dell'andamento del fondo.

I nuovi cammini simulati portano a un andamento riassunto nella figura seguente:

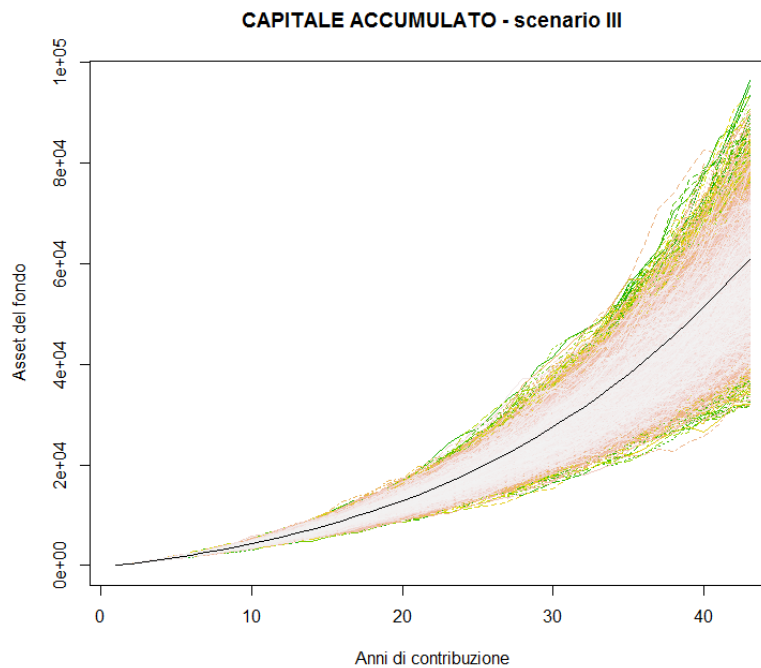
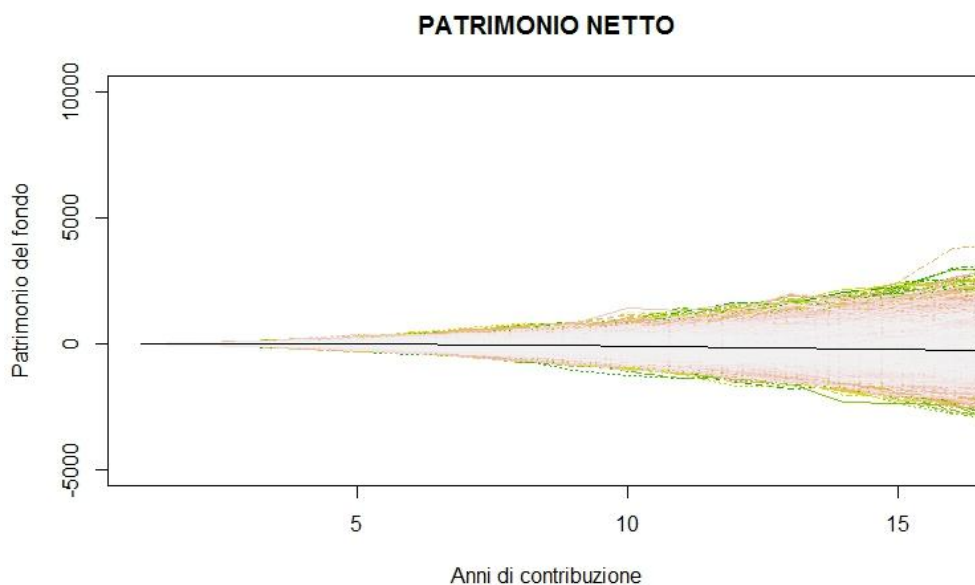


Figura 50 - Simulazioni capitale accumulato - III scenario, contribuzione

In termini di tasso di sostituzione questo comporta che il fondo abbia una minore probabilità sia di offrirne uno molto superiore a quello del 30% iniziale, sia di offrirne uno inferiore. Questa gestione è infatti molto prudente ed è la più verosimile che si possa trovare nella realtà, nel momento in cui il fondo voglia garantire un tasso minimo ai propri aderenti.

Si nota come negli ultimi anni l'asimmetria diventa meno marcata rispetto ai casi precedenti. La parte verde superiore del grafico mostra i cammini superiori al 99% e quindi in quell'area rientra soltanto l'1% dei casi della distribuzione e in tale area i valori sono molto contenuti rispetto ai casi precedenti. Ciò è sempre dovuto all'effetto contenitivo legato alla minor volatilità.

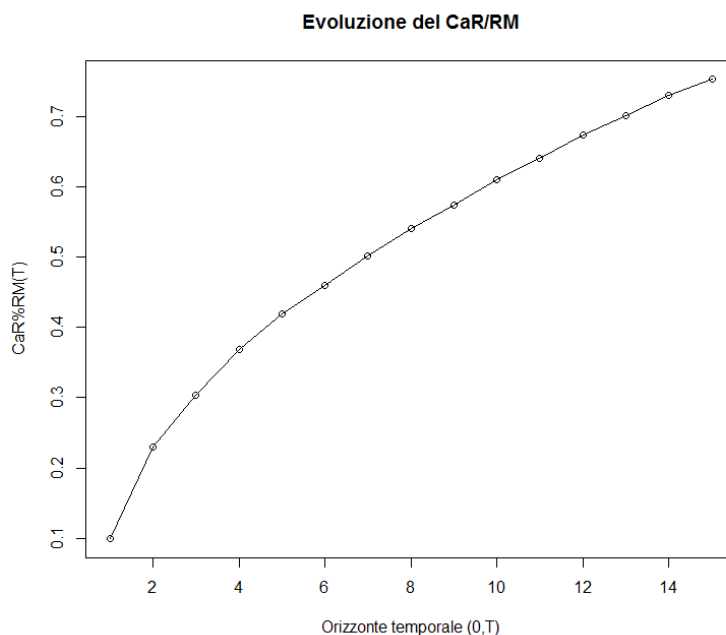
Ciò si riassume in maniera eloquente nella distribuzione del possibile patrimonio netto negli anni, come ben delineato dal grafico sottostante:



**Figura 51 - Simulazioni del patrimonio netto - III scenario, contribuzione/ accumulo**

Il valore medio tende a diminuire nel corso degli anni e quindi si prospetta un fondo pensione sempre meno in grado di garantire un tasso minimo di rendimento. Tuttavia la volatilità si riduce in maniera importante, così come l'indice di asimmetria.

Utilizzando il VaR, si osserva come questo si riflette in un requisito meno elevato rispetto allo scenario base. Per lo stesso motivo illustrato nel grafico precedente si osservano valori simili al medesimo scenario del caso aderente al fondo pensione a prestazione definita.



**Figura 52 - Andamento requisito di capitale - III scenario, contribuzione/accumulo**

## **FASE DI EROGAZIONE**

### SCENARIO 1

Per analizzare la fase di erogazione è stato preso in considerazione un gruppo di 5000 aderenti al fondo che hanno raggiunto con le stesse caratteristiche il diritto di andare in pensione e di ricevere una prestazione calcolata sulla base di coefficiente applicato al montante accumulato.

Di solito questa fase, che come si vedrà è fonte di importanti rischi, non viene gestita propriamente dal fondo pensione il quale decide di darla in gestione a una compagnia di assicurazione o un intermediario in modo da ridurre i rischi a cui tali soggetti sono esposti.

Ciò vale anche per i fondi a prestazione definita, anche se in quei casi la maggior parte dei fondi decide di distribuire le prestazioni.

Si ipotizza che queste persone abbiano versato un'aliquota del 9.61% del loro stipendio per ogni anno di contribuzione e che il fondo abbia garantito loro un tasso di interesse del 4% ogni anno. Il capitale di conseguenza accumulato singolarmente alla fine di quarantadue anni di contribuzione è di 12.82. Di conseguenza ipotizzando che il fondo sia

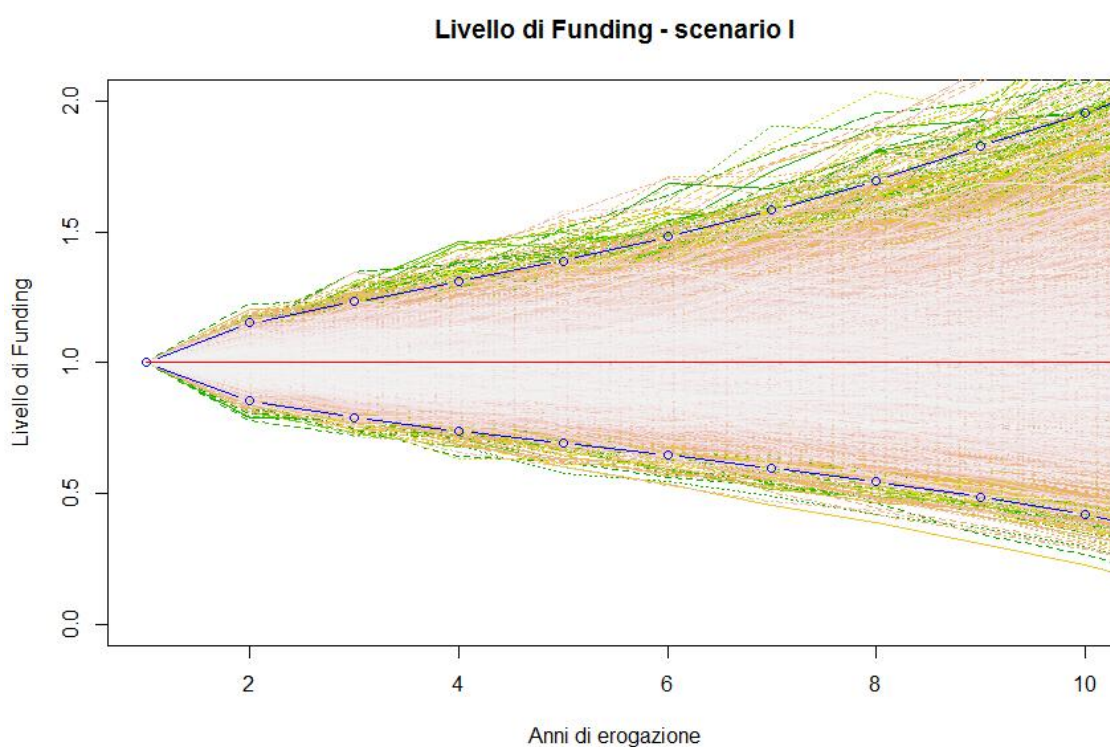


pienamente attivo nel momento di prima erogazione della rata di pensione, si ha a disposizione degli attivi complessivi di 64100.

Con questi attivi che continueranno ad essere investiti e quindi soggetti al rischio di mercato, dovranno essere pagate le prestazioni di anno in anno e accantonate riserve per far fronte agli impegni negli anni successivi.

La prima rata di pensione erogata al singolo soggetto sarà pari a 1,05, ed è stata calcolata mediante le basi di prim'ordine scelte dal fondo pensione a prestazione definita. Si farà riferimento perciò alla SIM92, a un tasso tecnico  $j$  del 4% e a un tasso di rivalutazione delle prestazioni per ogni anno pari al 2%.

Il livello di funding esposto a tali variazioni del tasso di interesse risulta essere il seguente:



**Figura 53 - Simulazioni livello di Funding - I scenario, erogazione**

Si osserva come, rispetto alla fase di accumulo, ancora la media sia fissa a 1 in seguito alla scelta di asset allocation e come la variabilità tenda ad aumentare. Questo maggior effetto è legato alla non più presenza di contributi da parte del lavoratore. Gli attivi non ricevono più un sostegno economico fuori dal fondo e di conseguenza una perdita pesa di più in termini cumulati rispetto alla fase di accumulazione. Tanto è vero che la variabilità al decimo anno già raggiunge i valori che nella fase di accumulo si raggiungevano verso il quindicesimo anno.

I momenti del livello di funding in questa fase sono di seguito illustrati:

Istante temporale	Media	Scarto quadr. med.	Indice ass.
t=1	1,00	0,058	0
t=2	1,00	0,086	0,112
t=3	1,00	0,110	0,188
t=4	1,00	0,134	0,264
t=5	1,00	0,161	0,335

Tabella 7 - Momenti livello di Funding - I scenario, erogazione

Ancora si osserva come i momenti dimostrino una distribuzione con asimmetria positiva. Per quanto riguarda il requisito di capitale di cui il fondo dovrebbe dotarsi per pareggiare attivi e passivi si ha la seguente distribuzione per anno

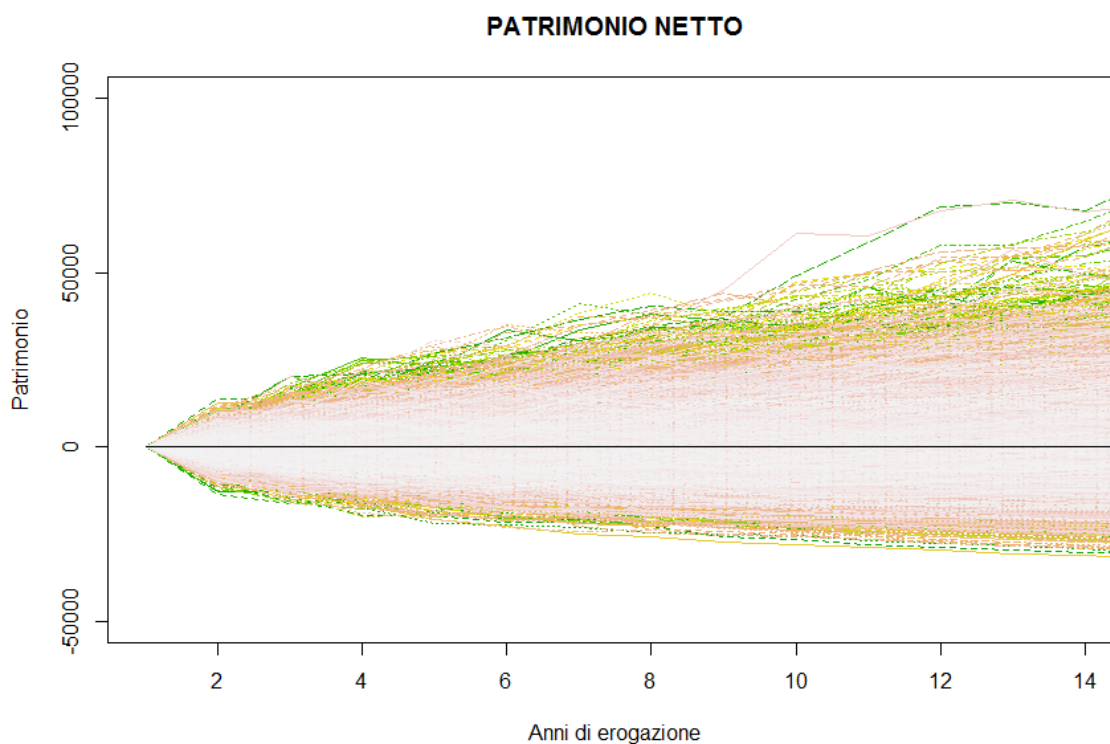


Figura 54 - Simulazioni del patrimonio netto - I scenario, erogazione

Il valore medio coincide come da aspettativa con 0 e quindi il fondo in media non ha bisogno di un patrimonio per far fronte agli andamenti sfavorevoli del tasso di interesse.

Con l'aumentare degli anni la volatilità di questo patrimonio tuttavia cresce sempre di più poiché si è in presenza di un effetto cumulato. Allo stesso modo l'asimmetria cresce in maniera marcata nel tempo con valori sempre più positivi.

Attraverso il Value at Risk è stato calcolato il requisito di capitale ed è stato rapportato al valore delle riserve per ogni singolo anno.

Il valore in percentuale del CaR nei vari anni è definito dall'andamento seguente:

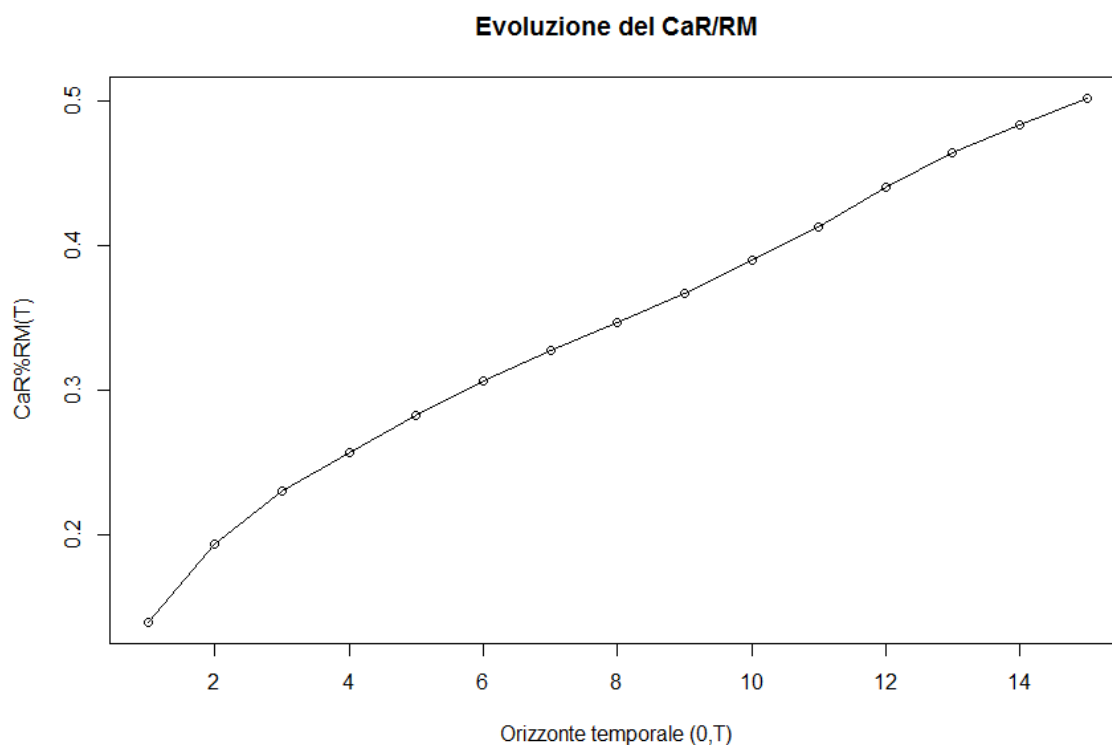


Figura 55 - Andamento requisito di capitale - I scenario, erogazione

Il grafico ha ovviamente un andamento crescente e sebbene nei primi anni abbia dei valori minori rispetto a quelli dello scenario base delle fasi di accumulo, tale requisito cresce a una velocità maggiore e già al quindicesimo anno raggiunge la quota del 50%.

Ciò mostra come la maggiore volatilità e asimmetria portino a un importante requisito di capitale, soprattutto nel caso in cui non vengano pagati più i contributi.

## SCENARIO 2

Nel secondo scenario, alzando la componente azionaria, si osserva un notevole aumento della volatilità che già era elevata nello scenario di base. Poiché il valore atteso dei rendimenti aumenta con questa asset allocation, la media nel lungo periodo del livello di funding mostra un andamento crescente, tuttavia si osserva che questo ha un costo

consistente in una maggiore volatilità. Per la prima volta infatti si osservano valori che scendono sotto lo 0 dopo un breve orizzonte temporale. È pur vero che si sta considerando un caso estremo, tuttavia non è un elemento da sottovalutare.

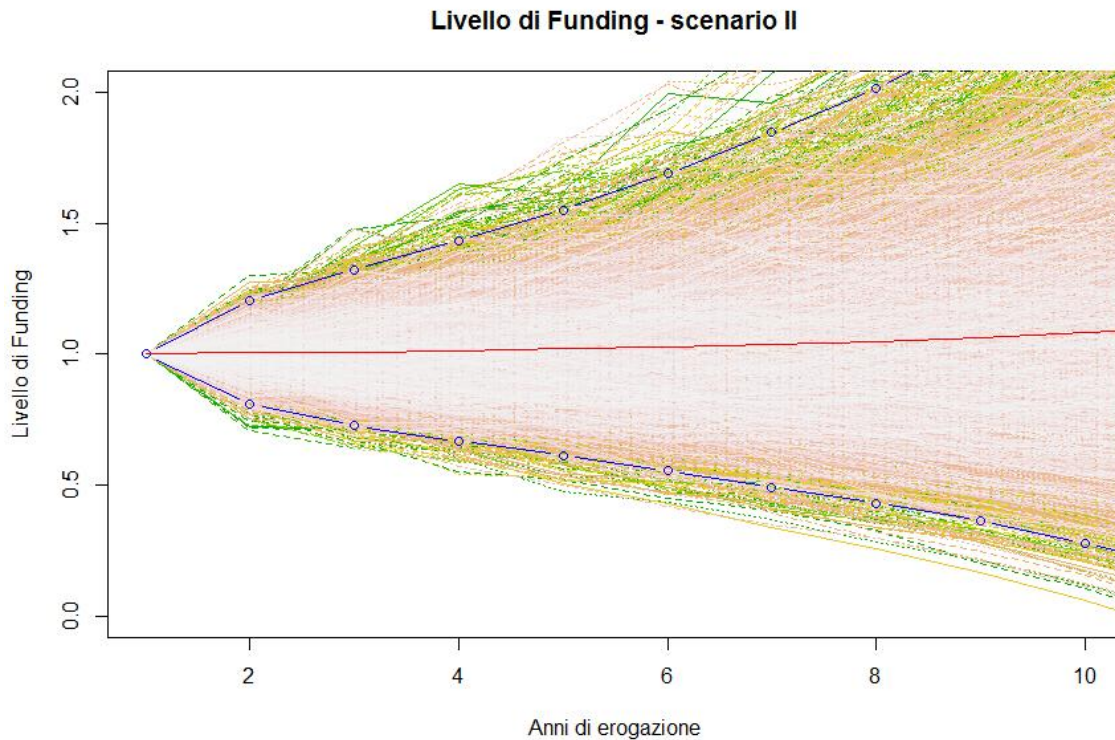


Figura 56 - Simulazioni livello di Funding - II scenario, erogazione

I momenti ai vari istanti temporali sono di seguito riassunti.

Si può notare, come era prevedibile, un aumento del livello di funding in media e di un sensibile incremento delle volatilità e dell'indice di asimmetria rispetto allo scenario base. Anche in questo caso i valori dei momenti legati a questo scenario sono molto più importanti rispetto a quelli del corrispondente scenario della fase di accumulo.

La media parte da 1 fino a raggiungere 1.65. La standard deviation al primo anno è pari a 0.77 fino a raggiungere un valore di 0.21 al quinto anno in confronto con quanto visto per la fase di accumulo i cui valori partivano da 0.77 per arrivare a 0.118 al quinto anno.

Discorso analogo può essere fatto per l'asimmetria.

Istante temporale	Media	Scarto quadr. med.	Indice ass.
t=1	1,00	0,077	0
t=2	1,005	0,115	0,154
t=3	1,010	0,147	0,256
t=4	1,013	0,181	0,356
t=5	1,02	0,218	0,445

Tabella 8 - Momenti livello di Funding - Il scenario, erogazione

La distribuzione del patrimonio del fondo risulta essere la seguente:

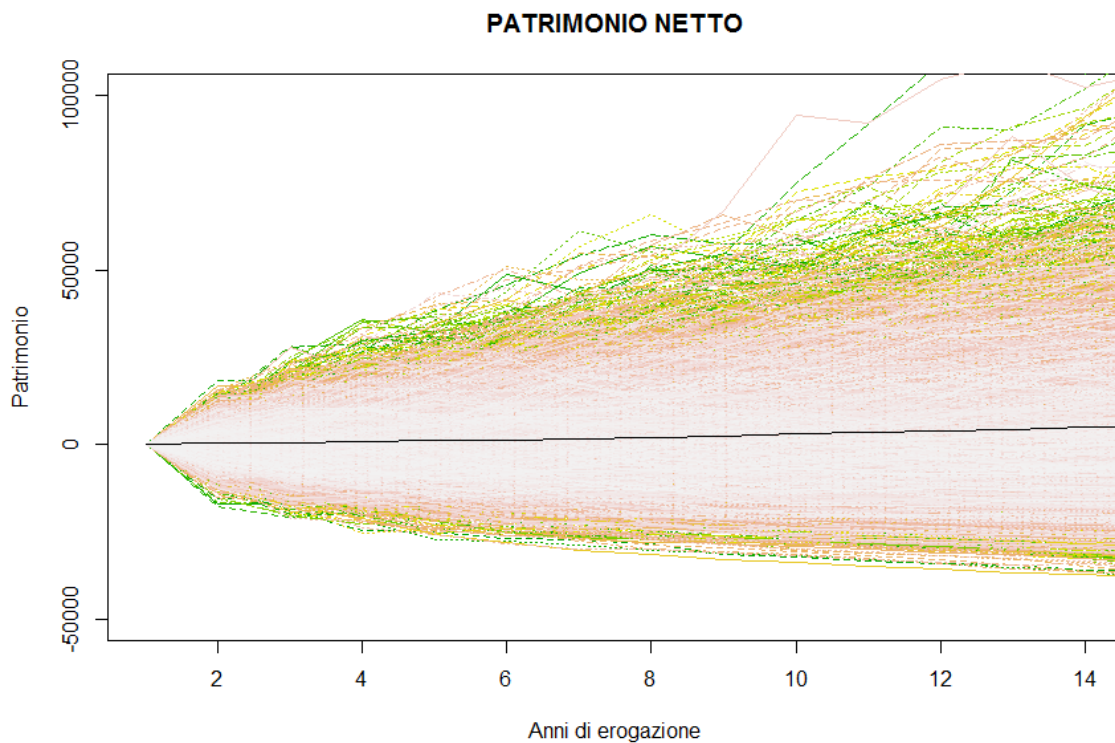
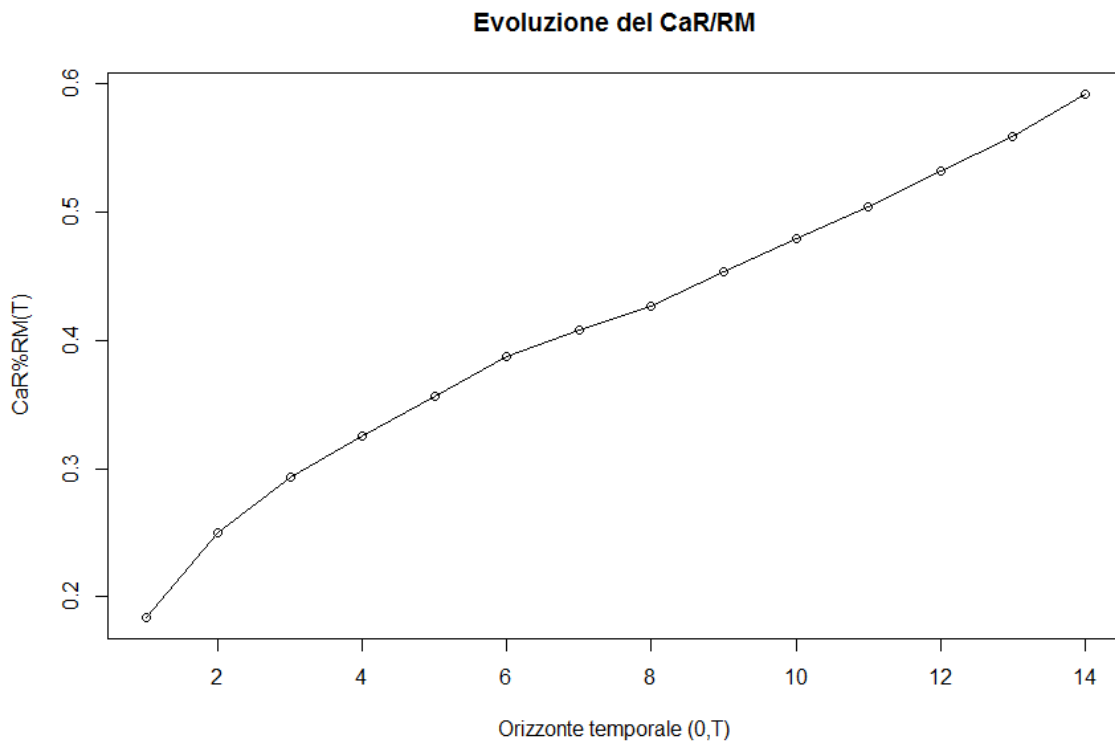


Figura 57- Simulazioni del patrimonio netto - Il scenario, erogazione

Valgono le considerazioni fatte fino ad ora: si ha una media crescente e un valore che diventa sempre più importante col passare degli anni e che risulta di gran lunga più elevato rispetto allo scenario base. Infatti sebbene la media aumenti l'effetto della varianza è assai maggiore e questo comporta un maggior distacco tra le due componenti di attivo e passivo.

Il requisito di capitale calcolato in funzione delle riserve matematiche mostra come questo sia ben maggiore rispetto allo scenario di base, partendo da un valore molto prossimo al 20% fino a raggiungere il 60% già al quindicesimo anno.

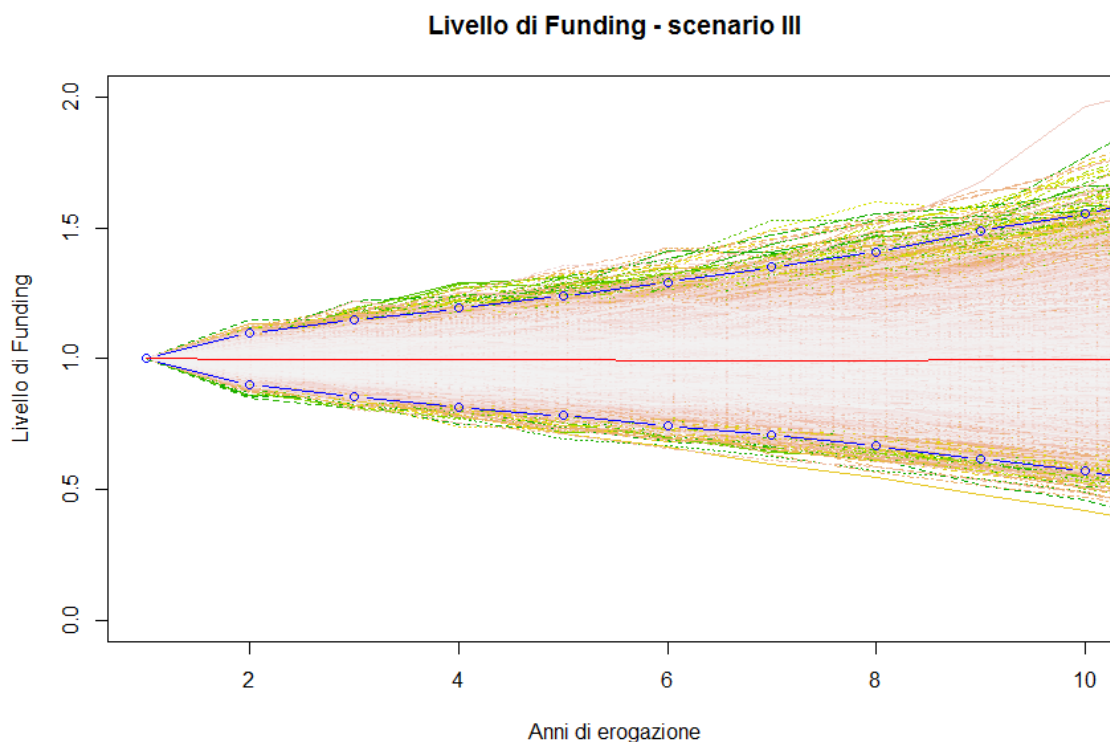
Questo dimostra come una gestione di questo tipo, così aggressiva, in una fase così delicata come quella di erogazione possa portare a perdite ingenti per il fondo pensione.



**Figura 58 - Andamento requisito di capitale - Il scenario, erogazione**

### SCENARIO 3

Nel terzo scenario, alzando la componente obbligazionaria, si osserva una diminuzione della volatilità. Poiché il valore atteso dei rendimenti diminuisce con questa asset allocation, la media nel lungo periodo del livello di funding mostra un andamento decrescente, tuttavia questo comporta una diminuzione della volatilità. I valori sono maggiormente concentrati intorno alla media e anche l'indice di asimmetria mostra valori più contenuti.



**Figura 59 - Simulazioni livello di Funding - III scenario, erogazione**

I momenti ai vari istanti temporali sono di seguito riassunti.

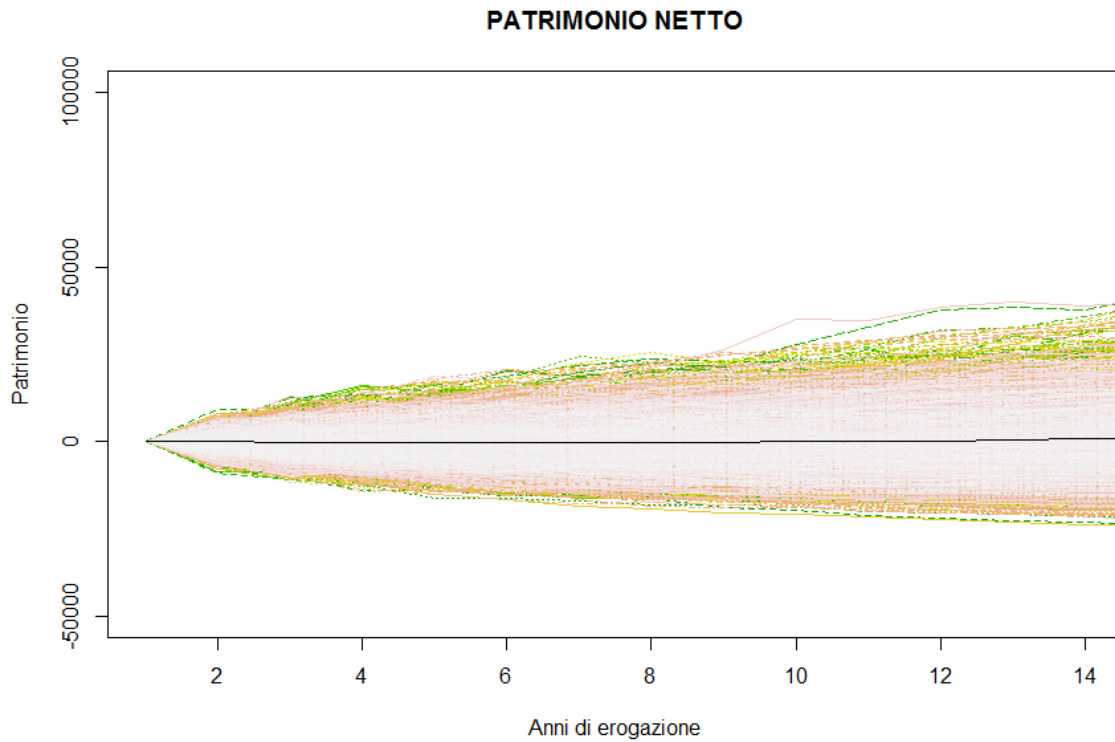
Si può notare, come era prevedibile, una diminuzione del livello di funding in media e di un decremento delle volatilità e dell'indice di asimmetria rispetto allo scenario base.

Anche in questo caso i valori dei momenti legati a questo scenario sono molto più importanti rispetto a quelli del corrispondente scenario della fase di accumulo.

<b>Istante temporale</b>	<b>Media</b>	<b>Scarto quadr. med.</b>	<b>Indice ass.</b>
t=1	1	0,038	0
t=2	0,998	0,057	0,069
t=3	0,997	0,072	0,119
t=4	0,995	0,089	0,172
t=5	0,994	0,106	0,225

**Tabella 9 - Momenti livello di Funding - III scenario, erogazione**

La distribuzione del patrimonio del fondo risulta essere la seguente:

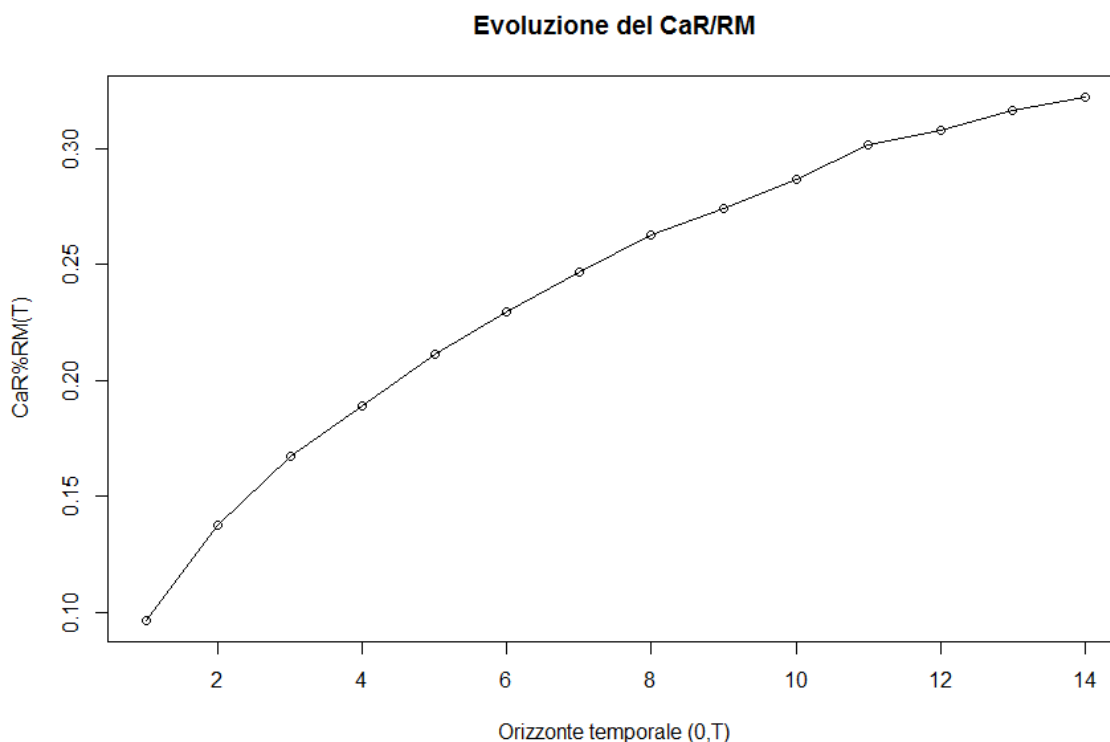


**Figura 60 - Simulazioni del patrimonio netto - III scenario, erogazione**

Si ha una media decrescente e un valore che diventa sempre più importante col passare degli anni e che risulta più contenuto rispetto allo scenario base. Infatti sebbene la media aumenti l'effetto della varianza è assai maggiore e questo comporta un maggior distacco tra le due componenti di attivo e passivo.

Il requisito di capitale calcolato in funzione delle riserve matematiche mostra come questo sia minore rispetto allo scenario di base, partendo da un valore molto prossimo al 9% fino a raggiungere il 30% già al quindicesimo anno.





**Figura 61 - Andamento requisito di capitale - III scenario, erogazione**

## **7 Rischio di longevità**

### **7.1 Introduzione**

In questa sezione verrà analizzato come il rischio di longevità influenza il livello di funding di un fondo pensione. In particolar modo ci si sofferma su tre dei diversi metodi stocastici esposti nel capitolo terzo, nel dettaglio quelli di Brouhns et al., denominato BDV, Renshaw Haberman, RH, e quello di Cairns, Blake, Dowd, CBD. È stata effettuata una stima per verificare quale dei metodi meglio si adatti alla popolazione italiana, a seconda delle età considerate, e attraverso questi metodi effettuare delle simulazioni in modo tale da osservare le possibili traiettorie della popolazione nel futuro. Questi andamenti verranno in seguito paragonati all'evoluzione prevista dalla tavola del prim'ordine e si osserverà come varierà il livello di funding in funzione di tali andamenti e se sarà necessario un requisito di capitale.

L'approccio seguito risulta essere sempre quello generazionale.

## 7.2 Analisi della popolazione italiana

A seguito della mancanza di un dataset specifico per il fondo pensione si è effettuata l'analisi sulla popolazione italiana in generale, ovviamente focalizzandosi sul sesso specifico della generazione in oggetto che è quello maschile. Numerosi studi hanno dimostrato come nei paesi europei l'andamento della mortalità per maschi e femmine abbia importanti differenze, soprattutto per quanto riguarda le età più estreme.

Scaricando i dati dal 1960 al 2010 dal Human Mortality Database, si ha che l'andamento del logaritmo dei tassi di mortalità al variare degli anni assume il seguente cammino:

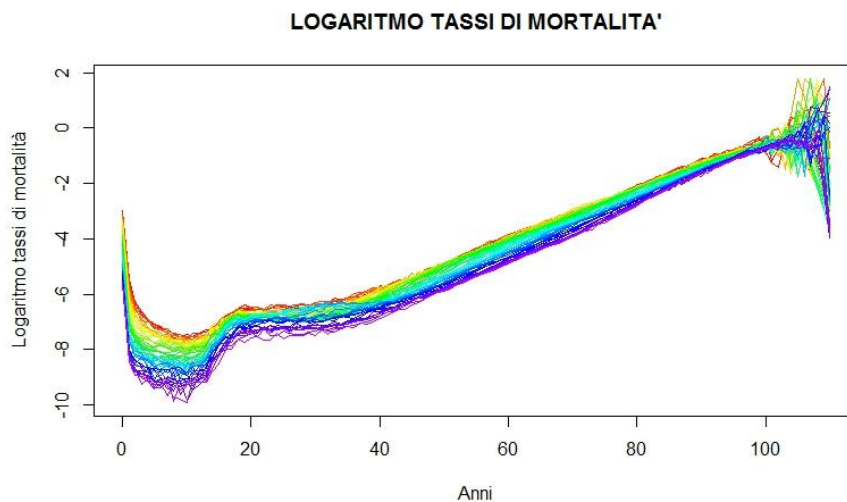


Figura 62 - Evoluzione della mortalità italiana

Da tali andamenti si evince come la mortalità sia molto alta per il primo anno di vita. In seguito questa diminuisce in maniera importante, fino all'inizio dell'adolescenza, dove comincia a crescere in maniera repentina, soprattutto a causa degli incidenti stradali e poi rimane leggermente stabile fino ai quarant'anni per poi crescere quasi linearmente fino a novant'anni, aumentando sempre di più la pendenza. Dopo i novant'anni questa ha degli andamenti molto irregolari che portano a un'importante variabilità che i modelli da noi presi in considerazione non riescono a cogliere pienamente. In alcuni casi si ha infatti anche una diminuzione della mortalità: arrivati a 104 anni, ad esempio, la probabilità di morire prima di raggiungere i 105 anni può essere minore rispetto a quella tra novanta e novantuno.

Si osserva inoltre che la mortalità col passare degli anni diminuisce significativamente per tutte l'età. Si delinea come il tasso centrale di mortalità si sia in media dimezzato negli

ultimi trent'anni. Ciò nonostante, questa riduzione si riferisce al raggiungimento di diverse età con un effetto maggiore per le persone più giovani.

La figura sottostante mostra il rapporto tra il tasso centrale di mortalità nei singoli anni di calendario in rapporto con quello del 1960. Si osserva come ci sia quasi sempre un decremento lineare per l'età tra sessanta (linea blu) e ottanta (linea grigia) e un cammino differente per l'età quaranta (linea rossa). In aggiunta per l'età venti il tasso sembra stabilizzarsi per un certo periodo tra il 1970 e il 1995, per poi scendere anche in maniera importante del 66% nell'ultima decade.

Infine, come da atteso, un trend molto irregolare è osservato per l'età estreme, nel nostro caso 100 anni (linea nera).

#### Andamento del tasso centrale di mortalità al variare delle età e anno di calendario

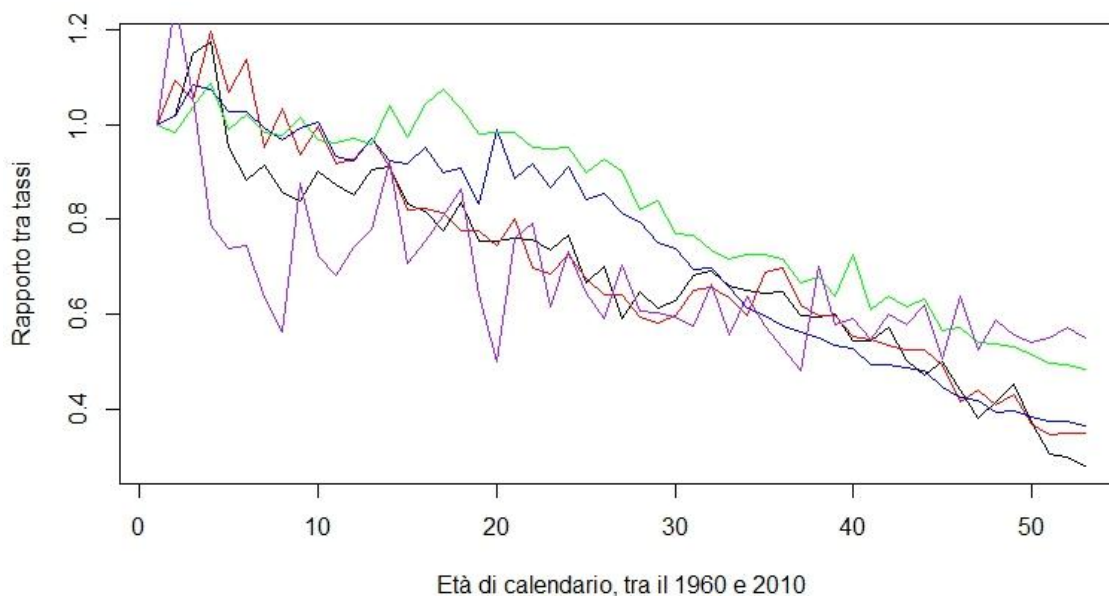


Figura 63 - Rapporto tra il tasso centrale di mortalità nei singoli anni di calendario in rapporto con quello del 1960

I tassi aggregati di mortalità mostrano invece come sia significativa la volatilità di un anno con l'altro. Questo è specialmente corretto per le età giovani, dove il numero delle persone morte è relativamente ridotto, e alle età molto anziane.

Analizzando i tassi di incremento, ottenuti come gli annuali miglioramenti all'età  $x$  dall'anno  $t$  all'anno  $t+1$ , si osserva come chiaramente nella popolazione italiana sia presente un effetto coorte. Questo è mostrato nella figura seguente, dove i pallini più chiari mostrano degli incrementi più elevati, rispetto a quelli più scuri. Sotto questo aspetto i nati tra il 1920 e il 1925 sono specificatamente evidenziati. Il color di questa

diagonale è più chiaro rispetto alle altre diagonali, indicando che gli individui nati intorno a quegli anni hanno sperimentato un incremento nella probabilità di sopravvivenza più importante rispetto alle persone nate prima o dopo.

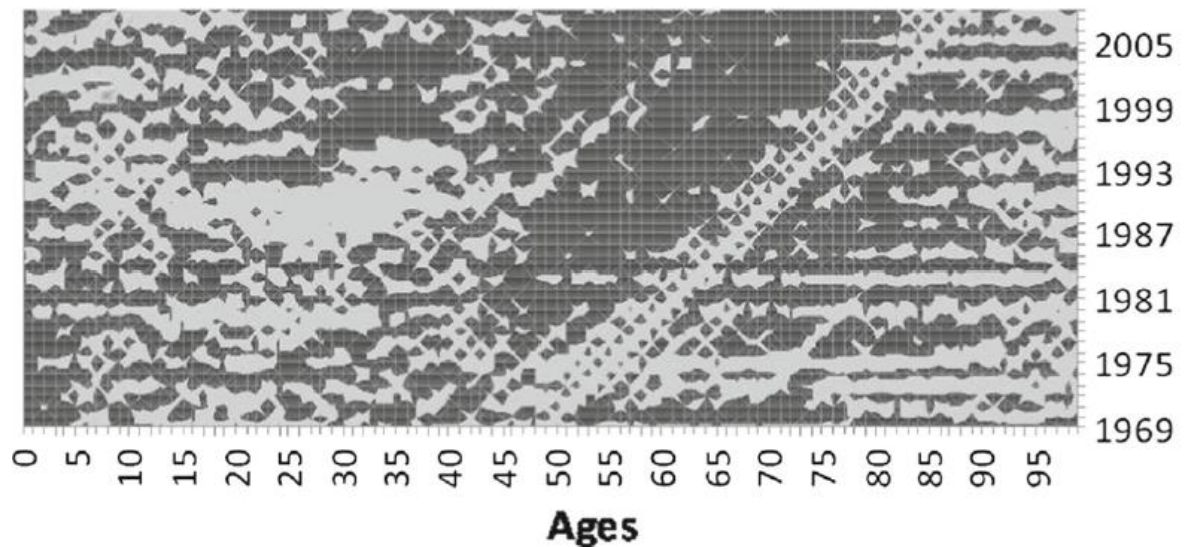


Figura 64 - Effetto Coorte della popolazione italiana

### 7.3 Focus: Fondo a prestazione definita

Nel caso di un fondo a prestazione definita si è deciso di osservare solamente la fase di accumulazione.

Perciò il fitting dei modelli è stato fatto sull'età che vanno da 25 a 67, quindi corrispondenti alla fase di accumulo e utilizzando come data set iniziale le tavole di mortalità tra il 1960 e il 2010.

Su tutti i modelli affinché sia possibile una comparazione è stata scelta alla base un'ipotesi di distribuzione Poissoniana per quanto riguarda la distribuzione dei decessi per una determinata età e un determinato anno di calendario.

Per quanto riguarda il modello BDV l'output derivante dal modello è il seguente:

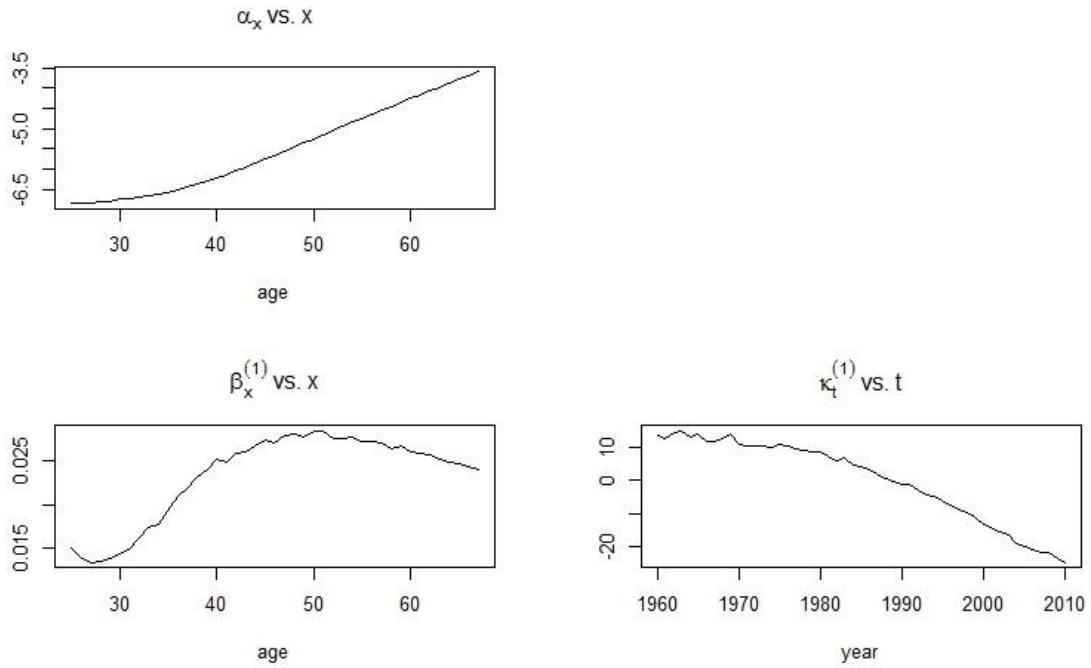


Figura 65 - Output BDV, 25-67, 1960-2010

Si può osservare come, con l'introduzione della componente poissoniana, l'effetto della volatilità dei primi anni sia ben colto dal modello, osservando l'andamento non lineare.

Per il RH si ha invece il seguente output:

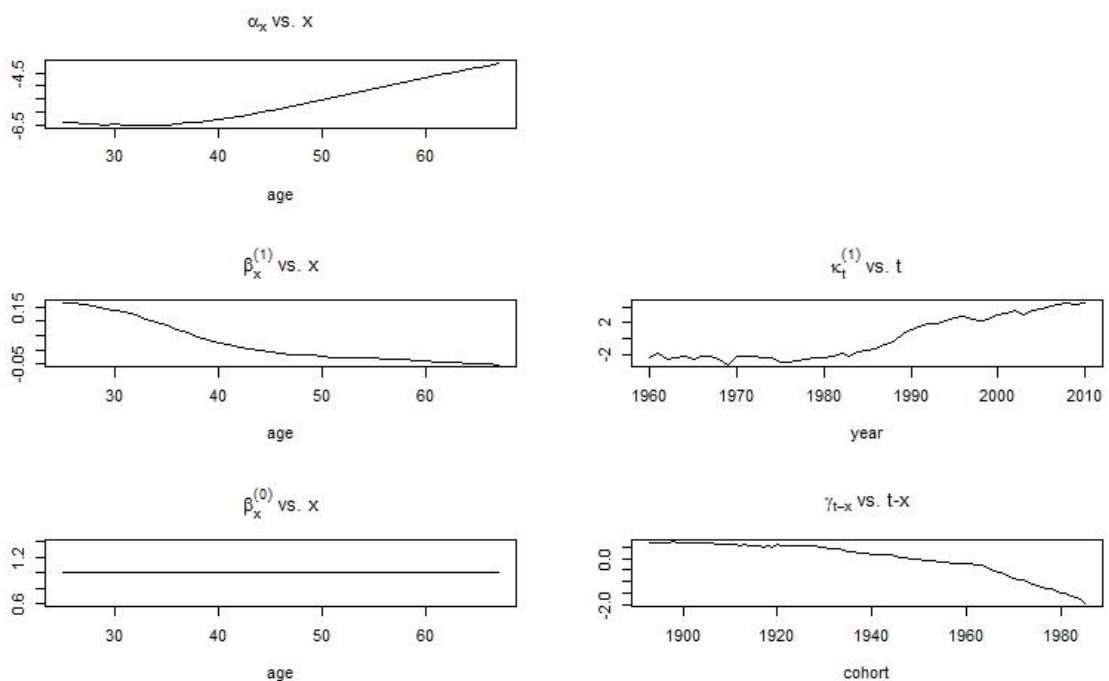


Figura 66 - Output RH, 25-67, 1960-2010

L'aggiunta del termine di generazione porta a dei cambiamenti dell'output delle altre componenti, ad eccezione di  $\alpha$  che, sebbene con minimi cambiamenti, mostra un

andamento simile al metodo precedente. Questa risulta essere comunque la componente principale del trend.

Per il modello CBD si ha invece il seguente output:

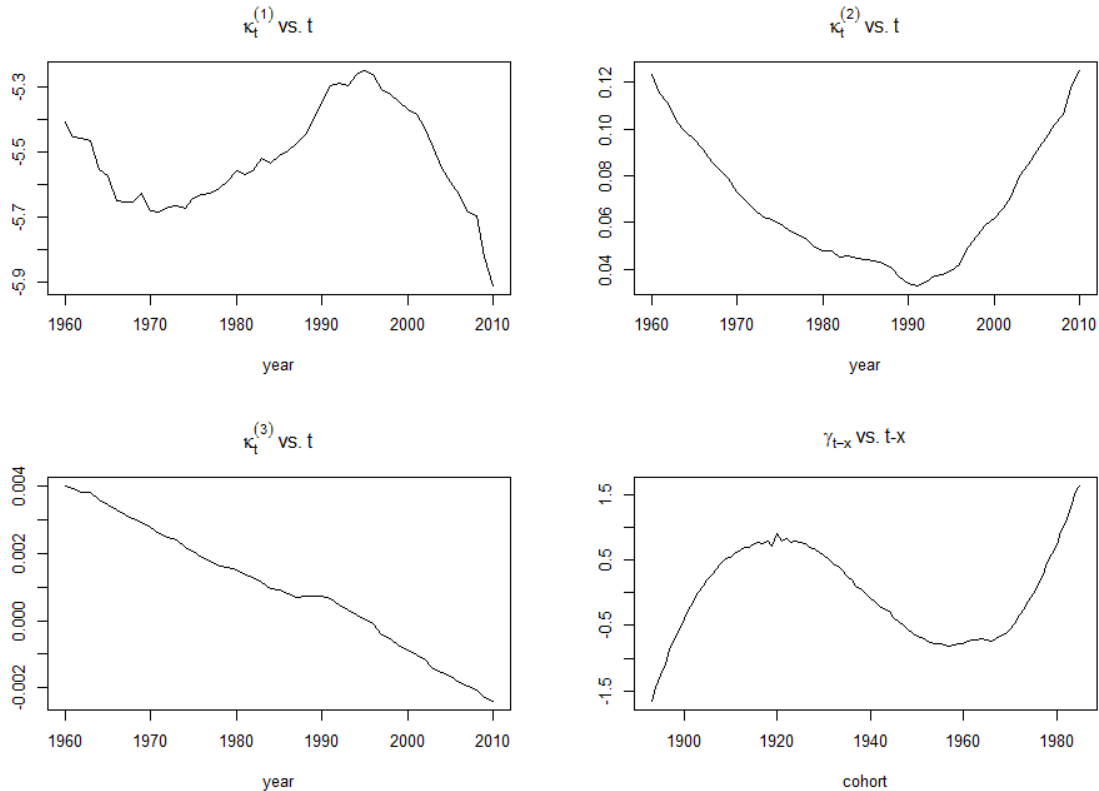


Figura 67 - Output CBD, 25-67, 1960-2010

È interessante osservare come il termine della coorte influenzi il valore di  $\beta_x^1$  anche se  $\gamma_{t-x}$  ha un andamento vicino allo 0. L'andamento di  $\beta_x^0$  è come ci si aspetta pari a 1, indicando che per quell'età non si assumono rilevanti cambiamenti biologici o ambientali che modifichino quelle età.

L'effetto coorte è più evidente nel modello di CBD dove ha una maggiore variabilità con una fluttuazione intorno al valore 0, coerentemente con le imposizioni poste dal modello teoricamente. È interessante come ci sia un andamento crescente fino ai primi anni del 1900 per poi avere un movimento decrescente degli anni successivi dopo i quali la volatilità è meno sensibile. CBD è in grado di mostrare le due importanti fluttuazioni connesse alle guerre mondiali ma anche la leggera tendenza realizzata tra i due conflitti. Si ha infatti una maggiore variabilità dell'effetto di generazione tra il 1920 e il 1925 con maggiore incremento dei tassi di mortalità.

Per quanto concerne la scelta del modello da utilizzare Cairns Blake e Dowd hanno proposto dei criteri, analizzati nel terzo capitolo, che si basano su considerazioni generali di buon senso e altri riguardanti il fitting del modello.

Un primo metodo potrebbe essere quello di comparare i modelli basandosi sul valore massimo della funzione di logVerosimiglianza, tuttavia questa scelta sarebbe fuorviante in quanto è naturale per i modelli che hanno più parametri assicurare un miglior fitting, soprattutto se i modelli presi in considerazione sono annidati come nel caso in oggetto: se un modello è un caso speciale di un altro, allora il modello con più parametri certamente avrà un massimo più elevato sebbene il vero modello sia quello con meno parametri.

Per superare tale limite, in favore di una scelta di un modello più parsimonioso, si usa penalizzare il modello che è sovra-parametrizzato assumendo che, per ogni parametro aggiunto, è necessario un significativo miglioramento in termini di massima verosimiglianza. Si è scelto perciò di far leva sul BIC e AIC che non solo permettono di comparare modelli che sono annidati ma anche che non effettuano alcuna assunzione a priori circa il ranking dei modelli, cosa che al contrario fanno i test di ipotesi. Inoltre l'utilizzo di BIC e AIC è giustificato dal fatto che tutti i modelli hanno alla base la stessa ipotesi distributiva. Tali criteri infatti non possono essere comparabili se fanno assunzioni di probabilità diverse o di variabili dipendenti differenti.

I BIC e gli AIC dei tre modelli scelti sono i seguenti:

<b>Metodologia applicata</b>	<b>BIC</b>	<b>AIC</b>
RH	25583,84	24200,43
CBD	26124,82	24832,51
BDV	39819,51	39050,95

Come si evince dalla tabella il modello da scegliere è il RH, in quanto presenta valori più bassi. Si osserva come l'aggiunta del valore del fattore della coorte porti a un incremento importante del fitting del modello sul dataset iniziale.

Un'ulteriore analisi che è possibile effettuare è sui residui.

I modelli con una maggiore verosimiglianza hanno una minore varianza di residui standardizzati. Tuttavia, se la varianza dei residui standardizzati è significativamente più grande di 1, i dati sono spesso definiti con una distribuzione di Poisson over-dispersed. Generalmente si assume che questa sovra dispersione non ha un significato importante sulla stima delle future dinamiche dei tassi di mortalità sottostanti, tuttavia un modello di Poisson potrebbe sottostimare la futura variabilità dei tassi di mortalità. In aggiunta l'assunzione di decessi distribuiti come una Poisson e indipendenti per ogni età e anno, causa che i residui standardizzati approssimativamente siano uguali a una i.i.d. Normale Standard. Un modo semplice per valutare l'assunzione di i.i.d. è guardare all'andamento dei positivi e dei negativi residui standardizzati. Questi infatti mostrano ancora una volta come non sia appropriato il BDV in quanto non viene preso in considerazione l'effetto coorte, con valori diagonali fortemente marcati. I residui osservati per anno non mostrano alcun trend particolare e i valori che assumono sono poco volatili. Per quanto riguarda le simulazioni dei cammini che tale modello potrà avere sono state utilizzate due diverse tecniche. Per quanto riguarda il valore del parametro di generazione è stato utilizzato come suggerito in letteratura un processo ARIMA(1,1,0). Per il parametro invece  $k_t^1$  è stato utilizzato l'Algoritmo 2 presentato in Renshaw & Haberman (2009).

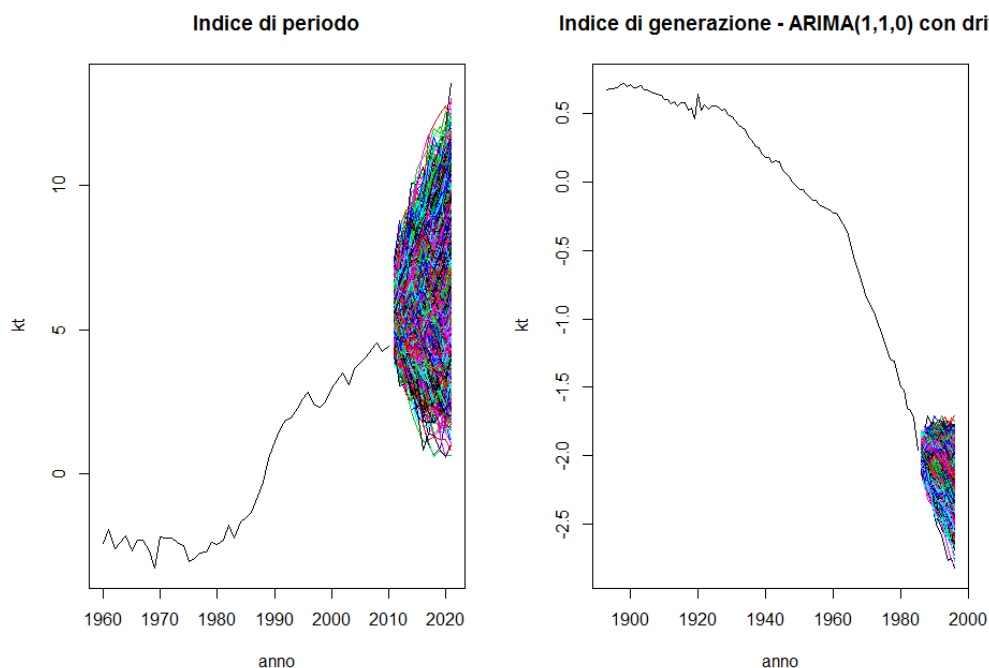
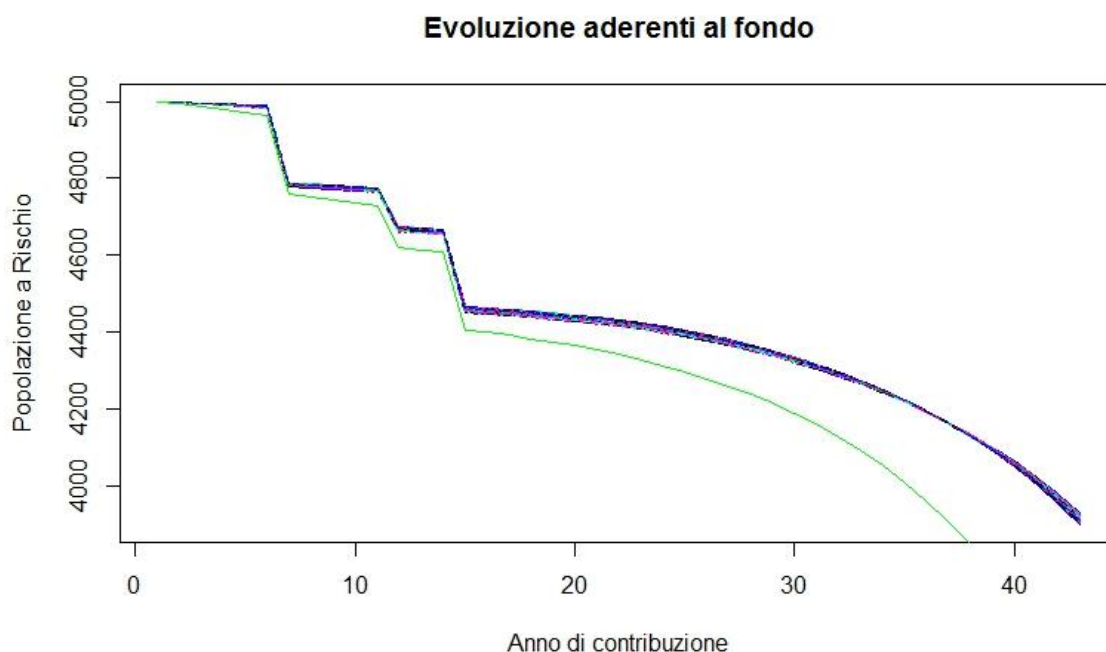


Figura 68 - Simulazioni componente di periodo e indice di generazione



Dopo aver effettuato 10000 simulazioni dei possibili andamenti che possono avere tali elementi si è proceduto a confrontare tutti i possibili cammini che gli aderenti al fondo possono effettuare con quanto ipotizzato dal fondo, come tavola di prim'ordine, rappresentata dalla figura con la linea verde.



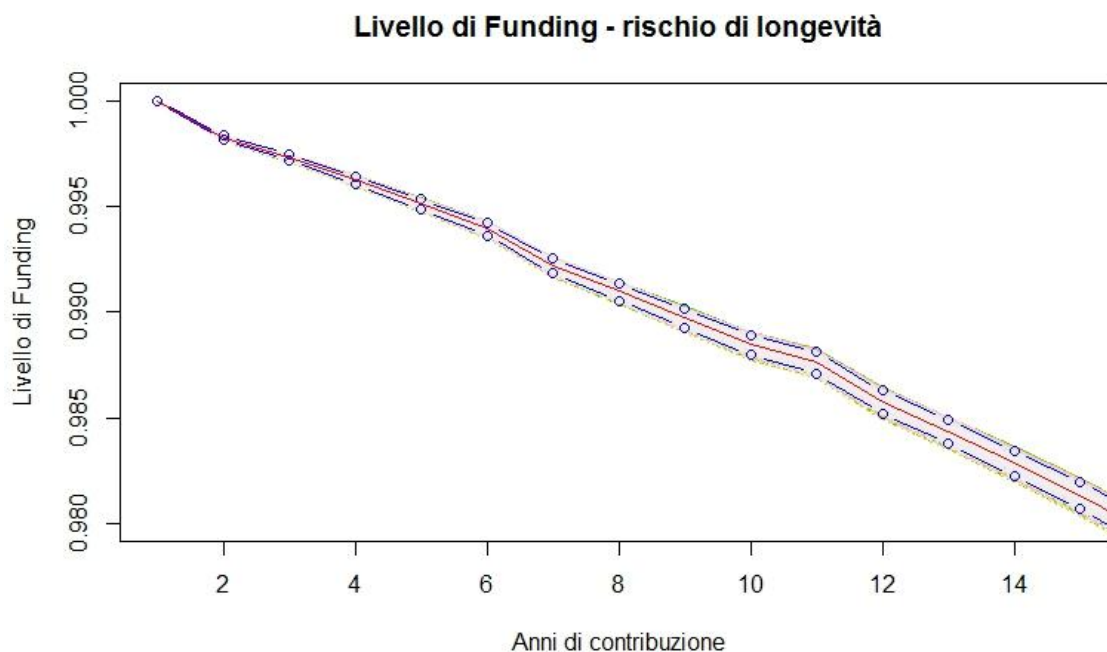
**Figura 69 - differenza ipotesi di primo e secondo ordine**

Come si osserva l'ipotesi rimane molto simile a quanto prospettato dal fondo, tuttavia col passare degli anni si nota come il distacco tra le due componenti tenda ad aumentare in maniera importante e questo comporta che il fondo ha stimato che le persone moriranno in misura minore rispetto a quanto ipotizzato e ciò conduce a una perdita per il fondo e quindi a un possibile requisito di capitale. Quello che ci si aspetta è perciò un requisito quasi o addirittura nullo per i primi anni e che pian piano diventi sempre più importante nel corso del tempo.

Il rischio di longevità è stato calcolato su tutte le prestazioni erogate dal fondo. Non solo si lavora sulla longevità della popolazione di vecchiaia ma si è ipotizzato anche che il nuovo andamento riguardi anche quello della mortalità dei superstiti così come quello di invalidità. Se nel caso di prim'ordine si aveva che la mortalità era ipotizzata essere uguale

alle probabilità del prim'ordine, incrementata del 20%, così la nuova base demografica corrisponde ai tassi simulati incrementati della stessa percentuale.

L'andamento del livello di funding risulta perciò il seguente:



**Figura 70 - Simulazioni livello di Funding, longevità accumulata**

Il livello scende sistematicamente negli anni e mostra un andamento medio decrescente e importante. Ovviamente il distaccamento non è molto ampio, infatti varia tra il 0.98 e l'1 e ciò è dovuto principalmente al fatto che le probabilità di sopravvivenza in questi anni sono pari al 99%/98% e i modelli non prevedono grandi scostamenti da queste. Si osserva come anche all'aumentare dell'orizzonte temporale, la variabilità aumenta, seppur per valori contenuti. I valori in tabella infatti sono dell'ordine del  $10^4$ .

I momenti del livello di funding sono di seguito riassunti:

<b>Istante temporale</b>	<b>Media</b>	<b>Scarto quadr. med.</b>	<b>Indice ass.</b>
t=1	0,998	0,402	-0,246
t=2	0,997	0,518	-0,205
t=3	0,996	0,728	-0,197
t=4	0,995	0,926	-0,210

t=5	0,993	1,199	-0,220
-----	-------	-------	--------

Tabella 10 - - Momenti livello di Funding, longevità, accumulo

Come si evince dalla tabella anche l'asimmetria cresce col passare degli anni e presenta un andamento negativo. Ciò implica che la distribuzione ha code leggermente sulla parte sinistra della distribuzione. Tuttavia i valori sono molto prossimi allo 0 e ciò è dovuto alle ipotesi del modello di Renshaw Haberman richiamate precedentemente.

Attraverso il value at risk è stato calcolato un requisito di capitale che è crescente nel tempo ed è stato posto in percentuale con le riserve matematiche che in media il fondo si pensa debba accantonare nei singoli anni e il risultato è esposto in figura:

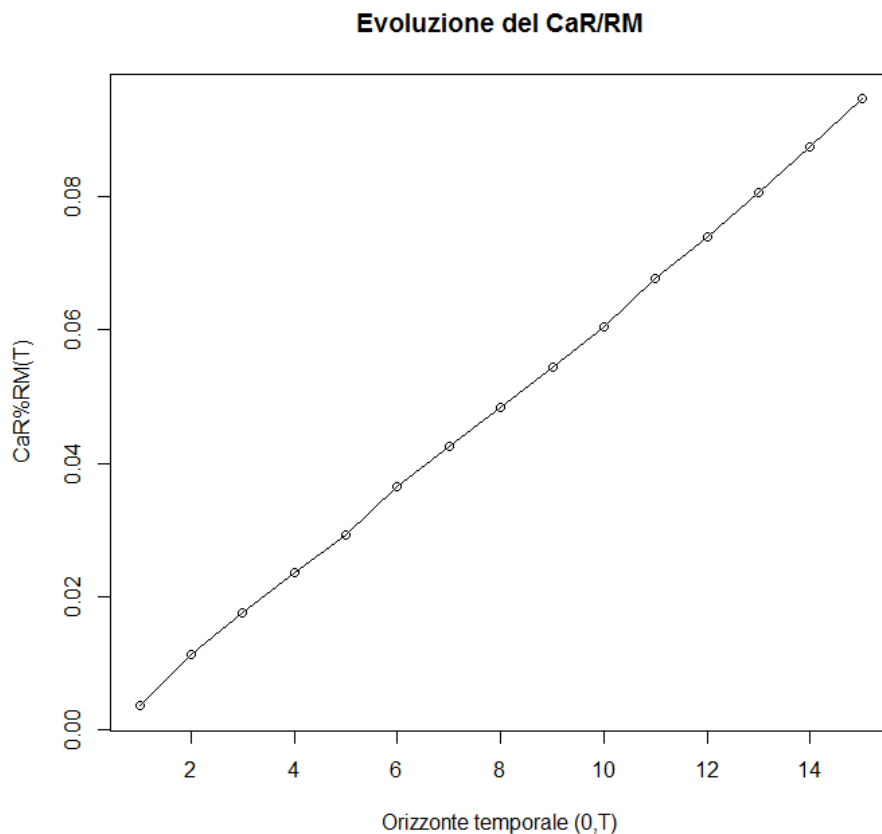


Figura 71 - Evoluzione requisito di capitale, longevità, accumulo

Come si può notare questo ha un andamento quasi lineare di crescita e parte da valori molto piccoli dell'ordine del per mille fino ad arrivare al 13° anno a valori del 8%. Sono requisiti molto più contenuti rispetto al rischio legato al tasso di interesse e ciò è dovuto all'andamento molto simile della mortalità nei primi quindici anni come si è avuto modo di osservare precedentemente.

## 7.4 Focus: Fondo a contribuzione definita

### FASE DI EROGAZIONE

Nel caso di un fondo a contribuzione definita si è deciso di osservare sia la fase di accumulazione che di erogazione.

Il fitting dei modelli è stato fatto per quanto riguarda questa fase su le età che vanno da 67 a 100 anni e utilizzando ancora una volta come data set iniziale le tavole di mortalità tra il 1960 e il 2010.

Su tutti i modelli, anche in questo caso, affinché sia possibile una comparazione, è stata scelta alla base un'ipotesi di distribuzione Poissoniana per quanto riguarda la distribuzione dei decessi per una determinata età e un determinato anno di calendario.

Per quanto riguarda il modello BDV l'output derivante dal modello è il seguente:

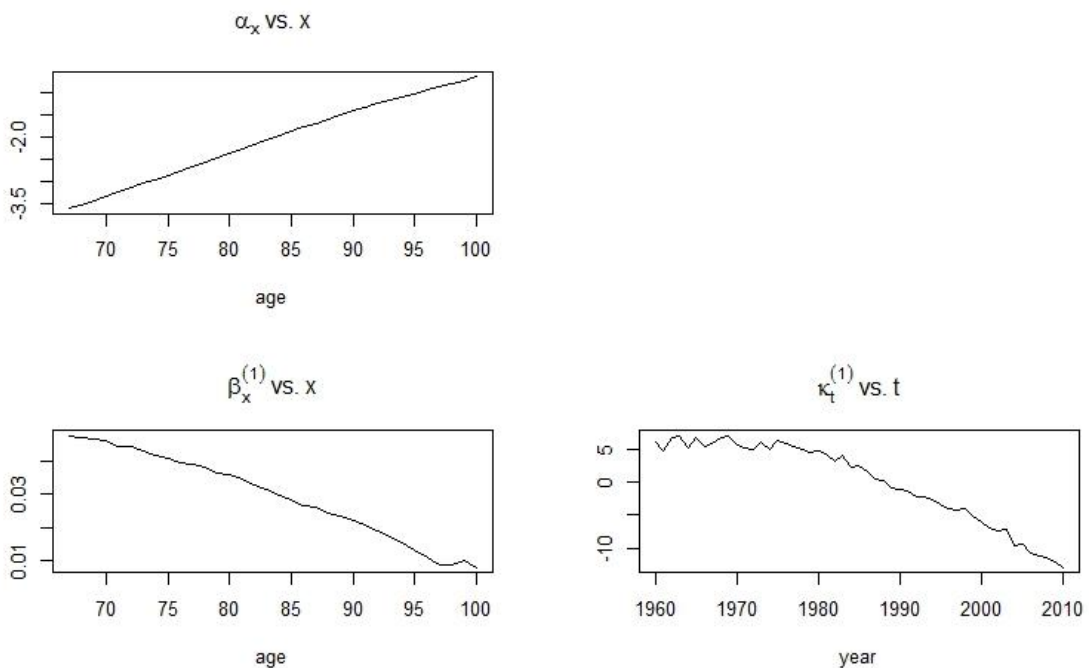
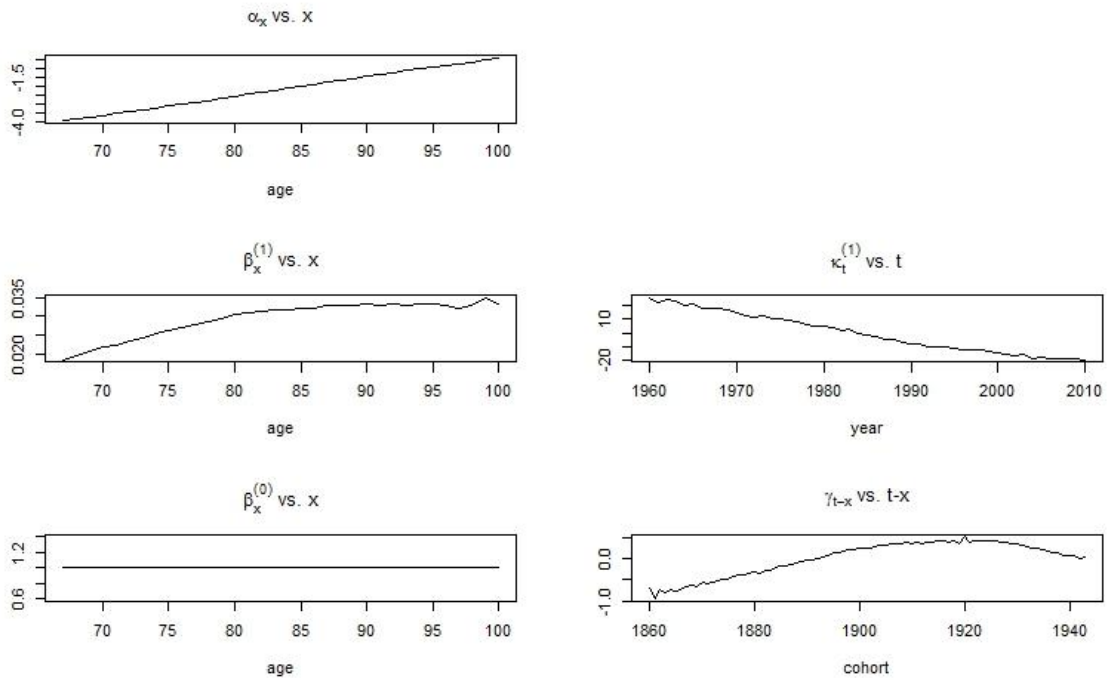


Figura 72 - Output BDV, 67-100, 1960-2010

Come si può osservare l'andamento di  $\alpha$  risulta essere regolare e aumentare nel tempo. Per quanto riguarda il parametro  $\beta$  questo mostra solo delle volatilità riguardanti gli ultimi anni e ciò è dovuto alla volatilità dei tassi che si è vista all'inizio del paragrafo, mentre per quanto riguarda l'effetto dell'indice di periodo, anche questo mostra un andamento decrescente.

Per il RH si ha invece il seguente output:



**Figura 73 - Output RH, 67-100, 1960-2010**

Ancora una volta si nota come l'effetto generazionale catturi in maniera importante la dinamica demografica soprattutto nel periodo delle guerre e come  $k_t$  abbia un andamento negativo nel corso degli anni.

L'output del modello CBD risulta invece essere il seguente in cui valgono i commenti fatti per il caso precedente.

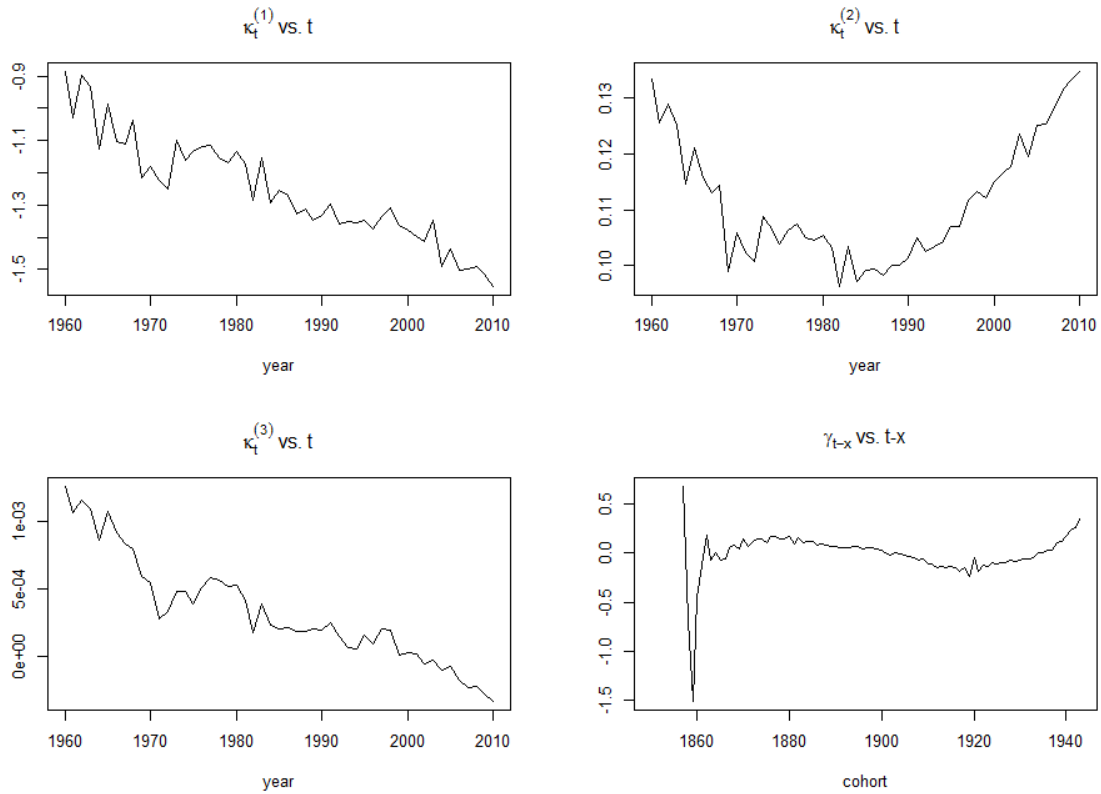


Figura 74 - Output CBD, 67-100, 1960-2010

Si osserva come ci sia una maggiore volatilità nelle prime generazioni per quanto riguarda il fattore di coorte e come questo poi si stabilizzi intorno a valori prossimi a 0, con maggiore variabilità come era prevedibile per le coorti tra il 1920 e 1925.

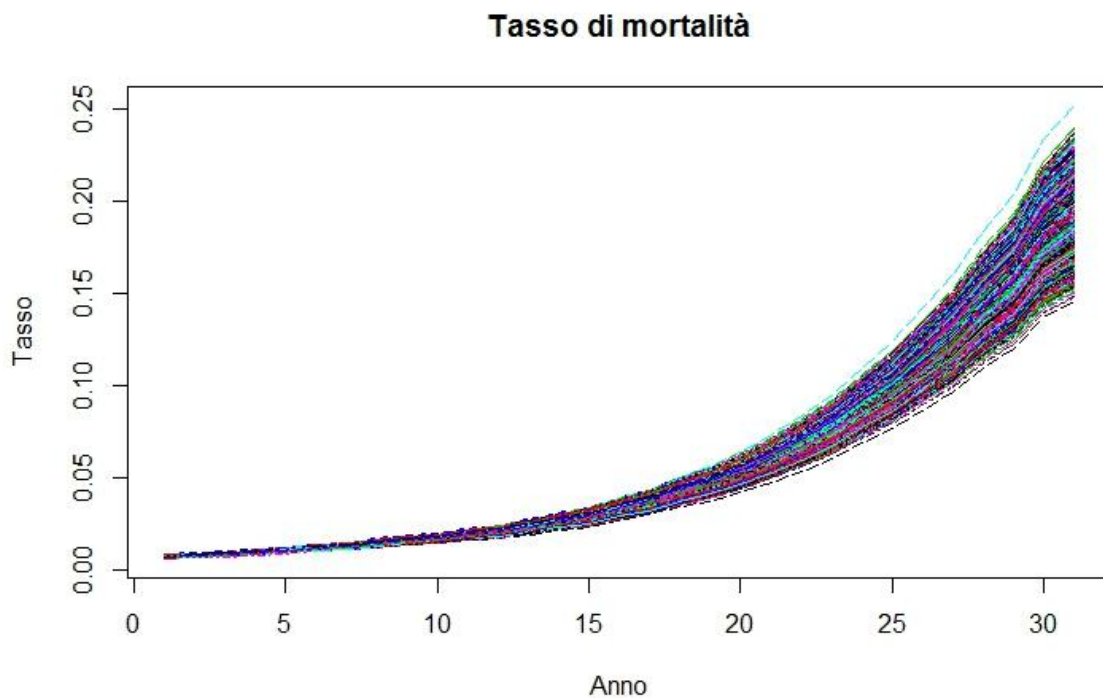
Facendo sempre riferimento ai criteri di BIC e AIC è possibile stilare una graduatoria dei metodi. Il modello più performante in questo caso è il CBD. Questo è un risultato che un po' era previsto in quanto numerosi articoli in letteratura mostrano come tale modello offra un fitting migliore per età più avanzate.

Metodologia applicata	BIC	AIC
RH	22210.03	20874.42
CBD	21597.79	20506.15
BDV	28603.21	27964.6

Analizzando i valori dei residui si arrivano a conclusioni simili a quanto già accennato per la fase di accumulazione.

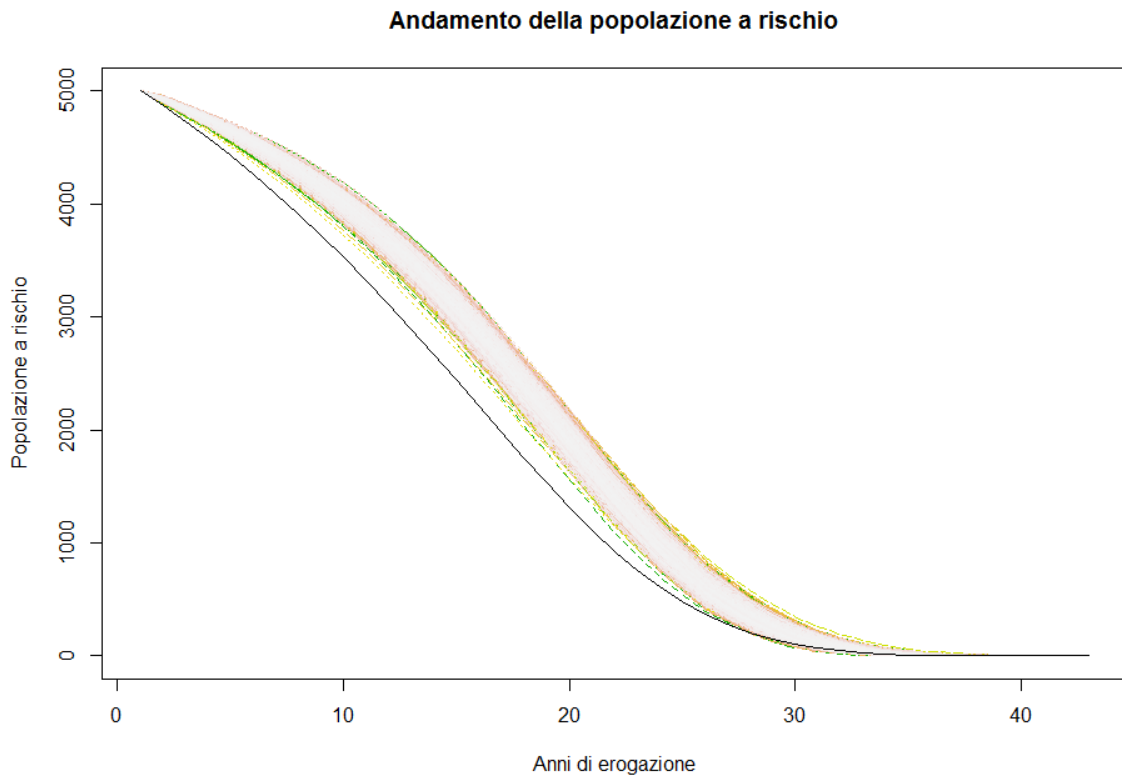
Per quanto riguarda le simulazioni dei cammini che tale modello potrà avere sono state utilizzate le stesse tecniche previste per il caso di accumulo.

Sono state effettuate 10000 simulazioni i cui risultati sono visibili nel grafico seguente:



**Figura 75 - Simulazione probabilità di morte**

La volatilità è ben più elevata rispetto a quanto visto per la fase di accumulo. Una volta ottenuti questi possibili andamenti si è proceduto a confrontare, come nel caso di accumulazione, tutti i possibili cammini che gli aderenti al fondo possono effettuare con quanto ipotizzato dal fondo, come tavola di prim'ordine, rappresentata dalla figura con la linea nera.

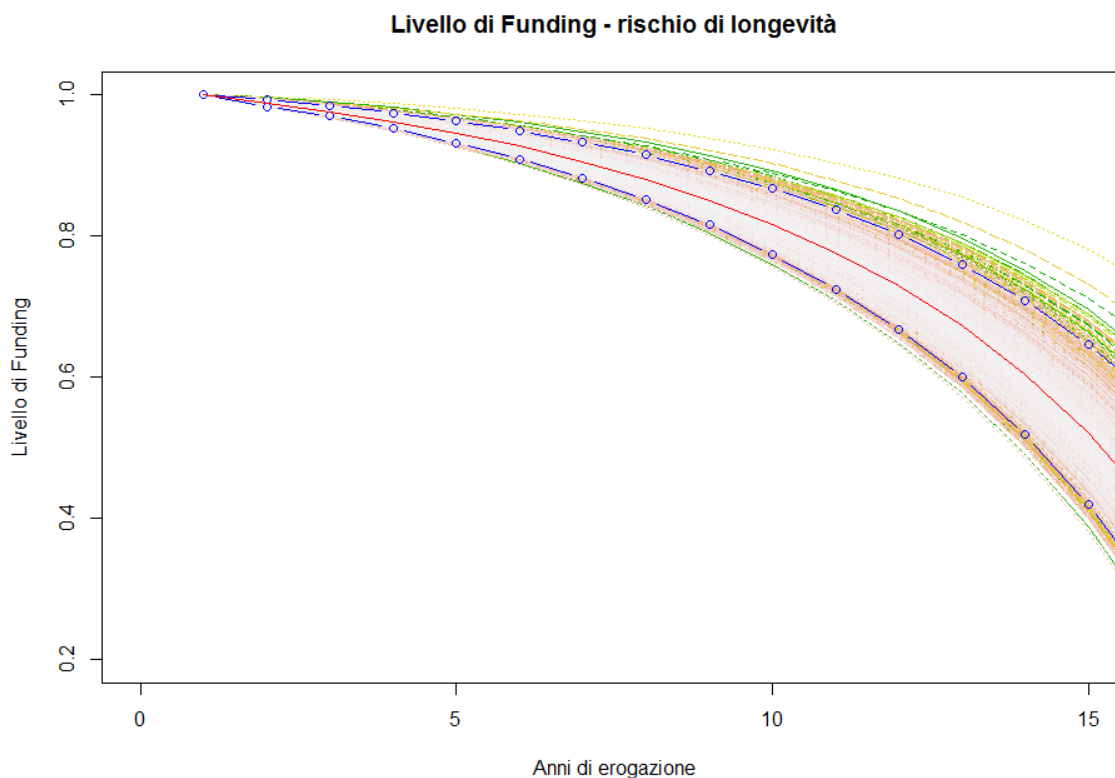


**Figura 76 - Differenza basi del primo e secondo ordine, erogazione**

Come si osserva l'ipotesi rimane molto al di sotto di quanto prospettato dal fondo. Ciò comporta che le persone moriranno di meno rispetto a quanto ipotizzato e ciò conduce sicuramente a una perdita per il fondo e quindi un possibile requisito di capitale, in quanto dovrà pagare molto di più di quanto si era prospettato. Quello che ci si aspetta è perciò un requisito molto importante in quanto il distaccamento risulta essere molto importante. Nel caso di 10 anni di erogazione si ha per ipotesi di prim'ordine il pagamento di prestazioni di vecchiaia a 3528 persone. Nelle simulazioni effettuate dal modello si passa da un range di valori compresi tra 3722 e 4191 il che in termini pecuniari porta a un'ingente differenza.

L'andamento del livello di funding risulta perciò il seguente:





**Figura 77 - Simulazioni livello di Funding, longevità, erogazione**

Si osserva come il livello scenda sistematicamente negli anni, mostrando un andamento medio decrescente e significativo, quasi esponenziale. il distacco diventa sempre più importante, infatti varia su un orizzonte di quindici anni tra il 0.2 e l'1 e ciò è dovuto principalmente al fatto che le probabilità di sopravvivenza in questi anni sono volatili e soprattutto il fondo ha sistematicamente sbagliato la scelta della base del prim'ordine come visto in precedenza. Aver scelto una  $p$  troppo bassa ha portato l'effetto di compensazione tra numeratore e denominatore del livello di funding a non sussistere avendo un effetto maggiore al denominatore. Si osserva come anche all'aumentare dell'orizzonte temporale, la variabilità aumenta, seppur per valori contenuti.

I momenti del livello di funding sono di seguito riassunti:

<b>Istante temporale</b>	<b>Media</b>	<b>Scarto quadr. med.</b>	<b>Indice ass.</b>
t=1	0,988	0,00196	0,38
t=2	0,976	0,00302	0,31

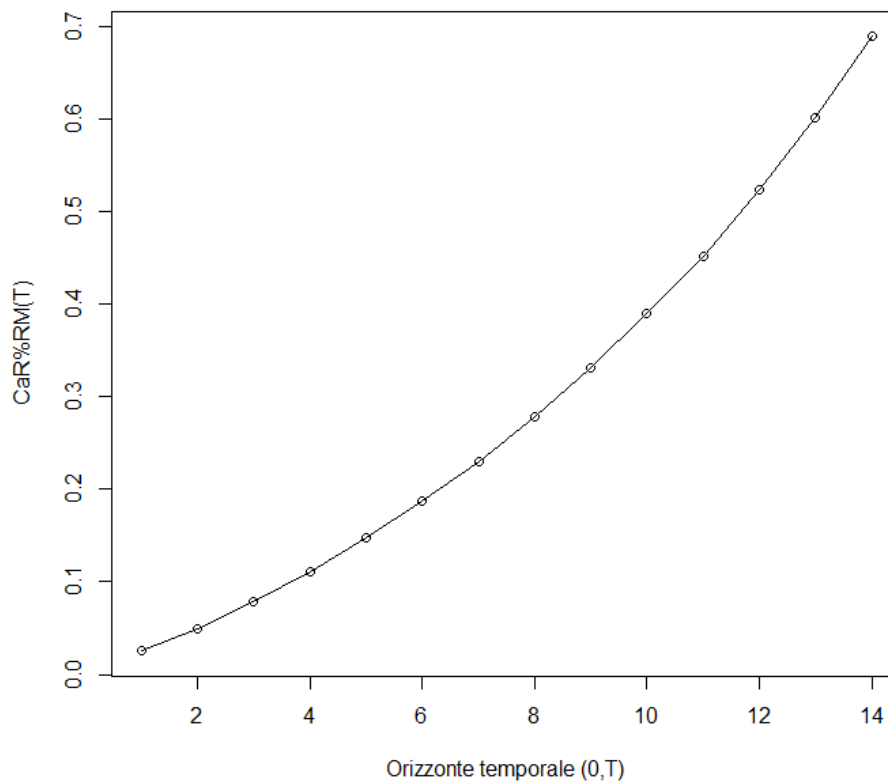
t=3	0,962	0,00436	0,28
t=4	0,946	0,00597	0,26
t=5	0,927	0,00781	0,27

**Tabella 11 - Momenti livello di Funding, longevità, erogazione**

Come si evince dalla tabella anche l'asimmetria rimane costante col passare degli anni e presenta un andamento positivo. Ciò implica che la distribuzione ha code leggermente sulla parte destra della distribuzione. Tuttavia i valori sono molto prossimi allo 0 e ciò è dovuto alle ipotesi del modello di Cairns Blake Dowd.

Attraverso il value at risk è stato calcolato un requisito di capitale che è crescente nel tempo ed è stato posto in percentuale con le riserve matematiche che in media il fondo si pensa debba accantonare nei singoli anni. Il risultato è esposto nella figura seguente:

**Evoluzione del CaR/RM**



**Figura 78 - Andamento requisito di capitale, longevità, erogazione**

Come si può notare questo ha un andamento di crescita quasi esponenziale. Parte da valori appena contenuti quali il 2,5% della riserva matematica fino ad arrivare al 15° a un

valore che sfiora il 70%. Questo grafico mostra come, in fase di erogazione, un requisito di capitale per il rischio di longevità sia assolutamente importante ed essenziale se il fondo decide di erogare la prestazione. Ciò spiega il motivo per cui ad occuparsi del pagamento delle prestazioni debba essere un soggetto specializzato come una compagnia di assicurazioni e come il fondo sia incentivato ad effettuare una convenzione da questo punto di vista.

## *CONCLUSIONI*

Con il presente elaborato si è cercato di entrare nel dettaglio delle dinamiche che influiscono sulla solvibilità di un fondo pensione.

La normativa italiana di riferimento, che consiste nel decreto ministeriale 259 del 2012, prevede che tutti i fondi pensione preesistenti e di nuova costituzione, che assumono un rischio finanziario o demografico, debbano detenere delle attività supplementari, sempre disponibili, equivalenti al 4% delle riserve matematiche. La loro funzione, stando al decreto, consiste nel far fronte ad eventuali differenze tra attività e passività su un orizzonte temporale non inferiore a 30 anni.

Nell'elaborato si sono perciò analizzati i rischi demografici e finanziari e come questi possano modificare il valore delle passività e delle attività del fondo.

L'analisi è stata svolta su entrambe le tipologie di fondi presenti sul mercato, ossia un fondo a prestazione definita e uno a contribuzione definita.

Per valutare la solvibilità del fondo è stato utilizzato come indicatore il livello di funding, prendendo in considerazione tutte le riserve e tutti gli attivi dei singoli fondi.

Il primo rischio analizzato è stato quello legato al tasso di interesse, ipotizzando che il fondo possa investire solo in due asset, uno ad alto e uno a basso rischio, in particolar modo un'obbligazione rappresentata da un BTP a scadenza quinquennale e un paniere di azioni ben rappresentato dall'indice FTSE.MIB.

L'andamento del BTP è stato modellato secondo il modello proposto da Cox Ingersoll Ross, mentre per l'andamento del tasso di interesse azionario si è scelto il modello di Black & Scholes. Già da queste prime scelte è emerso come il fondo sia estremamente soggetto alle variazioni di tali tassi: per l'obbligazione assumono valori molto vicini al valore medio desiderato, al contrario la componente azionaria si è mostrata molto più volatile.

Il fondo decide di conseguenza di non investire tutto il proprio attivo in uno solo degli strumenti ma, seguendo una logica di diversificazione, modifica le sue allocazioni. Nell'analisi che si è svolta si è scelto di osservare tre possibili strategie di investimenti, denominate scenari. Nel primo si ha il cosiddetto scenario base ossia dove il fondo decide di fare una gestione equilibrata, nel caso secondo si è scelta una gestione più rischiosa, nel terzo si è scelta invece una strategia più conservativa.

Una allocazione delle risorse per come definita nello scenario base conduce a una media del tasso di interesse nei singoli anni pari al 4% e perciò coincidente con quella ipotizzata in sede di prim'ordine. Il livello di funding di conseguenza mostra un andamento del valore medio sempre uguale e pari a 1. Al variare dell'orizzonte temporale lo scarto quadratico medio cresce come è giusto che sia in quanto si prende in considerazione un processo diffusivo. Stesso andamento presenta l'indice di asimmetria. Utilizzando una misura di rischio quale il Value at Risk si arriva a un primo requisito di capitale pari al 14% delle riserve matematiche nel primo anno e si osserva come questo si aggravi in misura molto importante, allungando l'orizzonte temporale, arrivando già al quinto anno con un requisito del 60%. Sebbene il fondo mostri in media di essere sempre solvibile un requisito del 4% per coprire questo rischio risulta essere inadeguato e insufficiente già su un orizzonte annuale. Questa situazione si è osservata anche negli altri scenari.

Per quanto riguarda il secondo, aumentando la componente azionaria si ottiene una media del tasso che tende a crescere, risultando superiore al 4% di prim'ordine. Tuttavia si nota come questo maggior peso dato all'asset più rischioso comporti una maggiore volatilità con un aumento di frequenza dei casi negativi. La conseguenza di questo aspetto è che il livello di funding mostra una media che cresce, e quindi in teoria il fondo risulterebbe ancora più solvibile in media rispetto al caso base, tuttavia si nota anche un forte aumento della volatilità e dell'indice di asimmetria. La conseguenza di ciò è che i percentili della distribuzione del livello di funding per ogni singolo orizzonte temporale diventano sempre più estremi e già al primo anno si ha un requisito di capitale pari al 20% delle riserve matematiche, raggiungendo il valore del 60% su un orizzonte temporale di tre anni. Ancora di più in questo caso il requisito previsto dalla normativa risulta insufficiente e non tiene conto delle diverse asset allocation che il fondo può effettuare. Il terzo scenario evidenzia effetti sul livello di funding opposti rispetto al secondo ma comunque significativi. In questo caso la maggior componente obbligazionaria comporta una diminuzione del valore medio del tasso di interesse, raggiungendo valori intorno al 3,7%, tuttavia la volatilità risulta essere molto più contenuta. Di conseguenza si è osservato come i possibili cammini del livello di funding risultano essere più schiacciati intorno alla media, che comunque presenta un andamento decrescente. I momenti del livello di funding risultano essere perciò più contenuti rispetto allo scenario base e questo comporta un requisito di capitale minore, tuttavia deve essere assolutamente

considerato anche l'effetto della media negativa che sistematicamente ogni anno porta una perdita. Questo spiega come mai il requisito parte da un valore pari al 10% e raggiunge più lentamente valori più elevati allungando l'orizzonte temporale: il 60% si ha intorno all'ottavo anno. Ancora una volta si hanno valori ben più elevati rispetto a quelli previsti dalla normativa. Da sottolineare in conclusione come il requisito di capitale sia fortemente influenzato non solo dalla volatilità degli strumenti finanziari sottostanti ma anche dalle tecniche di investimento operate dai gestori.

Analisi simili sono state eseguite per il fondo a contribuzione definita nella fase di accumulo. Questo mostra delle caratteristiche e andamenti uguali in quanto la fonte di rischio risulta essere la stessa. È dimostrato perciò come anche in questa situazione sia necessaria da parte del fondo una costituzione di capitale per far fronte agli andamenti negativi nel mercato.

Per quanto invece riguarda la fase di erogazione, l'analisi svolta ha portato a conclusioni simili, con un incremento del requisito di capitale che ha mostrato dei cammini più lenti, seguendo aumenti sempre meno che proporzionali, in linea con i risultati precedenti. Ciò è dovuto all'ammontare della riserva che col passare degli anni diminuisce in quanto i soggetti che sono esposti al rischio escono dal fondo causa morte. Tuttavia anche in questo caso si sono osservati dei requisiti di capitale ben più elevati rispetto a quelli previsti dalla normativa. Il requisito di capitale nello scenario base su un orizzonte annuo corrisponde a un valore prossimo al 14%, per il secondo si ha un valore del 18%, mentre per il terzo scenario si ha un requisito di capitale del 9%.

Per quanto riguarda il rischio di longevità è emerso come non esiste un modello che in termini assoluti sia migliore rispetto agli altri per andare a stimare i possibili cammini futuri della sopravvivenza degli aderenti a un fondo pensione. Si è osservato come sia in una fase di erogazione che in una fase di accumulo sia estremamente necessario utilizzare un modello che, oltre a prendere in considerazione un elemento legato all'età e uno legato all'anno di calendario, tenga in considerazione anche un effetto legato alla generazione di appartenenza.

Dalle metodologie applicate è emerso come, per quanto riguarda la fase di accumulazione, il modello che meglio si adatta per età più giovani è quello proposto da Renshaw e Haberman, mentre quello proposto da Cairns Blake e Dowd mostra un fitting migliore per le età più avanzate, tipiche della fase di distribuzione.

Si è osservato come il rischio che sorge per il fondo a prestazione definita, nella fase di accumulo, sia ben contenuto, infatti la variabilità è poco significativa, mentre è da sottolineare come questo rischio comporta un andamento che mostra un trend negativo. Il livello di funding si trova sistematicamente sotto l'unità e questo implica che il fondo ha sbagliato nel scegliere le proprie basi di prim'ordine e necessita sicuramente un requisito di capitale fondamentale almeno per pareggiare attività e passività. Tale requisito su un orizzonte annuo si è visto essere pari a un 0,5% delle riserve matematiche per poi arrivare a un valore del 4% solo su un orizzonte temporale di sette anni. Ciò mostra che in questo caso un requisito del 4%, come previsto dalla normativa, risulta soddisfacente ma non su un orizzonte trentennale. Già al quindicesimo anno si è in presenza di un valore che supera l'8%.

Per quanto invece concerne la fase di erogazione si osserva come la variabilità cresca in maniera importante e come sia molto più rilevante rispetto alla fase di accumulo. Si è osservato un caso dove il fondo ha sbagliato in modo significativo le ipotesi del prim'ordine e ciò ha condotto a un requisito che se al primo anno è pari al 2,5% delle riserve matematiche, coll'allungare dell'orizzonte temporale mostra un andamento quasi esponenziale, raggiungendo valori dopo 14 anni del 70%. Da sottolineare come la media del livello di funding diminuisca seguendo quasi un andamento esponenziale negativo, il che implica la matematica certezza di ritrovarsi sempre sotto l'unità e il dover contabilizzare sistematicamente una perdita importante.

Quest'analisi mostra perciò come sia assolutamente necessario per un fondo pensione avere un requisito di capitale per far fronte ai rischi finanziari e biometrici a cui è soggetto e come la normativa odierna italiana sia assolutamente insufficiente sotto questo punto di vista. Va osservato comunque che il fondo pensione ogni anno può aggiornare e modificare le basi in modo tale da evitare di contabilizzare delle perdite così importanti nel lungo periodo. Effettuare tuttavia le analisi illustrate nell'elaborato sicuramente aiuta il fondo ad avere maggior coscienza della situazione in cui si trova.

Di conseguenza è necessario che venga creata una nuova metodologia di calcolo da seguire che si fondi su un approccio che si basi sul rischio. A questo infatti mira il progetto *IORPs* che l'EIOPA sta portando avanti in sede europea in modo tale da determinare una linea da seguire che sia uguale per tutta l'area e che permetta di avere una concezione basata sul rischio dell'impresa.

Infine dal lavoro emerge come sia determinate per un fondo pensione l'importanza di stipulare una convenzione con un altro ente per l'erogazione delle rate di pensione, in modo tale da trasferire dei rischi importanti a un soggetto terzo e quindi liberare capitale da utilizzare per il proseguo della sua attività. In questa fase infatti emerge come il rischio finanziario sia leggermente inferiore al caso di accumulo ma anche come il rischio demografico abbia un impatto estremamente importante, significativamente superiore rispetto alla fase di accumulo. Questo mostra come il fondo in questa fase è costretto a fronteggiare due rischi importanti e come il requisito di capitale da sostenere sarà molto superiore rispetto a quello previsto per la fase di accumulo.



## BIBLIOGRAFIA

Battocchio, Paolo, Francesco Menoncin., "Optimal Pension Management under Stochastic." *Interest Rates, Wages, and Inflation*" Discussion Papers 2002021, Université Catholique de Louvain. 2002.

Bisetti Emilio, Carlo A. Favero. "Measuring the Impact of Longevity Risk on Pension Systems: The Case of Italy." *North American Actuarial Journal* 18.1 (2014): 87-103.

Black, Fischer, and Myron Scholes. "The pricing of options and corporate liabilities." *The journal of political economy* (1973): 637-654.

Blake D., Cairns A.J.G., Dowd K., Macminn R. "Longevity bonds: financial engineering, valuation and hedging.", *J. Risk Insur.* 73 (2006): 647–672

Blake D., Cairns A.J.G., and Dowd K. "Living with mortality: Longevity bonds and other mortality-linked securities." *British Actuarial Journal* (2006): 153-197.

Blake D., Cairns A.J.G., Dowd K. "Pensionmetrics: stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase." *Insurance: Mathematics and Economics* 29.2 (2001): 187-215.

Boulier J.F., Huang S., Taillard G. "Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund." *Insurance: Mathematics and Economics* 28.2 (2001): 173-189.

Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbitt "Actuarial mathematics" the Society of Actuaries (1997)

Brouhns N., Denuit M., Van Keilegom I. "Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting." *Scandinavian Actuarial Journal* 3 (2005): 212–224

Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J. "A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables" *Insurance: Mathematics and Economics* 31 (2002): 373–393

Browne B., Duchassaing J., Suter F. *"Longevity: A 'Simple' Stochastic Modelling of Mortality."* British Actuarial Journal 15.S1 (2009): 249-265.

Cairns A.J.G., Blake D., Dowd K., Coughlan G.D., Epstein D., Ong A., Balevich I. *"A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States."*, North America Actuarial Journal 13 (2012): 1–35

Cairns A.J.G., Blake D., Dowd K.: *"Pricing death: framework for the valuation and securization of mortality risk."* Austin Bulletin 36 (2006): 79–120

Cairns A.J.G., Blake D., Dowd K. *"Modelling and management of mortality risk: a review."* Pensions Institute Discussion Paper, PI-0814 (2008)

Cairns A.J.G., Blake D., Dowd K. *"Stochastic lifestyling: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans."* Journal of Economic Dynamics and Control 30.5 (2006): 843-877.

Cairns A.J.G., Blake D., Dowd K. *"Optimal dynamic asset allocation for defined-contribution pension plans."* Pensions Institute (2000)

Cairns A.J.G. *"Modeling and Management of Longevity Risk."*, Pension Research Council Working Paper, PRC WP2013-19 (2013).

Cairns A.J.G. *"Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time."* Austin Bulletin 30.01 (2000): 19-55.

Cox J., Ingersoll J., Ross S. A. *"An intertemporal general equilibrium model of asset prices."* Econometrica: Journal of the Econometric Society (1985): 363-384.

Decreto Ministeriale n.259/2012

Dickson, Hardy, Waters *"Actuarial Mathematics for Life contingent risk"* Cambridge University Press (2009)

Donati A., Volpe G., Putzolu *"Manuale diritto delle assicurazioni"* Giuffrè Editore (2012)

Donnelly C. "Quantifying mortality risk in small defined-benefit pension schemes." *Scandinavian Actuarial Journal* 2014.1 (2014): 41-57.

Ferrymond W., Mayer D "Actuarial Cost Methods: a Review" American Society of Pension Actuaries (1999)

Floreani A. "Economia delle imprese di assicurazione" Il Mulino (2011)

Fumagalli P. "Fondi pensione: perché e per chi?" Vita e Pensiero (2011)

Guohui G., Liang Z. "Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework." *Insurance: Mathematics and Economics* 57 (2014): 58-66.

Haberman S. et al. "A stochastic approach to risk management and decision making in defined benefit pension schemes." *British Actuarial Journal* 9.03 (2003): 493-586.

Haberman S., Renshaw A. "A comparative study of parametric mortality projection models." *Insurance: Mathematics and Economics* 48 (2011): 35–55

Haberman S., Renshaw A. "On age-period-cohort parametric mortality rate projections." *Insurance: Mathematics and Economics* 45 (2009): 255–270

Haberman S., Vigna E. "Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes." *Insurance: Mathematics and Economics* 31.1 (2002): 35-69.

Huberman S., Iyengar S., Jiang W. "Defined contribution pension plans: determinants of participation and contributions rates." *Journal of Financial Services Research* 31.1 (2007): 1-32.

Hull J. "Opzioni, futures e altri derivati" Pearson Italia Spa (2006)

Jensen M., Black F., Scholes M. S. "The capital asset pricing model: Some empirical tests." *Studies In The Theory Of Capital Markets*, Praeger Publishers Inc., (1972).

Lee R.D., Carter L.R. *"Modeling and forecasting U.S. mortality"* Journal American Statistical Association 87 (1992): 659–675

Lee R.D. *"The Lee–Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications."* North America Actuarial Journal 4 (2000): 80–93

Levantesi S, Menzietti M., Torri T. *"Longevity bond pricing models: an application to the Italian annuity market and pension schemes."* 18th International AFIR Colloquium, Roma (2008)

Olivieri A. *"Gestione del rischio di longevità"* Seminario MEFOP – CNA – ONA, (2012).

Plat R. *"On stochastic mortality modeling"* Insurance: Mathematics and Economics 45 (2009): 393–404

Pugh C. *"Funding rules and actuarial methods"* No. 1. OECD Publishing (2006)

Renshaw A, Haberman S. *"Cohort based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors."* Insurance: Mathematics and Economics 38 (2006): 556–570

Richards S., Stephen J., Currie D., Ritchie G. *"A value-at-risk framework for longevity trend risk."* British Actuarial Journal 19 (2012): 116-139.

Savelli N., Clemente G. *"Dispensa di Tecnica attuariale per le assicurazioni sociali"* UCSC (2012)

Savelli N. *"Modelli per schemi pensionistici a prestazioni definite con capitalizzazione individuale"* Edizioni Kappa (1995)

Savelli N. *"Un modello di teoria del rischio per la valutazione della solvibilità di un compagnia di assicurazioni sulla vita"* ed. Lint (1993)

Spadafora F. *"Il pilastro privato del sistema previdenziale: il caso del Regno Unito."* Economia Pubblica (2004).

Subramanian I. *"Actuarial Mathematics of social security pension"* International Labor Organization (1999)

Trowbridge C., *"Fundamentals of Pension Funding"* Society of Actuaries 50th Monography (2006)

Vigna E., Haberman S. *"Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes."* Insurance: Mathematics and Economics 28.2 (2001): 233-262.

Wang S. *"A universal framework for pricing financial and insurance risks."* Austin Bulletin 32.02 (2002): 213-234.

## *Elenco delle figure*

Figura 1 - Esempio di un possibile Holistic Balance Sheet.....	23
Figura 2 - Formula Standard per calcolo SCR .....	24
Figura 3 - Matrice dei Coefficienti di Correlazione per i Macro Rischi.....	26
Figura 4 - Scenari previsti dal QIS .....	30
Figura 5 - Risultati del QIS per i singoli Paesi.....	31
Figura 6 - Composizione degli attivi per Paese.....	32
Figura 7 - Rapporto tra diversi calcoli di BE.....	33
Figura 8 - Impatto dei singoli rischi nel calcolo del SCR .....	35
Figura 9 - Impatto dei singoli rischi per il Market risk.....	36
Figura 10 - Impatto dei singoli rischi per il Longevity risk .....	36
Figura 11 - Formula Standard per il calcolo del SCR.....	37
Figura 12 - Differenza di andamenti tra un processo di Wiener standard e generalizzato	54
Figura 13 - Evoluzione della piramide demografica della popolazione italiana.....	66
Figura 14 - differenza tra una stima puntuale e una intervallare .....	73
Figura 15 - Esempio di un possibile trattato di riassicurazione.....	84
Figura 16 - Struttura delle transizioni in un Longevity Bond .....	88
Figura 17 - Andamento aderenti fondo pensione causa uscita solo morte .....	95
Figura 18 - Andamento riserva matematica, unica uscita.....	96
Figura 19 - Andamento aderenti fondo pensione, più cause.....	97
Figura 20 - Andamento riserva matematica, più cause di uscita .....	98
Figura 21 - Andamento riserva matematica di invalidità .....	99
Figura 22 - Andamento riserva matematica superstite da attivo .....	101
Figura 23 - Andamento riserva per dimissioni .....	102
Figura 24 - Andamento posizione individuale capitalizzata .....	104
Figura 25 - Andamento riserva matematica, fase di erogazione .....	105
Figura 26 - Quotazioni BTP scadenza Aprile 2016.....	109
Figura 27 - Quotazioni BTP scadenza Settembre 2016 .....	110
Figura 28 - Simulazione tasso di rendimento di un BTP .....	111
Figura 29 - Andamento FTSE.MIB.....	112
Figura 30 - Simulazione tasso di rendimento di un Azione .....	113
Figura 31 - Rendimento portafoglio - I scenario.....	114
Figura 32 - Simulazioni livello di Funding - I scenario, prestazione.....	115
Figura 33 - Simulazioni del patrimonio - I scenario, prestazione .....	117
Figura 34 - Andamento requisito di capitale - I scenario, prestazione .....	118
Figura 35 - Rendimento portafoglio - II scenario.....	119
Figura 36 - Simulazioni livello di Funding - II scenario, prestazione.....	120
Figura 37 - Simulazioni del patrimonio - II scenario, prestazione .....	121
Figura 38 - Andamento requisito di capitale - II scenario, prestazione .....	122
Figura 39 - Rendimento portafoglio - III scenario.....	123

Figura 40 - Simulazioni livello di Funding - III scenario, prestazione.....	124
Figura 41 - Simulazioni del patrimonio - III scenario, prestazione .....	125
Figura 42 - Andamento requisito di capitale - III scenario, prestazione .....	126
Figura 43 - Andamento contributi cumulati .....	127
Figura 44 - Simulazioni capitale accumulato - I scenario, contribuzione .....	128
Figura 45 - Simulazioni del patrimonio netto - I scenario, contribuzione/ accumulato.....	129
Figura 46 - Andamento requisito di capitale - I scenario, contribuzione/accumulo.....	130
Figura 47 - Simulazioni capitale accumulato - II scenario, contribuzione .....	131
Figura 48 - Simulazioni del patrimonio netto - II scenario, contribuzione/ accumulato.....	132
Figura 49 - Andamento requisito di capitale - II scenario, contribuzione/accumulo.....	133
Figura 50 - Simulazioni capitale accumulato - III scenario, contribuzione .....	133
Figura 51 - Simulazioni del patrimonio netto - III scenario, contribuzione/ accumulato.....	134
Figura 52 - Andamento requisito di capitale - III scenario, contribuzione/accumulo.....	135
Figura 53 - Simulazioni livello di Funding - I scenario, erogazione.....	136
Figura 54 - Simulazioni del patrimonio netto - I scenario, erogazione .....	137
Figura 55 - Andamento requisito di capitale - I scenario, erogazione .....	138
Figura 56 - Simulazioni livello di Funding - II scenario, erogazione.....	139
Figura 57- Simulazioni del patrimonio netto - II scenario, erogazione .....	140
Figura 58 - Andamento requisito di capitale - II scenario, erogazione .....	141
Figura 59 - Simulazioni livello di Funding - III scenario, erogazione.....	142
Figura 60 - Simulazioni del patrimonio netto - III scenario, erogazione .....	143
Figura 61 - Andamento requisito di capitale - III scenario, erogazione .....	144
Figura 62 - Evoluzione della mortalità italiana .....	145
Figura 63 - Rapporto tra il tasso centrale di mortalità nei singoli anni di calendario in rapporto con quello del 1960 .....	146
Figura 64 - Effetto Coorte della popolazione italiana.....	147
Figura 65 - Output BDV, 25-67, 1960-2010 .....	148
Figura 66 - Output RH, 25-67, 1960-2010 .....	148
Figura 67 - Output CBD, 25-67, 1960-2010 .....	149
Figura 68 - Simulazioni componente di periodo e indice di generazione .....	151
Figura 69 - Differenza ipotesi di primo e secondo ordine .....	152
Figura 70 - Simulazioni livello di Funding, longevità accumulato.....	153
Figura 71 - Evoluzione requisito di capitale, longevità, accumulato .....	154
Figura 72 - Output BDV, 67-100, 1960-2010 .....	155
Figura 73 - Output RH, 67-100, 1960-2010 .....	156
Figura 74 - Output CBD, 67-100, 1960-2010 .....	157
Figura 75 - Simulazione probabilità di morte .....	158
Figura 76 - Differenza basi del primo e secondo ordine, erogazione.....	159
Figura 77 - Simulazioni livello di Funding, longevità, erogazione .....	160
Figura 78 - Andamento requisito di capitale, longevità, erogazione .....	161

## *Elenco delle tabelle*

Tabella 1 - Coefficienti di Correlazione per il Market risk .....	27
Tabella 2 - Coefficienti di Correlazione per il Pension Liability risk.....	28
Tabella 3 - Ipotesi alla base dei fondi analizzati .....	94
Tabella 4 - Momenti livello di Funding - I scenario, prestazione.....	116
Tabella 5 - Momenti livello di Funding - II scenario, prestazione .....	120
Tabella 6 - Momenti livello di Funding - III scenario, prestazione.....	124
Tabella 7 - Momenti livello di Funding - I scenario, erogazione.....	137
Tabella 8 - Momenti livello di Funding - II scenario, erogazione.....	140
Tabella 9 - Momenti livello di Funding - III scenario, erogazione.....	142
Tabella 10 - - Momenti livello di Funding, longevità, accumulo .....	154
Tabella 11 - Momenti livello di Funding, longevità, erogazione .....	161