

Un modello demografico per l'analisi di sostenibilità dei sistemi pensionistici a ripartizione

Laureando
Riccardo Caramini

Matricola 1545641

Relatore
Massimo Angrisani

Relatore esterno
Zoltán Varga



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

**Un modello demografico
per l'analisi di sostenibilità
dei sistemi pensionistici a ripartizione**



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

**UN MODELLO DEMOGRAFICO PER L'ANALISI DI SOSTENIBILITÀ
DEI SISTEMI PENSIONISTICI A RIPARTIZIONE**

Facoltà di Economia

**Dipartimento MEMOTEF
Corso di laurea in FINASS**

Riccardo Caramini

Matricola 1545641

Relatore

Massimo Angrisani

Relatore esterno

Zoltán Varga

A.A. 2017-2018

Sommario

Introduzione	6
1. Nozioni di tecnica della previdenza.....	8
2. Un modello matematico per la descrizione dell'evoluzione della popolazione	17
2.1. Cenni storici: il modello di Bernadelli.....	17
2.2. Condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità nel modello di Bernadelli.....	19
2.3. Rappresentazione grafica di esempi, programmata in Excel	20
2.4. Generalizzazione: il modello di Leslie con 3 classi di età	23
2.5. Equilibrio dinamico ed equilibrio demografico	24
2.6. Equilibrio demografico per il modello di Bernadelli.....	26
2.7. Equilibrio demografico per il modello di Leslie con 3 classi di età.....	28
2.8. Passaggio ad una valutazione logaritmica.....	31
2.9. Intuizioni sulla convergenza ad un equilibrio demografico	38
3. Il modello classico di Leslie.....	42
3.1. Equilibrio demografico per il modello di Leslie con n classi di età	42
3.2. Unicità dell'equilibrio demografico.....	44
3.3. Definizione del tasso di crescita asintotica e del tasso riproduttivo netto della popolazione.....	46
3.4. Generalizzazione ad n classi di età del tasso di crescita asintotica e del tasso riproduttivo netto della popolazione	50
3.5. Considerazioni su un valore ottimale di R	51
3.6. Teorema di convergenza	52
3.7. Rappresentazione grafica di un esempio, programmato in MATLAB	55
3.8. Concetti e teoremi dalla teoria di Perron-Frobenius	57
3.9. Teorema di Perron-Frobenius e dimostrazione del teorema di convergenza per il modello di Leslie.....	59
4. Una estensione del modello classico: il modello di Leslie distinto per sesso	60
4.1. Equilibrio demografico per il modello di Leslie distinto per sesso.....	66
5. Le applicazioni	72
5.1. Applicazioni sui dati italiani.....	73
5.2. Evoluzione della popolazione e autovalore associato alla matrice di transizione	75
5.3. Confronto tra l'andamento di R in Ungheria e in Italia	78
5.4. Confronto tra la stima della dinamica demografica col modello di Leslie ad un sesso e a due sessi	80
5.5. Valutazione dell'andamento del rapporto attivi pensionati	83

5.6. Applicazioni sui dati ungheresi.....	85
5.7. Applicazioni sui dati dell'intera Unione Europea (28 Stati).....	89
5.8. Confronto tra UE28, ITA, HU	92
Conclusioni	95
Appendice A	99
Codici MATLAB	99
Appendice B	116
Dati utilizzati per l'Italia.....	116
Dati utilizzati per l'Ungheria	119
Dati utilizzati per l'Unione Europea	122
APPENDICE C	126
Autovalori ed autovettori.....	126
APPENDICE D.....	128
Conoscenze propedeutiche al teorema di Perron-Frobenius	128
Indice delle figure.....	131
Indice delle tabelle	133
Bibliografia	134
Sitografia	135

Introduzione

Il lavoro svolto è incentrato sulla creazione e sullo studio di un modello matematico in grado di stimare l'evoluzione demografica di una popolazione chiusa.

Il lavoro si pone come obiettivo l'individuazione di regole per la convergenza all'equilibrio demografico e per la stabilizzazione del valore assoluto, complessivo e per classi di età, della popolazione di riferimento.

Nei sistemi previdenziali a ripartizione è fondamentale una valutazione demografica della popolazione di riferimento; infatti, l'ambizione di valutare l'andamento futuro di una popolazione è finalizzata alla successiva valutazione della sostenibilità del relativo sistema previdenziale.

La redazione di questa tesi è iniziata a Roma con il professore Angrisani, è continuata, per oltre due mesi, a Budapest con il professore Varga e si è conclusa di nuovo a Roma con il professore Angrisani.

Lo studio è iniziato con alcuni cenni storici e sull'intuizione alla base del modello matematico. Quindi si è proceduto con lo studio del modello di Bernadelli che è stato poi generalizzato nel modello di Leslie con solo tre classi di età.

Dopo aver ricordato alcuni concetti e nozioni di algebra lineare, si è proceduto studiando l'equilibrio demografico, prima per il modello di Bernadelli e poi per il modello di Leslie con 3 classi di età.

Sono state sottolineate le distinzioni tra equilibrio dinamico ed equilibrio della distribuzione per età.

Per una valutazione più efficace dell'equilibrio si è effettuato un passaggio ad una valutazione semilogaritmica dell'equilibrio e, successivamente, prima attraverso alcune intuizioni e poi attraverso una declinazione precisa e matematicamente opportuna, sono state fornite le condizioni sufficienti affinché una popolazione converga verso l'equilibrio. Si è introdotto quindi il teorema di convergenza.

Il passaggio successivo è stato quello di generalizzare il modello di Leslie, finora a 3 classi di età, ad n classi di età; anche per questa generalizzazione è stato valutato l'equilibrio demografico.

Si è proceduto approfondendo il tema dell'equilibrio attraverso la valutazione della sua unicità.

È stato definito il tasso di crescita asintotica e il tasso riproduttivo netto della popolazione.

Sono stati affrontati i concetti e i teoremi dalla teoria di Perron-Frobenius sulle matrici non negative, fondamentali per una analisi più approfondita del modello di Leslie.

In particolare sono stati affrontati, o ricordati, i concetti di grafo, di matrice irriducibile, un teorema generale della teoria delle matrici non negative, l'indice di imprimitività ed il calcolo dell'indice di imprimitività.

Una volta studiato il modello classico di Leslie se ne è studiata l'estensione attraverso la modellizzazione strutturata per sesso.

Nel corso della trattazione, parallelamente alle questioni teoriche è sempre stata portata avanti un'attività di esemplificazione numerica realizzata attraverso la programmazione in Excel ed in MATLAB.

Sono stati effettuati esempi puramente didattici ma anche interessanti applicazioni sui dati italiani, ungheresi ed europei.

Sono stati confrontati alcuni dati rilevanti caratterizzanti l'Ungheria, l'Italia e l'Europa.

Infine sono stati valutati ulteriori elementi come la divergenza nei risultati tra il modello di Leslie indistinto per sesso e quello invece a due sessi, è stato valutato l'andamento del rapporto attivi pensionati ed è stato valutato per quali valori fondamentali è possibile invertire le tendenze attuali.

1. Nozioni di tecnica della previdenza

Le politiche previdenziali si introducono all'interno del perimetro del *welfare state* di uno Stato.

Con *welfare state* indichiamo tutte quelle politiche volte al sostegno dei membri più deboli della società attraverso la perequazione delle risorse; quindi, si propone il fine ultimo di eliminare, tramite politiche pubbliche, le disuguaglianze sociali.

Le politiche di *welfare state* riguardano la previdenza, l'assistenza e la salute.

Di fatto i confini di questa breve tassonomia non sono evidenti; i confini tra i campi operativi del *welfare state* sono abbastanza opachi, nonostante mantengano sempre la direzione della riduzione delle disuguaglianze sociali.

Il tema della previdenza insiste sul tema delle assicurazioni sociali.

Per assicurazioni sociali intendiamo tutte le forme assicurative a cui ogni individuo deve obbligatoriamente aderire perché lo Stato, nella sua funzione paternalista, ritiene siano necessarie alla tutela del singolo individuo, nel suo interesse; inoltre le assicurazioni sociali, per lo Stato hanno anche una finalità di pubblico interesse, in quanto permettono di evitare il sostenimento in futuro del costo sociale di eventuali generazioni di incapienti.

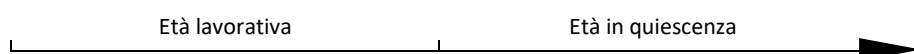
Cioè, la contribuzione obbligatoria per la previdenza obbligatoria di base dovrebbe avere l'evidente scopo di garantire un futuro dignitoso, anche in età non lavorativa, agli individui. Questo risponde all'esigenza del mantenimento del tenore di vita nel passaggio da attivo a pensionato del singolo individuo ed inoltre vuole evitare l'imponente costo sociale per lo Stato di avere generazioni di individui che rischiano di risultare poi incapaci di badare economicamente a loro stessi.

Un sistema previdenziale raccoglie i contributi dall'iscritto in fase lavorativa per poi renderglieli, sotto forma di pensione, nella fase di inattività lavorativa.

Quindi, viene a formarsi un patto tra l'ente previdenziale ed il singolo lavoratore in merito alla misura, alla destinazione e al rendimento della contribuzione, ed in merito alla determinazione, alla tipologia e al rendimento della futura pensione ed, infine, dei requisiti anagrafici e di anzianità contributiva utili per iniziare il godimento della pensione.

È subito evidente, e degno di nota, che i contributi versati dai lavoratori in età lavorativa sono un debito per l'ente previdenziale. L'ente previdenziale riceve i contributi e si impegna a restituirli maggiorati degli interessi una volta maturate le condizioni per il loro godimento.

La vita di un individuo, agli occhi del sistema previdenziale è caratterizzata da una prima fase di inattività caratterizzata dalla giovane età e dalla formazione scolastica, quindi poco rilevante dal punto di vista previdenziale, una seconda fase di attività lavorativa in cui ogni contribuente crea la propria pensione versando i contributi, diventando quindi creditore del sistema previdenziale, ed una terza fase, che è la fase di quiescenza, in cui l'individuo gode della pensione e quindi del credito che aveva nei confronti del sistema previdenziale.



Data la durata molto estesa del ciclo di vita previdenziale di un individuo risultano necessarie della garanzie per il singolo contribuente quali la tutela dei diritti acquisiti e la non modificabilità delle pensioni.

I sistemi pensionistici possono essere distinti in funzione della loro modalità di gestione finanziaria e del metodo di calcolo della prestazione.

Per quanto riguarda la gestione finanziaria possiamo distinguere la gestione a ripartizione e la gestione a capitalizzazione.

Definizione (gestione finanziaria a ripartizione)

Un sistema previdenziale gestito finanziariamente a ripartizione implica che le prestazioni previdenziali correnti sono pagate con i contributi incassati correntemente. Quindi, risulta essere in equilibrio quando le entrate contributive sono pari alle uscite per pensioni.

Notiamo da subito che in questo sistema non è presente l'idea del salvadanaio che ogni lavoratore riempie mensilmente attraverso il versamento dei contributi, in quanto l'ammontare destinato al salvadanaio viene subito impiegato per il pagamento delle pensioni correnti.

Definizione (gestione finanziaria a capitalizzazione)

Un sistema previdenziale gestito finanziariamente a capitalizzazione implica che le prestazioni previdenziali correnti e future sono pagate attraverso le risorse accumulate con i contributi incassati nel passato, nel presente e che si prevede di incassare nel futuro. Quindi, risulta essere in equilibrio quando il valore attuale atteso delle entrate contributive da incassare più le risorse già accumulate è pari al valore attuale atteso delle uscite per pensioni da pagare.

Nel sistema a ripartizione non vengono accantonate riserve a differenza del sistema a capitalizzazione.

Per quanto riguarda invece i metodi di calcolo della prestazione possiamo distinguere tra metodo retributivo e metodo contributivo.

Definizione (metodo di calcolo della prestazione di tipo retributivo)

Con il metodo retributivo il valore della pensione dipende dalla base retributiva presa in considerazione per il calcolo, da un coefficiente di rendimento prestabilito e dall'anzianità contributiva. Da quanto detto appare, ed è, completamente slegato dall'ammontare di contributi versati durante la vita lavorativa. Nella formula di calcolo i contributi versati non appaiono, in nessun modo.

La pensione retributiva:

$$P = \beta LR_p,$$

la pensione annuale P è pari ad un coefficiente di rendimento β per il numero di anni di contribuzione L per la retribuzione pensionabile R_p .

Definizione (metodo di calcolo della prestazione di tipo contributivo)

Con il metodo contributivo invece sono fondamentali, per il calcolo della prestazione previdenziale, i contributi versati, rivalutati, durante tutta la vita lavorativa e un coefficiente attuariale distinto per età e sesso di conversione del montante contributivo in rendita.

La pensione contributiva:

$$P = MC * \text{coefficiente di trasformazione},$$

la pensione annuale P è pari al prodotto del montante contributivo MC per il coefficiente di trasformazione.

Data l'aliquota contributiva α costante, il montante contributivo si ottiene rivalutando, in regime di capitalizzazione composta, i contributi fino a quel momento versati.

Se il tasso di rivalutazione r è costante allora

$$MC = \sum_{j=1}^h \alpha C(j) (1+r)^{h-j}.$$

Se il tasso di rivalutazione r_k non è costante allora

$$MC = \sum_{j=1}^h \alpha C(j) \prod_{k=j}^h (1+r_k).$$

Se anche l'aliquota contributiva $\alpha(t)$ non è costante allora

$$MC = \sum_{j=1}^h \alpha(j) C(j) \prod_{k=j}^h (1+r_k).$$

La prestazione in ognuna delle due modalità di gestione finanziaria del sistema previdenziale può essere calcolata col sistema contributivo o retributivo.

Definizione (sistema *Notional Defined Contribution*)

Un sistema *Notional Defined Contribution* è un sistema previdenziale con gestione finanziaria a ripartizione e modalità di calcolo della pensione contributiva.

È un sistema, cosiddetto, a capitalizzazione virtuale dei contributi al tasso di rivalutazione pre-stabilito, proprio perché di fatto i contributi non vengono accantonati ma utilizzati per la spesa previdenziale corrente.

In questo sistema è come se ciascun contribuente avesse intestato un conto virtuale, un *notional account*, nel quale viene simulato l'accantonamento dei contributi che vanno a formare il montante contributivo.

Definizione (tasso di sostituzione)

Il tasso di sostituzione rappresenta il rapporto tra la prima rata annua di pensione e l'ultima retribuzione percepita.

Tasso di sostituzione:

$$\sigma = \frac{\text{prima rata annua di pensione}}{\text{ultima retribuzione}},$$

risulta essere una misura della variazione del reddito lordo del lavoratore nel passaggio da attivo a pensionato.

Se $\sigma = 1$ allora il lavoratore in pensione ottiene esattamente lo stesso reddito di quello che percepiva lavorando.

Se $\sigma < 1$ allora il lavoratore in pensione ottiene un reddito minore di quello che percepiva lavorando; ad esempio, se $\sigma = 0.8$ allora in pensione percepirà l'80% dell'ultima retribuzione.

È un utile indicatore di adeguatezza del sistema previdenziale.

In generale, in Italia, il campo dei soggetti è sostanzialmente universale ma una universalità non basata su un diritto di nascita. Si ritiene che tutti ne abbiano diritto a patto che partecipino al mondo del lavoro.

Il sistema previdenziale italiano è ispirato ad una pluralità di forme previdenziali e di organismi previdenziali.

L'attuale configurazione di base del sistema previdenziale italiano è basata su tre pilastri.

Pensione pubblica di base:	basata su un sistema con gestione finanziaria a ripartizione con metodo di calcolo della prestazione previdenziale contributivo; è obbligatoria e finanziata attraverso i contributi pagati dal lavoratore o dal datore di lavoro; è volta a garantire una pensione di base a tutti i lavoratori.
Pensione complementare:	basata su un sistema con gestione finanziaria a capitalizzazione a cui si aderisce attraverso la sottoscrizione di fondi pensione; è sottoscritta collettivamente e finanziata attraverso i contributi pagati dal lavoratore o dal datore di lavoro e/o dal TFR; è volta a garantire una integrazione alla pensione di base.
Pensione integrativa individuale:	basata su un sistema con gestione finanziaria a capitalizzazione attraverso la sottoscrizione di fondi pensione; è sottoscritta individualmente e finanziata attraverso i contributi pagati spontaneamente dal lavoratore; è volta a garantire una ulteriore integrazione volontaria alla pensione di base.

La Legge numero 335 del 1995, la cosiddetta "riforma Dini", definisce il primo pilastro come un pilastro con modalità di calcolo della prestazione contributiva.

Nei sistemi contributivi risulta molto rilevante, in termini di sostenibilità finanziaria e di ammontare della prestazione previdenziale, il valore del tasso di rendimento riconosciuto ai contributi. L'articolo 1, commi 8 e 9, della legge 335/95 sancisce che "ai fini della determinazione del montante contributivo individuale si applica alla base imponibile l'aliquota di computo nei casi che

danno luogo a versamenti, ad accrediti o ad obblighi contributivi e la contribuzione così ottenuta si rivaluta su base composta al 31 dicembre di ciascun anno, con esclusione della contribuzione dello stesso anno, al tasso di capitalizzazione. Il tasso annuo di capitalizzazione è dato dalla variazione media quinquennale del prodotto interno lordo, (PIL) nominale, appositamente calcolata dall'Istituto nazionale di statistica (ISTAT), con riferimento al quinquennio precedente l'anno da rivalutare. [...]"

Lo stesso articolo al comma 6, "L'importo della pensione annua nell'assicurazione generale obbligatoria e nelle forme sostitutive ed esclusive della stessa, è determinato secondo il sistema contributivo moltiplicando il montante individuale dei contributi per il coefficiente di trasformazione di cui all'allegata tabella A relativo all'età dell'assicurato al momento del pensionamento. [...]"

La moltiplicazione di cui parla il comma 6, del montante contributivo per il coefficiente di trasformazione, serve per trasformare il montante contributivo in rendita vitalizia sulla base di aspetti finanziari, normativi e demografici.

È la prima volta che nel calcolo della prestazione previdenziale vengono tenuti in considerazione elementi demografici, che sappiamo essere fondamentali.

Questo lavoro è proprio volto a valutare questi aspetti demografici.

Gli aspetti demografici di cui si parla sono quelli legati all'evoluzione della popolazione e alla distribuzione per età della popolazione.

L'Italia negli ultimi sessanta anni ha visto stravolgere il suo andamento demografico. Dopo le generazioni dei cosiddetti *baby boom*, gli anni sessanta, l'andamento dell'evoluzione della popolazione è drasticamente cambiato. I cambiamenti demografici sono dovuti a variazioni nelle abitudini, negli stili di vita, alle scoperte scientifiche. Sono diminuiti i tassi di fertilità ed è aumentata la speranza di vita, questo sta portando, inevitabilmente, ad un invecchiamento demografico.

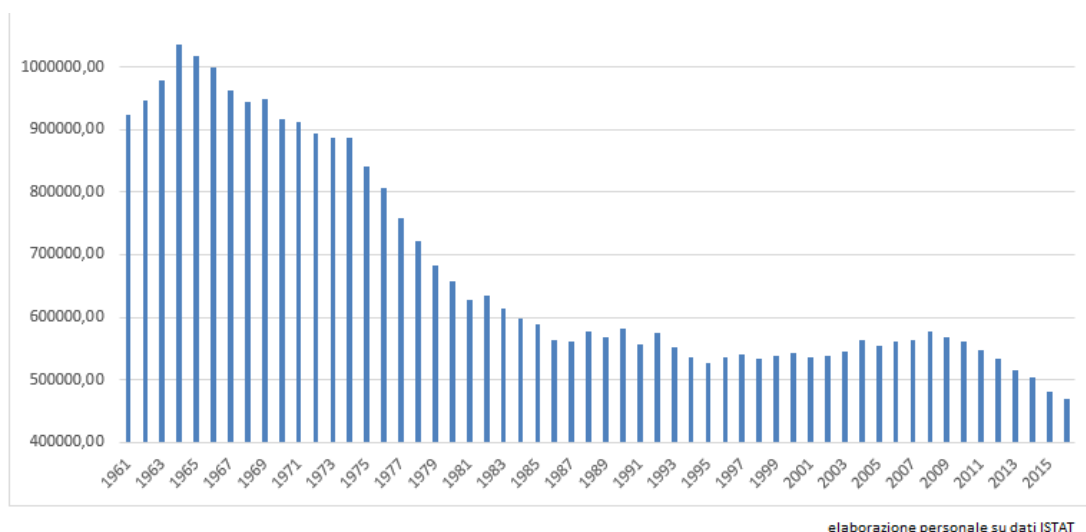


Figura 1: Nati per anno di nascita

La figura 1 rappresenta in modo evidente che cosa significhino le generazioni dei *baby boom*. Sono coorti gigantesche di neonati che crescono, lavorano ed iniziano ad andare in pensione. In un sistema a ripartizione, come il nostro, a pagare l'enorme uscita per le pensioni dovute ai *baby boom* dovranno pensare le piccole coorti di neonati successive, che nel frattempo saranno diventate attive.

Quella gobba di neonati nella figura può essere vista, vedi Angrisani¹, come un'onda che piano piano si sposta, avanzando di età e quando raggiungerà l'età pensionabile si rovescerà sul sistema previdenziale.

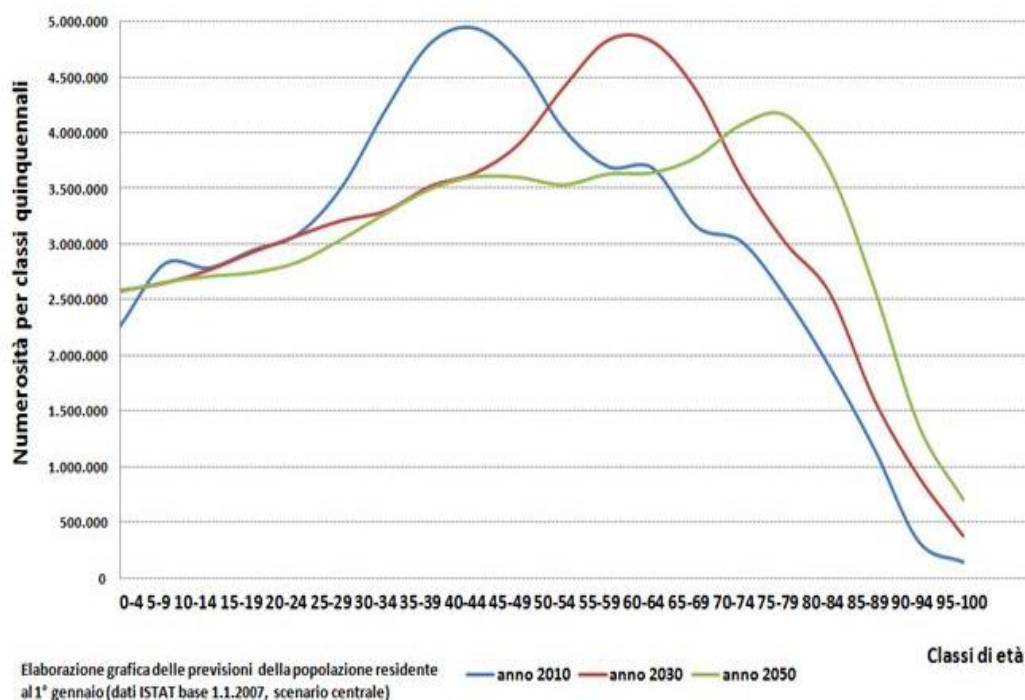


Figura 2: Onda demografica della popolazione residente in Italia

L'immagine dell'onda della figura 2 è molto efficace per valutare intuitivamente che il sistema previdenziale italiano subirà un grande stress. In un sistema a ripartizione è utile guardare indietro, cioè guardare la numerosità della popolazione attiva in funzione della numerosità della popolazione che sta per pensionarsi ed è già pensionata.

Osservando il futuro dobbiamo osservare sempre il debito che si sta formando mentre osservando indietro dobbiamo osservare le coorti di attivi che dovranno sostenere, con i propri contributi, il debito già formato ed *in fieri*.

¹ http://www.logicaprevidenziale.it/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=76:sostenibilita-del-sistema-pensionistico-italiano-e-in-arrivo-londa-demografica&catid=34:editoriali-novembre-2011&Itemid=2

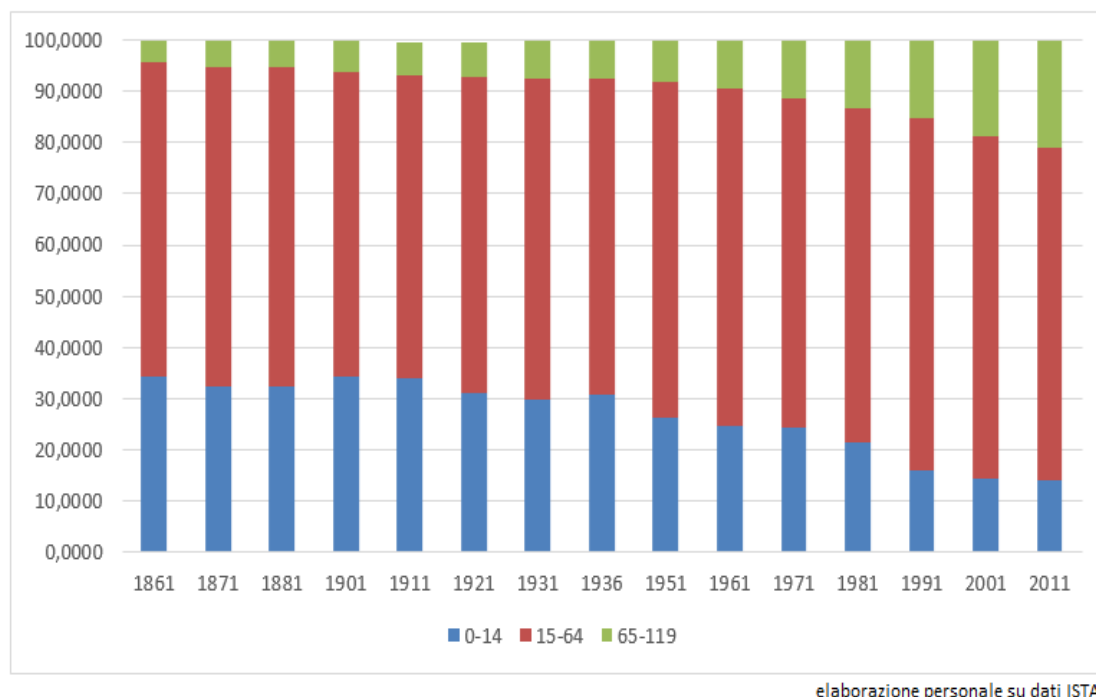


Figura 3: Struttura per età della popolazione 1861-2011

Vediamo come la figura 3 ci renda chiaro l'invecchiamento demografico della popolazione italiana. La parte verde di ogni colonnina rappresenta la percentuale di popolazione italiana over 64 e vediamo come si è ingrandita sempre di più col passare del tempo. Similmente, ma con andamento opposto, la percentuale di popolazione italiana under 15, la parte blu, si comprime sempre di più. Questo significa che mentre la parte di popolazione anziana cresce ogni anno quella di giovani decresce, ne consegue un invecchiamento generale della popolazione.

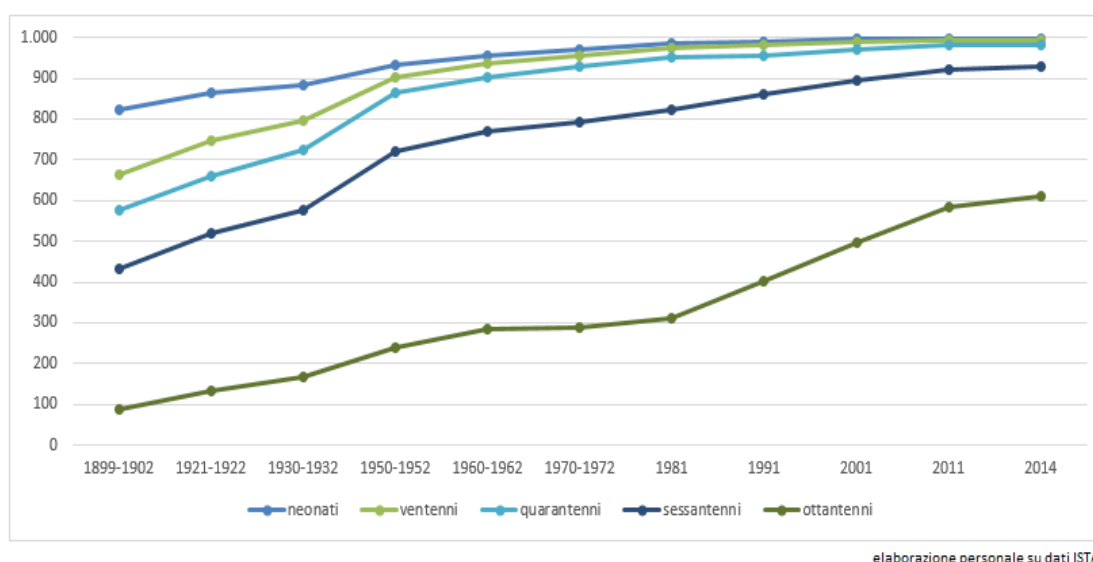


Figura 4: superstiti maschi per classi di età 1899-2014

La figura 4 mostra un'altra caratteristica demografica che contribuisce all'invecchiamento demografico, l'aumento della speranza di vita. In questa figura vediamo infatti il numero di sopravvissuti per classi di età lungo un intervallo di più di 100 anni. Per esempio, su un campione di mille individui maschi, tra il 1899 e il 1902, erano presenti 89 ottantenni mentre nel 2014 il numero di sopravvissuti ottantenni è di 612 (+687%); risultato comunque eclatante si ottiene facendo un confronto con periodi più recenti, per esempio gli ottantenni del 2014 con quelli del 1960-1962, per i quali si registra un aumento percentuale del +214%.

Questo invecchiamento demografico va anche messo all'interno di un quadro in cui è esistente un ingente debito pubblico, un PIL che stenta a cresce ed una disoccupazione ancora molto elevata. Quindi, pochi lavoratori, molti pensionati, pochi contributi versati, molte pensioni pagate e bassi rendimenti riconosciuti sui contributi accumulati.

Il sistema previdenziale italiano non risulta in equilibrio finanziario, sono necessari ingenti interventi pubblici per coprire la differenza positiva tra uscite per pensioni ed entrate contributive.

Federico Fubini² nel 2017 scrive sul Corriere, citando fonti europee, che il disavanzo del sistema previdenziale italiano è di 88 miliardi. Cioè, oggi lo Stato deve contribuire ogni anno con 88 miliardi di euro per far sì che vengano pagate regolarmente le pensioni.

Causa di questo disequilibrio sono gli aspetti demografici di cui si è parlato ed anche le politiche previdenziali molto, troppo, generose che sono state messe in atto tra gli anni sessanta e i primi anni novanta.

I governi italiani da metà degli anni novanta, resisi conto dell'insostenibilità della situazione previdenziale italiana hanno iniziato a varare riforme tutte volte a sospendere l'indicizzazione delle pensioni, ad innalzare i requisiti per accedere alla pensione, all'aumento delle aliquote contributive ed a prelievi di solidarietà. Non sono mai state fatte riforme strutturali del sistema. L'unica vera riforma fu quella Dini, sopradetta.

Le politiche previdenziali sono sempre state guidate da finalità "elettorali" e di "cassa". Una riforma strutturale del sistema previdenziale dispiega i suoi effetti nel medio-lungo periodo e i mandati politici sono sempre molto più brevi.

La sostenibilità di un sistema previdenziale a ripartizione nel medio-lungo periodo è fondata su un rapporto equilibrato tra lavoratori attivi e pensionati.

Un valore elevato del rapporto attivi pensionati in un sistema a ripartizione potrebbe permettere il godimento di un tasso di rivalutazione più importante o una diminuzione dell'aliquota contributiva e sicuramente facilita la sostenibilità del sistema previdenziale.

Un valore elevato del rapporto attivi pensionati però deve tenere, necessariamente, in considerazione del debito che si forma in funzione della grande mole di entrate contributive che si registrano proprio grazie alla superiorità degli attivi rispetto ai pensionati. Se non si fa questa considerazione si rischia di fare valutazioni estremamente superficiali, che possono condurre all'insostenibilità futura del sistema.

² https://www.corriere.it/economia/17_novembre_26/pensioni-squilibrio-italiano-88-miliardi-b9a8e64c-d2e5-11e7-913f-5fffae015d00.shtml

L'aliquota contributiva, nel sistema previdenziale svedese, è presa come garanzia di stabilità del sistema previdenziale ed è quindi considerata intoccabile, le leve su cui si opera sono i rendimenti sulle prestazioni previdenziali.

Un sistema contributivo a ripartizione funziona se è in grado di adempiere ai propri impegni ed è in grado di garantire pensioni certe, adeguate ed eque tra le diverse generazioni.

L'adozione di un sistema contributivo a ripartizione non garantisce di per se l'adeguatezza, l'equità tra le generazioni e la sostenibilità finanziaria, proprio a causa dello stretto legame con gli aspetti demografici.

2. Un modello matematico per la descrizione dell'evoluzione della popolazione

In questo capitolo verrà studiato, approfondito e applicato un modello matematico utile alla descrizione dell'andamento dell'evoluzione della popolazione.

Verrà introdotto il modello di Bernadelli e la condizione necessaria e sufficiente affinché si verifichi la sua ciclicità.

Il modello di Bernadelli sarà poi generalizzato nel modello classico di Leslie con tre classi di età.

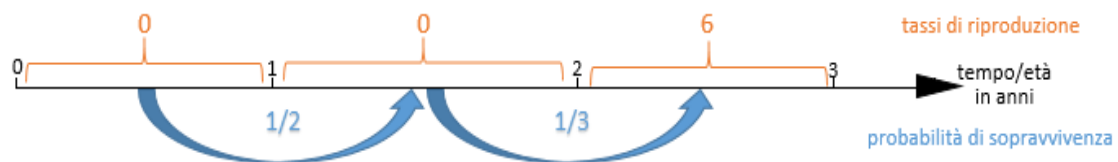
Verrà studiato l'equilibrio demografico di una popolazione, sia per il modello di Bernadelli sia per il modello di Leslie con tre classi di età, fino ad intuire le condizioni affinché la popolazione converga all'equilibrio demografico.

Nel corso della trattazione verranno proposte diverse applicazioni programmate in Excel.

2.1. Cenni storici: il modello di Bernadelli

In senso generale, una popolazione è un insieme di individui della stessa specie, considerato isolato. Il modello di Bernadelli³ cercava una spiegazione alla ciclicità osservata che riguardava la numerosità di certe popolazioni di insetti. Queste popolazioni sono divisibili, discriminando per alcuni fattori come lo stato di sviluppo, o l'età, in sottopopolazioni.

Supponiamo che in una popolazione di insetti un individuo durante il primo, secondo e terzo anno di vita è nello stato di larva, pupa e insetto (imago), rispettivamente. Quindi le classi di età corrispondono agli stati di sviluppo. Per la semplicità del modello è importante che l'unità del tempo coincida con l'unità dell'età.



Al tempo 0 la numerosità della popolazione per ogni età è indicata con $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$.

I pedici, 1, 2 e 3 rappresentano le tre classi di età possibili: nel nostro esempio larva, pupa e insetto.

Consideriamo che il compleanno di ciascun individuo avvenga esattamente ad inizio anno, quindi il tempo coincide con l'età. Questa risulta evidentemente una semplificazione ma che non inficia le valutazioni che faremo.

Ora definiamo il vettore della numerosità totale della popolazione al tempo 0 che contiene le numerosità per ogni classe di età al tempo 0:

$$\text{vettore di stato: } x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}.$$

³ Bernadelli, H. (1941) Population waves. J. Burma Res. Soc., 31, No 1, 1-18.

Risulta interessante calcolare l'andamento di questa popolazione a partire dal vettore di stato che osserviamo nel momento della valutazione.

Per calcolare la numerosità della popolazione al tempo successivo, al tempo 1, occorre ragionare sulla linea temporale sopra riportata. La numerosità delle larve al tempo 1, $x_1(1)$, sarà data dal prodotto tra il numero di insetti al tempo precedente, $x_3(0)$, e il numero di larve prodotte da ciascun insetto, il tasso di riproduzione relativo al terzo anno. Il numero di pupe al tempo 1, $x_2(1)$, sarà uguale al prodotto tra il numero di larve in 0, $x_1(0)$, e la probabilità che queste sopravvivano. Ragionamento analogo per la numerosità degli insetti

$$x(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_3(0) \\ \frac{1}{2}x_1(0) \\ \frac{1}{3}x_2(0) \end{bmatrix}$$

Notiamo che il vettore $x(1)$ può essere ricavato dal prodotto del vettore $x(0)$ con una matrice $B_{3 \times 3}$:

$$Bx(0) = x(1),$$

l'incognita di questa equazione è solo la matrice B essendo $x(0)$ osservabile e $x(1)$ intuibile col ragionamento sopra esposto. Così possiamo definire la matrice B quale matrice di transizione da un tempo ad un altro per il modello di Bernadelli, per l'esempio dato.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora, il vettore di stato al tempo 2 sarà dato dal prodotto tra la matrice B e il vettore di stato al tempo 1, $x(1)$.

$$x(2) = Bx(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6x_3(0) \\ \frac{1}{2}x_1(0) \\ \frac{1}{3}x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2(0) \\ 3x_3(0) \\ \frac{1}{6}x_1(0) \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo potrà essere calcolato il vettore di stato al tempo 3.

$$x(3) = Bx(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_2(0) \\ 3x_3(0) \\ \frac{1}{6}x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

Evidenziamo che il vettore di stato al tempo 3 è uguale al vettore di stato al tempo 0, $x(3) = x(0)$.

In questo modo abbiamo riscontrato matematicamente la ciclicità che veniva osservata in alcune popolazioni di insetti. Infatti, abbiamo verificato che il ciclo al terzo periodo torna allo stato di partenza, la numerosità complessiva e per ogni classe di età torna ad essere quella inizialmente osservata in 0.

A questo punto possiamo domandarci a quali condizioni matematiche si realizza questa ciclicità.

2.2. Condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità nel modello di Bernadelli

Iniziamo generalizzando il modello di Bernadelli considerando una matrice di transizione del tipo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questa generalizzazione è utile al fine di trovare le condizioni a cui sottoporre i parametri ω_1 , ω_2 , α_3 in modo che sia valida la ciclicità dell'evoluzione, cioè che $x(3) = x(0)$.

Riproduciamo gli stessi passaggi svolti prima ma con la formula generale:

$$x(t+1) = Bx(t) \text{ con } t = 0, 1, 2. \quad (2.2.1)$$

$$x(1) = Bx(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 x_3(0) \\ \omega_1 x_1(0) \\ \omega_2 x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = Bx(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 x_3(0) \\ \omega_1 x_1(0) \\ \omega_2 x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \omega_2 x_2(0) \\ \alpha_3 \omega_1 x_3(0) \\ \omega_1 \omega_2 x_1(0) \end{bmatrix}$$

$$x(3) = Bx(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \omega_2 x_2(0) \\ \alpha_3 \omega_1 x_3(0) \\ \omega_1 \omega_2 x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \omega_1 \omega_2 x_1(0) \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 x_2(0) \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 x_3(0) \end{bmatrix}.$$

Notiamo che alla terza iterazione i coefficienti delle componenti del vettore di stato $x(3)$ sono tutte uguali.

$$X(3) = \begin{bmatrix} \alpha_3 \omega_1 \omega_2 X_1(0) \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 X_2(0) \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 X_3(0) \end{bmatrix} = \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{bmatrix} = \alpha_3 \omega_1 \omega_2 X(0).$$

Quindi, la condizione necessaria e sufficiente affinché gli elementi non nulli della matrice di transizione (ω_1 , ω_2 , α_3) conducano, alla terza iterazione, allo stato iniziale è che il coefficiente del vettore di stato al tempo 3 sia pari ad 1.

Cioè

$$X(3) = X(0) \quad \text{se e solo se} \quad \alpha_3 \omega_1 \omega_2 = 1. \quad (2.2.2)$$

Data la condizione necessaria e sufficiente trovata, $\alpha_3 \omega_1 \omega_2 = 1$, possiamo scegliere gli elementi della matrice B , come nel primo esempio; infatti, ponendo $\alpha_3 = 6$, $\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = \frac{1}{3}$ abbiamo che $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 1$.

Data la condizione necessaria e sufficiente (2.2.2) possiamo scegliere gli elementi di un'altra matrice B' ponendo, ad esempio, $\alpha_3 = 8$, $\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = \frac{1}{4}$ abbiamo che $8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 1$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

$$x(1) = B'x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x_3(0) \\ 1/2x_1(0) \\ 1/4x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = B'x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8x_3(0) \\ 1/2x_1(0) \\ 1/4x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2(0) \\ 4x_3(0) \\ 1/8x_1(0) \end{bmatrix}$$

$$x(3) = B'x(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_2(0) \\ 4x_3(0) \\ 1/8x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = x(0).$$

2.3. Rappresentazione grafica di esempi, programmata in Excel

Con i valori dati delle due matrici usate come esempio, di seguito saranno proposti due esempi numerici per il modello di Bernadelli:

Esempio 1.

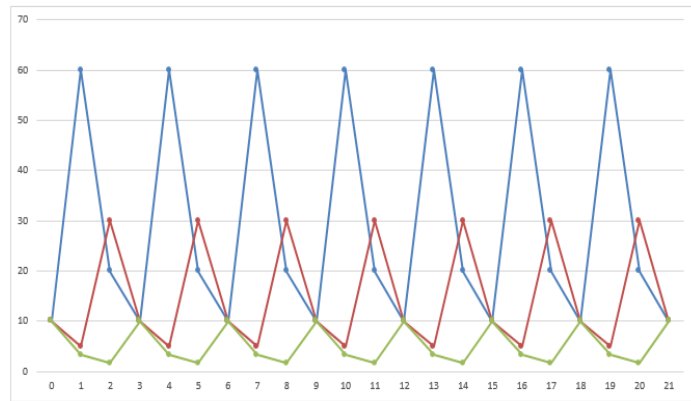
Data una matrice di transizione $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ e il vettore di stato al tempo zero $x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

otteniamo ciclicamente i seguenti vettori di stato:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}; x(1) = \begin{bmatrix} 60 \\ 5 \\ 3,33 \end{bmatrix}; x(2) = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 1,67 \end{bmatrix}; x(3) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = x(0)$$

possiamo evidenziare graficamente l'evoluzione nel tempo delle numerosità delle singole classi di età, rendendo così ancora più evidente la ciclicità dell'evoluzione.

tempo	stato 1	stato 2	stato 3
0	10	10	10
1	60,00	5,00	3,33
2	20,00	30,00	1,67
3	10,00	10,00	10,00
4	60,00	5,00	3,33
5	20,00	30,00	1,67
6	10,00	10,00	10,00
7	60,00	5,00	3,33
8	20,00	30,00	1,67
9	10,00	10,00	10,00
10	60,00	5,00	3,33
11	20,00	30,00	1,67
12	10,00	10,00	10,00
13	60,00	5,00	3,33
14	20,00	30,00	1,67
15	10,00	10,00	10,00
16	60,00	5,00	3,33
17	20,00	30,00	1,67
18	10,00	10,00	10,00
19	60,00	5,00	3,33
20	20,00	30,00	1,67
21	10,00	10,00	10,00



elaborazione propria

Figura 5: esempio 1 della condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità del modello di Bernadelli

Esempio 2.

Verifichiamo così anche graficamente come assumendo la condizione necessaria e sufficiente prima trovata $\alpha_3 \omega_1 \omega_2 = 1$ nel modello di Bernadelli risulti ancora verificata la ciclicità anche cambiando i valori della matrice di transizione.

Infatti, tenendo costante il vettore di stato al tempo 0 ma variando la matrice di transizione tenendo in considerazione la condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità del modello, (2.2.2)

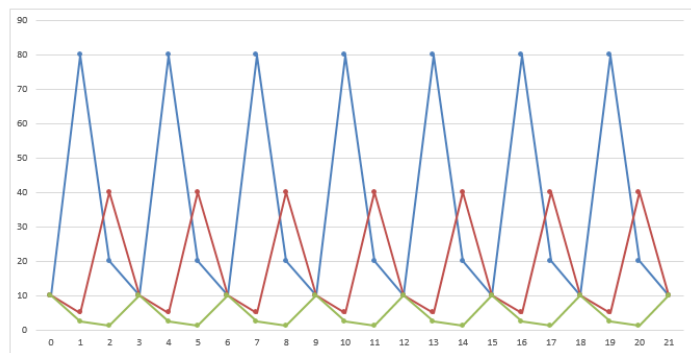
$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } X(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

otteniamo ciclicamente i seguenti vettori di stato:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}; x(1) = \begin{bmatrix} 80 \\ 5 \\ 2,5 \end{bmatrix}; x(2) = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 1,25 \end{bmatrix}; x(3) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = x(0)$$

da cui è possibile ottenere la seguente rappresentazione grafica dell'andamento della popolazione

tempo	stato 1	stato 2	stato 3
0	10	10	10
1	80,00	5,00	2,50
2	20,00	40,00	1,25
3	10,00	10,00	10,00
4	80,00	5,00	2,50
5	20,00	40,00	1,25
6	10,00	10,00	10,00
7	80,00	5,00	2,50
8	20,00	40,00	1,25
9	10,00	10,00	10,00
10	80,00	5,00	2,50
11	20,00	40,00	1,25
12	10,00	10,00	10,00
13	80,00	5,00	2,50
14	20,00	40,00	1,25
15	10,00	10,00	10,00
16	80,00	5,00	2,50
17	20,00	40,00	1,25
18	10,00	10,00	10,00
19	80,00	5,00	2,50
20	20,00	40,00	1,25
21	10,00	10,00	10,00



elaborazione propria

Figura 6: esempio 2 sulla condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità del modello di Bernadelli

L'andamento, come ci attendevamo, è molto simile e la ciclicità della numerosità della popolazione è ancora verificata e lo è sullo stesso periodo.

Adesso un ultimo esempio a riguardo.

Esempio 3.

Proviamo ad utilizzare una nuova matrice di transizione, tenendo costante il vettore di stato al tempo 0.

$$B'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } X(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}; x(1) = \begin{bmatrix} 50 \\ 1,67 \\ 2,5 \end{bmatrix}; x(2) = \begin{bmatrix} 12,5 \\ 8,33 \\ 0,42 \end{bmatrix}; x(3) = \begin{bmatrix} 2,08 \\ 2,08 \\ 2,08 \end{bmatrix} \neq x(0)$$

da cui, utilizzando il programma precedentemente usato, otteniamo la seguente rappresentazione grafica

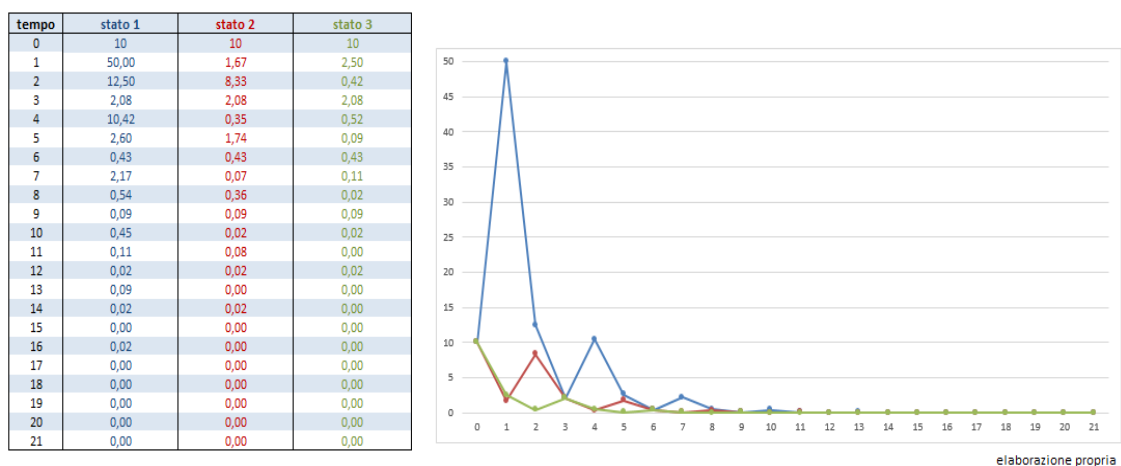


Figura 7: esempio negativo sulla condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità del modello di Bernadelli

In questo esempio, dalla tabella, e ancora meglio dal grafico, notiamo che la ciclicità osservata negli esempi precedenti non è più verificata.

La ciclicità non è verificata proprio perché non è verificata la condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia.

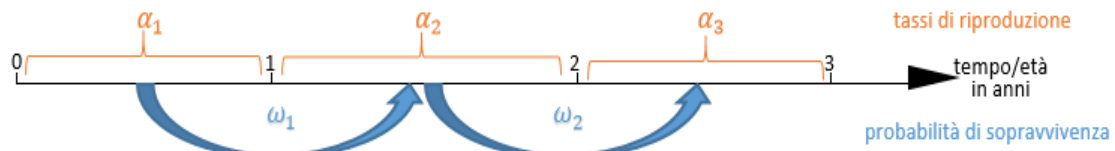
Infatti, dovrebbe essere $\alpha_3 \omega_1 \omega_2 = 1$ e invece $5 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \neq 1$.

2.4. Generalizzazione: il modello di Leslie con 3 classi di età

Il modello di Leslie prende spunto dall'antecedente modello di Bernadelli.

Partendo dal modello di Bernadelli possiamo ipotizzare una situazione in cui il tasso di riproduzione sia non nullo anche negli stati 1 e 2 e utilizzare probabilità generiche di sopravvivenza da uno stato all'altro.

Assunte queste generalizzazioni, dal modello di Bernadelli si giunge al modello di Leslie con tre classi di età.



Con $\alpha_i = \text{tasso di riproduzione in età } i$ ($\alpha_i \geq 0$)
 $\omega_i = \text{probabilità di sopravvivenza tra } i \text{ e } i + 1$ ($0 < \omega_i < 1$)

Ad ogni passo il vettore di stato sarà calcolato come visto finora con la sola differenza nella matrice di transizione, L :

$$x(t + 1) = Lx(t) \quad (2.4.1)$$

Notiamo che in questa fase i figli sono attribuiti indistintamente tra maschi e femmine.

Successivamente, nel modello strutturato per sesso i tassi di fertilità verranno attribuiti ai soli individui di sesso femminile.

Resta quindi da definire la matrice di transizione da un tempo all'altro del modello di Leslie

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il modello di Leslie è proprio $x(t + 1) = Lx(t)$ con $x(0)$ dato, in quanto osservabile nell'istante di valutazione.

$$x_1(t + 1) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t)$$

$$x_2(t + 1) = [\omega_1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \omega_1 x_1(t)$$

$$x_3(t + 1) = [0 \quad \omega_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \omega_2 x_2(t)$$

da cui otteniamo il vettore di stato $x(t + 1)$

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) \\ \omega_1 x_1(t) \\ \omega_2 x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

2.5. Equilibrio dinamico ed equilibrio demografico

In questa sezione verranno fornite le definizioni di equilibrio dinamico e di equilibrio demografico (o della distribuzione per classi di età).

Abbiamo un equilibrio dinamico quando il vettore di stato non cambia da una transizione all'altra, cioè rimangono costanti i rapporti tra la numerosità di ciascuna classe di età e la numerosità della popolazione totale e rimane costante anche il valore della numerosità delle classi e della popolazione totale.

Parliamo di equilibrio demografico quando invece rimane stabile solo il rapporto tra numerosità delle singole classi e numerosità totale della popolazione, la numerosità totale e per classi di età varia.

Tabella 1: equilibrio ed equilibrio della distribuzione per età

	Equilibrio demografico	Equilibrio dinamico
$x_j / \sum x_i \quad \forall j$	costante	costante
$\sum x_i$	non costante	costante
$\forall_i x_i(0) = x_i(1) = \dots = x_i(t)$	non si verifica	si verifica

Elaborazione propria

Quindi, l'equilibrio dinamico implica sempre l'equilibrio demografico ma non è vero che l'equilibrio demografico implica l'equilibrio dinamico.

L'equilibrio dinamico è un caso particolare di equilibrio demografico in cui oltre ai rapporti rimangono costanti anche le numerosità assolute delle singole classi di età.

Ad esempio, se una popolazione raddoppia allora il vettore di stato verrà moltiplicato per due, questo comporta che la distribuzione rimane invariata ma il vettore di stato di fatto raddoppia; quindi avremo equilibrio demografico ma non equilibrio dinamico.

L'equilibrio demografico è l'autovettore associato ad un autovalore positivo.

Nell'equilibrio dinamico invece, ad ogni iterazione il vettore di stato rimane sempre uguale

$$x(0) = x(1) = \dots = x(t)$$

$$\text{con } x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}; x(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix}; \dots; x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Quindi, $\forall_i$ con $i = 1, 2, 3$ abbiamo che $x_i(0) = x_i(1) = \dots = x_i(t)$

La distribuzione probabilistica corrispondente è il vettore definito come

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sum x_i} \\ \frac{x_2}{\sum x_i} \\ \frac{x_3}{\sum x_i} \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

Questo risulta essere un vettore normalizzato in quanto ogni sua componente è divisa per la somma delle componenti, cioè per la norma del vettore $\|\bar{z}\|$.

Normalizzare un vettore v ($v > 0$) ad n componenti significa $\frac{1}{\sum_{i=1}^n v_i} v$; di fatto stiamo dividendo per la norma di v .

Attraverso la normalizzazione creiamo, di fatto, la distribuzione di probabilità della popolazione.

Supponendo un'urna con all'interno i diversi individui, nel vettore sono rappresentate le probabilità di estrarre un individuo della classe 1 piuttosto che della classe 2 o 3.

Le componenti del vettore $\bar{z}$ sono le probabilità che da una popolazione si estragga un individuo, in modo aleatorio, che appartenga ad una specifica classe di età. In questo senso la distribuzione è stabile se siamo in equilibrio demografico, rimangono costanti i rapporti e quindi queste probabilità.

Geometricamente significa che il vettore della popolazione si muove lungo una retta, cioè è un multiplo di un autovettore fisso.

Quindi, un equilibrio dinamico implica sempre l'equilibrio demografico ma non è vero il contrario.

Con $\bar{z} \in \mathbf{R}^3$, $\bar{z} \geq 0$, $z_i \neq 0$ anche se realisticamente non è vero che alcune componenti del vettore possano essere nulle perché staremmo ipotizzando che ci siano dei "buchi" nella distribuzione, cioè classi di età vuote nella distribuzione per età.

Si chiama equilibrio demografico (o per la distribuzione di età) se esiste $\lambda > 0$ tale che $L\bar{z} = \lambda\bar{z}$.

Ossia $\bar{z}$ è un equilibrio per la distribuzione di età se e solo se $\bar{z}$ è un autovettore non negativo (di fatto è sempre positivo perché non ha senso per un modello dinamico avere una componente del vettore della popolazione nulla) di L , associato ad un autovalore $\lambda > 0$.

$\lambda_0 = 1$ rappresenta l'unico caso in cui la distribuzione non cambia e non cambia neppure il vettore di stato; in questo, unico, caso l'equilibrio demografico implica l'equilibrio dinamico (solo nel caso $\lambda_0 = 1$).

La popolazione potrebbe anche estinguersi nonostante continui a tenere costante $\bar{z}$. Questo è un esempio incalzante perché nonostante ci sia equilibrio demografico non c'è invece equilibrio dinamico perché la popolazione benché mantenga i rapporti costanti tende ad estinguersi.

Riepilogando, per trovare l'equilibrio demografico devo:

1. calcolare l'autovalore positivo di L ;

2. calcolare gli autovettori positivi⁴ di L .

Nota bene che la popolazione potrebbe anche estinguersi nonostante continui a tenere costante $\bar{z}$; cioè l'equilibrio demografico può verificarsi anche nel caso di una popolazione che si sta estinguendo, in quanto vengono tenuti in considerazione solamente i rapporti tra la numerosità della singola classe di età e la numerosità dell'intera popolazione. Viceversa una popolazione che si sta estinguendo non sarà mai in equilibrio dinamico.

C'è un equilibrio demografico nel modello di Leslie? Se esiste come si calcola?

Quindi, esiste un autovalore positivo per L ?

2.6. Equilibrio demografico per il modello di Bernadelli

Ora cercheremo di trovare un equilibrio demografico per il modello di Bernadelli.

Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$.

Quindi, $\lambda > 0$ è un autovalore di L se e solo se il sistema $(L - \lambda I_3)\bar{z} = \bar{0}$ ha una soluzione non banale quindi se e solo se $\det(L - \lambda I_3) = 0$

Cerchiamo un autovalore positivo, quindi

$$\det(B - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/3 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2) + 1,$$

allora il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = -\lambda^3 + 1$

Pertanto $\lambda = 1$ risulta essere l'unica soluzione fra i numeri positivi.

Adesso calcoliamo un autovettore associato.

$\bar{z}$ è autovettore associato a $\lambda = 1$ se e solo se $\exists \bar{z} \in \mathbf{R}^3, \bar{z} \neq 0$ tale che $(B - \lambda I_3)\bar{z} = \bar{0}$

Sostituendo a $(B - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/3 & -\lambda \end{bmatrix}$ il valore trovato di λ otteniamo

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{bmatrix} = (B - 1I_3)$$

⁴ Nota che la definizione di autovettore implica solo la diversità dall'elemento nullo del vettore ma l'eventualità che l'autovettore possa essere minore di zero non risulta rilevante al fine del nostro studio perché non realistica. Non è possibile contare una classe di numerosità negativa, al più potremmo avere una classe di età che risulta essere vuota. Anche l'ipotesi di avere una classe di età vuota è un'ipotesi per lo più teorica che realistica se non per le classi di età prossime all'età estrema.

$$(B - 1I_3)\bar{z} = \bar{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} -z_1 + 6z_3 = 0 \\ \frac{1}{2}z_1 - z_2 = 0 \\ \frac{1}{3}z_2 - z_3 = 0 \end{cases};$$

quindi, posto arbitrariamente $z_3 = 1$,

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

verifichiamo che $(B - 1I_3)\bar{z} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

verifichiamo anche che $B\bar{z} = \lambda\bar{z}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_0 = 1$$

Lo stato $\bar{z}$ non ha solo le caratteristiche, già note, degli stati del modello di Bernadelli, cioè che ricorrono ogni tre passi. La ciclicità assunta per la distribuzione cambia perché questo stato garantisce un andamento sempre stabile della popolazione, non solo ogni tre passi.

Si sottolinea che quando si parla di equilibrio demografico ci si riferisce all'equilibrio della distribuzione per età e non all'equilibrio dinamico.

Si noti anche che nel caso particolare con $\lambda_0 = 1$ otteniamo anche l'equilibrio dinamico in quanto le numerosità per classe di età rimangono costanti; questo però è solo un caso particolare.

Nel caso in cui la popolazione si modifichi e che quindi si ipotizzi $\lambda_0 \neq 1$ allora evidentemente si avrà solamente un equilibrio demografico in quanto le numerosità assolute per classi di età di fatto varieranno, pur rimanendo i costanti i rapporti.

Partendo da uno stato che è un equilibrio demografico allora, immediatamente,

$\lambda_0 > 1$ implica un aumento della popolazione, per esempio $\lambda_0 = 2$ significherebbe che la popolazione si raddoppia ma sempre mantenendo l'equilibrio per la distribuzione di età.

$0 < \lambda_0 < 1$ implica una diminuzione della popolazione, per esempio $\lambda_0 = 1/2$ significherebbe che la popolazione si dimezza ma sempre mantenendo l'equilibrio per la distribuzione di età.

Quindi notiamo che $\bar{z}$ è un equilibrio demografico ma sono equilibri demografici anche tutti i suoi multipli.

Torniamo all'esempio numerico, verifichiamo che inserendo il vettore di stato trovato $\bar{z}$ all'interno del modello otteniamo l'equilibrio del modello di Bernadelli e quindi anche l'equilibrio dinamico, dato che $\lambda_0 = 1$.

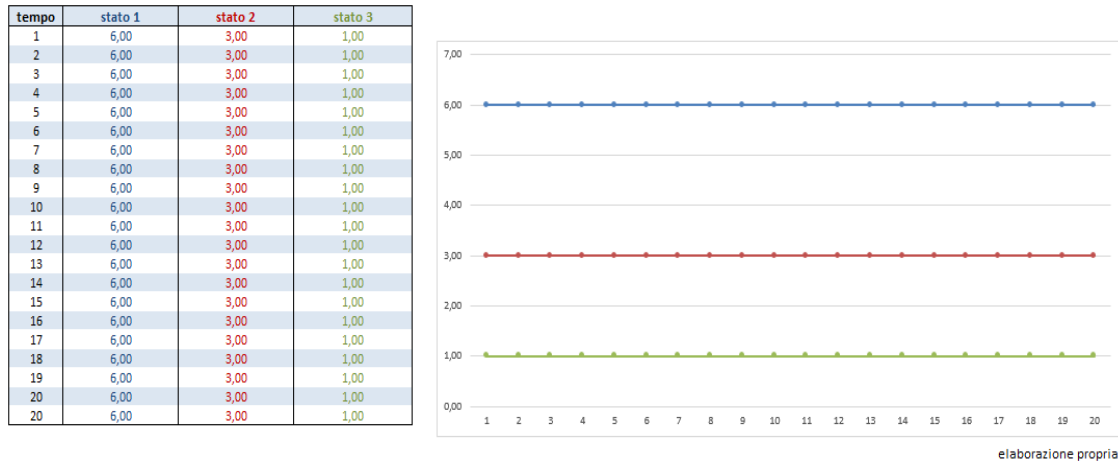


Figura 8: esempio di equilibrio del modello di Bernadelli

Questa esemplificazione è meramente funzionale allo studio successivo del modello di Leslie e alla comprensione della differenza tra i due tipi di equilibrio in quanto un modello di Bernadelli che rispetta la condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità prima verificata avrà sempre autovalore pari all'unità.

Riepilogando:

in un modello di Bernadelli $\lambda_0 = 1$, sempre. Quindi per questo modello non è pensabile, neanche didatticamente, pensare di fare valutazioni per valori $\lambda_0 \neq 1$.

Per discutere i casi maggiori o minori di uno dobbiamo essere nel contesto di un modello di Leslie 3x3.

2.7. Equilibrio demografico per il modello di Leslie con 3 classi di età

Supponiamo che λ sia un autovalore di L . Allora per un autovettore associato abbiamo $L\bar{z} = \lambda\bar{z}$

cioè $(L - \lambda I_3)\bar{z} = \bar{0}$ con I_3 matrice identità dello stesso ordine di L .

Quindi $\lambda > 0$ è un autovalore di L se e solo se il sistema $(L - \lambda I_3)\bar{z} = \bar{0}$ ha una soluzione non banale quindi se e solo se $\det(L - \lambda I_3) = 0$.

Quindi, data

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}$$

allora,

$$(L - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = (\alpha_1 - \lambda)\lambda^2 - \alpha_2(-\lambda\omega_1) + \alpha_3(\omega_1\omega_2) = \\ &= \alpha_1\lambda^2 - \lambda^3 + \alpha_2\omega_1\lambda + \alpha_3\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

da cui il polinomio caratteristico normalizzato

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \alpha_1\lambda^2 - \alpha_2\omega_1\lambda - \alpha_3\omega_1\omega_2 \quad (2.7.1)$$

benché i coefficienti del polinomio caratteristico siano reali può succedere che le radici del polinomio siano complesse e quindi anche gli autovalori siano complessi.

Ora cerchiamo $\lambda > 0$ per $p(\lambda) = 0$

$$\lambda^3 = \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\omega_1\lambda + \alpha_3\omega_1\omega_2$$

la soluzione di questa equazione non è affatto banale ma possiamo osservare come dividendo primo e secondo membro per λ^3 otteniamo

$$1 = \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2\omega_1}{\lambda^2} + \frac{\alpha_3\omega_1\omega_2}{\lambda^3},$$

dove i singoli addendi risultano essere tre funzioni “iperboliche” sempre più schiacciate verso gli assi.

Ora definiamo la funzione

$$q(\lambda) := \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2\omega_1}{\lambda^2} + \frac{\alpha_3\omega_1\omega_2}{\lambda^3} \quad (\lambda > 0) \quad (2.7.2)$$

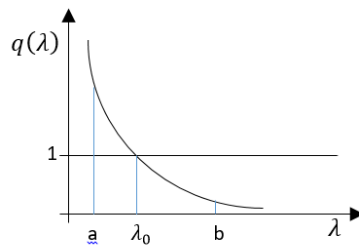


Figura 9 “rappresentazione grafica della funzione $q(\lambda)$ in $\mathbf{R}^3$ ”

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(\lambda) = 0 \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow +0} q(\lambda) = +\infty$$

Allora, il teorema di Bolzano⁵ ci garantisce l'esistenza di $\lambda_0 > 0$ autovalore ma senza fornircene il valore.

$\lambda_0 > 0$ è unico, essendo $q(\lambda)$ una funzione strettamente monotona decrescente (tocca una sola volta la retta $q(\lambda) = 1$), l'equazione $q(\lambda) = 1$ può avere una sola soluzione, tra i numeri positivi.

L'autovalore è unico, l'autovettore no perché definito salvo un multiplo diverso da 0.

$$(L - \lambda I)\bar{z} = \bar{0},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 - \lambda_0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per trovare un autovettore occorre che il sistema abbia una soluzione non banale, alla quale consegue l'equilibrio demografico.

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \lambda_0)z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0 \\ \omega_1 z_1 - \lambda_0 z_2 = 0 \\ \omega_2 z_2 - \lambda_0 z_3 = 0 \end{cases}$$

Posto, per il teorema di Rouché-Capelli, arbitrariamente $z_3 = 1$ otteniamo, di conseguenza, i valori di z_2 e z_1 .

$$z_2 = \frac{\lambda_0}{\omega_2}$$

$$z_1 = \frac{\lambda_0^2}{\omega_1 \omega_2}$$

da cui

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_0^2}{\omega_1 \omega_2} \\ \frac{\lambda_0}{\omega_2} \\ 1 \end{bmatrix} > 0 \text{ è un equilibrio demografico.} \quad (2.7.3)$$

È un equilibrio demografico e non l'equilibrio demografico perché anche i suoi multipli sono equilibri demografici.

Non è scontato che ci sia un autovettore positivo associato all'autovalore positivo ma ora abbiamo dimostrato che nel caso di una matrice di Leslie è verificato.

⁵ Secondo Wikipedia, in analisi matematica il teorema di Bolzano, detto anche teorema degli zeri per le funzioni continue, assicura l'esistenza di almeno una radice delle funzioni continue reali che assumano segni opposti ai due estremi di un intervallo.

Considerando una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto, ovvero $f(a) < 0 < f(b)$ (oppure $f(b) < 0 < f(a)$) allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$

Infatti le probabilità di sopravvivenza sono sempre positive ed anche l'autovalore è sempre positivo, ne consegue che l'autovettore per la matrice di Leslie associato all'autovalore positivo è positivo.

Abbiamo quindi dimostrato e calcolato che il modello di Leslie ha un equilibrio demografico.

2.8. Passaggio ad una valutazione logaritmica

Sia $L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}$ la matrice di transizione del modello di Leslie.

Sia $x(0)$ un equilibrio demografico e quindi un autovettore corrispondente all'autovalore λ_0 .

Allora

$$\begin{aligned} x(1) &= Lx(0) = L\bar{z} = \lambda_0\bar{z} = \lambda_0x(0) \\ x(2) &= \lambda_0x(1) = \lambda_0(\lambda_0x(0)) = \lambda_0^2x(0) \\ &\vdots \\ x(t) &= \lambda_0^t x(0) \\ t &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Guardando alle singole componenti del vettore di stato, anche $\forall i$ risulta che $x_i(t) = \lambda_0^t x_i(0)$.

Ora, effettuiamo il passaggio al logaritmo

$$\begin{aligned} \ln x_i(t) &= \ln \lambda_0^t x_i(0) \\ \ln x_i(t) &= \ln \lambda_0^t + \ln x_i(0) \\ \ln x_i(t) &= t \ln \lambda_0 + \ln x_i(0) \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Dove $\ln \lambda_0 = a$ e $\ln x_i(0) = b$ sono due costanti.

Notiamo che nella forma logaritmica l'equazione assomiglia all'equazione di una retta con coefficiente angolare pari a $\ln \lambda_0 = a$ e punto di intersezione con l'asse delle ordinate pari a $\ln x_i(0) = b$.

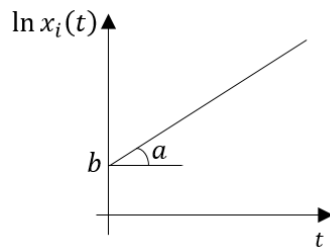


Figura 10: rappresentazione grafica del $\ln x_i(t)$

Adesso riformulando il programma precedente in termini logaritmici otteniamo per i seguenti tre esempi numerici delle rappresentazioni grafiche che evidenziano il legame tra l'andamento

della popolazione e la variazione del valore dell'autovalore λ_0 associato alla matrice di transizione.

Evidenziamo che per questa fattispecie parliamo di scala semilogaritmica in quanto solamente alle ordinate è applicato il logaritmo, e non alla variabile indipendente t .

Esempio 1

Data la matrice di transizione del modello di Leslie

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda > 0$ è autovalore di L_1 se e solo se $\det(L_1 - \lambda I_3) = 0$

$$(L_1 - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(L_1 - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)\lambda^2 + 3(0,5 \times 0,4) = 2\lambda^2 - \lambda^3 + 3/5$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}(5\lambda^3 - 10\lambda^2 - 3)$$

$$\frac{1}{5}(5\lambda^3 - 10\lambda^2 - 3) = 0$$

Da cui numericamente possiamo trarre come soluzione reale 2.132.

Quindi, l'autovalore interessante della matrice L_1 è $\lambda_0 = 2.132$ ed inserendo tale valore all'interno del programma otteniamo la seguente rappresentazione grafica.

Dato vettore di stato al tempo 0 è $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

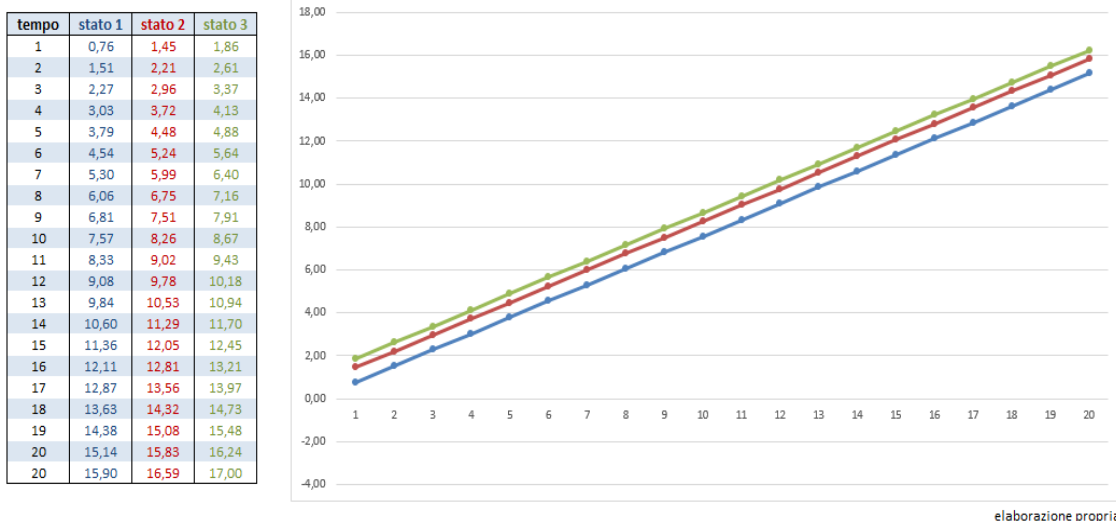


Figura 11: rappresentazione dell'equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 2.132$

Notiamo che un λ_0 così alto produce un andamento della distribuzione per età della popolazione molto crescente. In venti anni passiamo da una popolazione di 6 individui (somma delle componenti del vettore di stato al tempo zero) ad una di 49. Vediamo anche che all'inizio del periodo gli individui della prima classe erano il 33% degli individui del terzo stato e al ventesimo anno invece sono il 93%.

Esempio 2

Data la matrice di transizione del modello di Leslie

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda > 0$ è autovalore di L_2 se e solo se $\det(L_2 - \lambda I_3) = 0$

$$(L_2 - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(L_2 - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)\lambda^2 + 3(0,5 \times 0,4) = -\lambda^3 + 3/5$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{3}{5}$$

$$\lambda^3 = \frac{3}{5} \rightarrow \lambda_0 = \sqrt[3]{3/5}$$

Quindi, l'autovalore associato alla matrice L_2 è $\lambda_0 = 0.843$.

Il vettore di stato al tempo 0 è $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Quindi, inserendo il valore trovato dell'autovalore all'interno del programma otteniamo la seguente rappresentazione grafica.

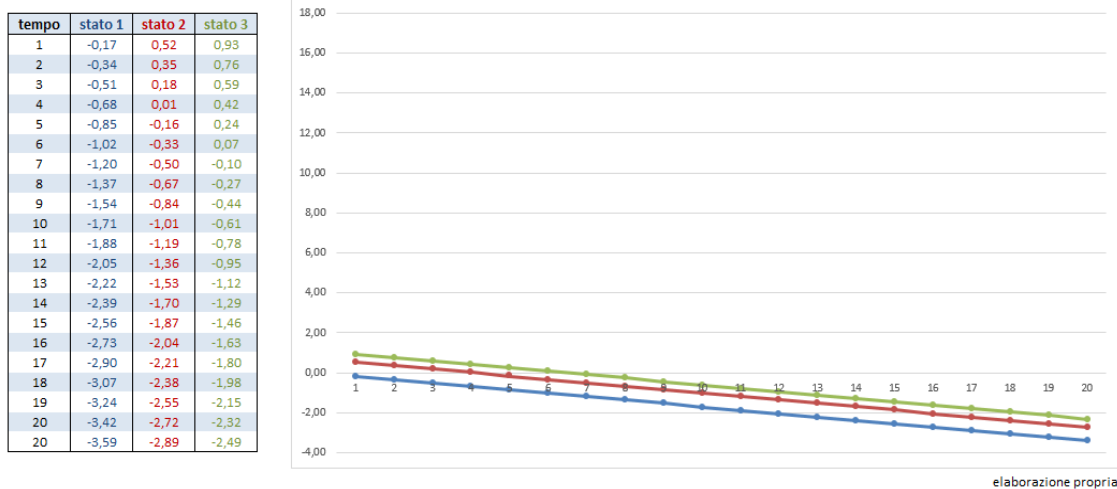


Figura 12: rappresentazione dell'equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 0.843$

In questo esempio evidenziamo che un valore di λ_0 prossimo ma inferiore ad 1 crea un andamento leggermente decrescente della popolazione. Vediamo infatti che la popolazione diminuisce di anno in anno fino a raggiungere valori negativi, valori che non hanno evidentemente senso nella realtà, una popolazione non può essere costituita da un numero negativo di individui, al più sarà costituita da nessun individuo.

Inoltre ciò che va sotto zero non è la numerosità assoluta della popolazione ma il logaritmo naturale di questa.

Esempio 3

Data la matrice di transizione del modello di Leslie

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda > 0$ è autovalore di L_3 se e solo se $\det(L_3 - \lambda I_3) = 0$

$$(L_3 - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 2 & 3 \\ 0,5 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(L_3 - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 2 & 3 \\ 0,5 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)\lambda^2 - 2(-0,5\lambda) + 3(0,5 \times 0,4) \\ &= -\lambda^3 + \lambda + 3/5 \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}(5\lambda^3 - 5\lambda - 3)$$

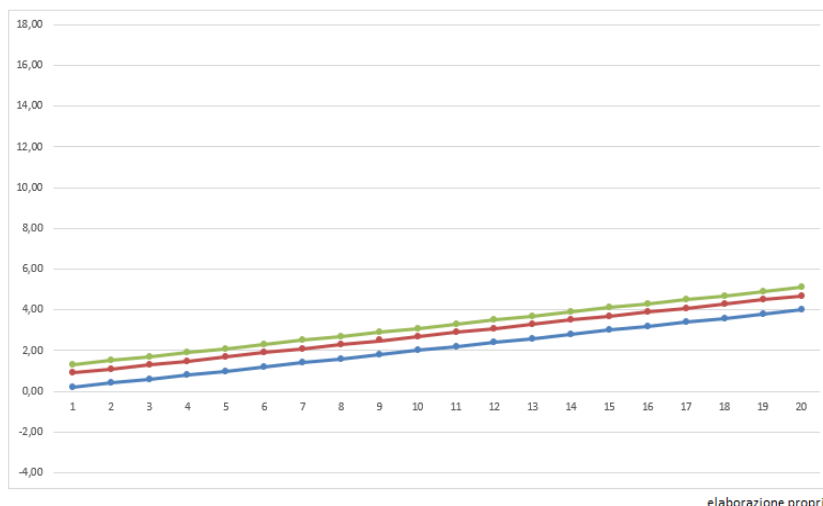
$$\frac{1}{5}(5\lambda^3 - 5\lambda - 3) = 0$$

Quindi, l'autovalore interessante della matrice L_3 è $\lambda_0 = 1.221$.

Il vettore di stato al tempo 0 è $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Quindi, inserendo il valore trovato dell'autovalore all'interno del programma otteniamo la seguente rappresentazione grafica.

tempo	stato 1	stato 2	stato 3
1	0,20	0,89	1,30
2	0,40	1,09	1,50
3	0,60	1,29	1,70
4	0,80	1,49	1,90
5	1,00	1,69	2,10
6	1,20	1,89	2,30
7	1,40	2,09	2,50
8	1,60	2,29	2,70
9	1,80	2,49	2,90
10	2,00	2,69	3,10
11	2,20	2,89	3,29
12	2,40	3,09	3,49
13	2,60	3,29	3,69
14	2,80	3,49	3,89
15	3,00	3,69	4,09
16	3,19	3,89	4,29
17	3,39	4,09	4,49
18	3,59	4,29	4,69
19	3,79	4,49	4,89
20	3,99	4,69	5,09
20	4,19	4,89	5,29



elaborazione propria

Figura 13: rappresentazione dell'equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 1.221$

L'andamento della distribuzione per età in questo caso è simile a quello del primo esempio in quanto entrambi i λ_0 sono maggiori dell'unità. L'andamento meno crescente di questa simulazione è dovuto ad un λ_0 maggiore ma comunque prossimo all'unità. L'incremento che ne consegue è quindi modesto.

Al termine di questa sezione si fa notare come la scala che è stata utilizzata nei grafici è sempre stata la stessa in modo da rendere più agevole il confronto degli andamenti e da far apprezzare al meglio le differenze tra le diverse simulazioni.

Si ricorda che i punti dei grafici sono stati tutti trovati utilizzando l'equazione introdotta ad inizio sezione:

$$\ln x_i(t) = t \ln \lambda_0 + \ln x_i(0)$$

Concludendo questa sezione si sottolinea che in questo modello risulta fondamentale l'apporto dato dall'autovalore della matrice di transizione; questo è ancora più evidente se mostrato attraverso dei grafici che descrivono l'evoluzione della numerosità delle singole classi di età.

In particolare vediamo che per valori dell'autovalore λ_0 prossimi all'unità le variazioni sono contenute.

Se λ_0 è poco maggiore dell'unità avremo un leggero incremento, viceversa se λ_0 è di poco minore dell'unità l'andamento della popolazione sarà leggermente decrescente.

Si è anche notato che quando λ_0 è molto più grande dell'unità l'andamento è molto crescente.

Esempio 2bis

Non è stato riportato il caso in cui λ è molto più piccolo dell'unità, per esempio $\lambda_0 = 0.2$ perché stando al vettore di stato al tempo 0, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, il logaritmo naturale della popolazione assumerebbe valori negativi già al primo periodo.

Si può però provare quanto detto utilizzando la matrice di transizione del modello di Leslie

$$L_{2bis} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,15 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}$$

Perché si è scelta questa nuova matrice? Di fatto non abbiamo fatto altro che imporre tassi di riproduzione e probabilità di sopravvivenza da uno stato all'altro inferiori rispetto all'esempio 2, per cui ci aspettiamo che l'autovalore diminuisca.

Infatti, l'autovalore associato alla matrice L_{2bis} è $\lambda_0 = 0.30$ (nell'esempio 2, $\lambda_0 = 0.843$)

Il vettore di stato al tempo 0 è $x(0) = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, cioè dieci volte più grande di quello considerato finora.

Inserendo il valore trovato dell'autovalore e il nuovo vettore di stato all'interno del programma otteniamo la seguente rappresentazione grafica.

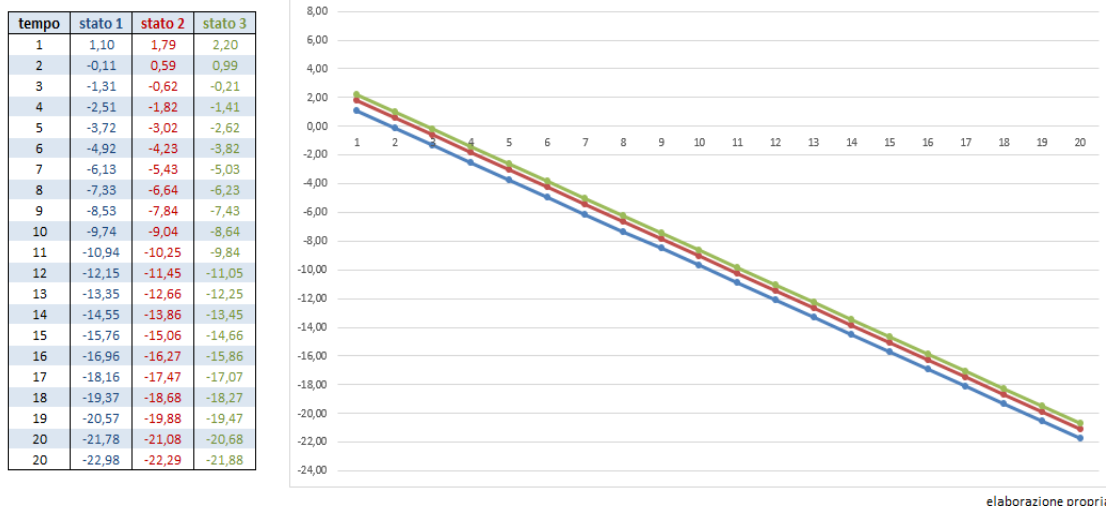
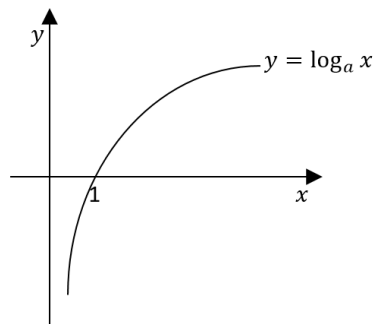


Figura 14: rappresentazione dell'equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 0,300$

Vediamo che, nonostante la popolazione iniziale fosse dieci volte più grande di quella considerata nei 3 esempi precedenti, ora risulta che la numerosità di tutte e tre classi di età diventa negativa già al terzo periodo (nell'esempio 2 questo accadeva al periodo 7).

Evidentemente, benché il modello fornisca un risultato negativo dal punto di vista demografico è insensato pensare ad una numerosità negativa della popolazione. Infatti, si ribadisce che in questo esempio quello che assume valori negativi non è il valore assoluto della numerosità della popolazione ma il logaritmo naturale della numerosità.

Sappiamo che il logaritmo naturale assume valore negativi solo per valori dell'argomento compresi tra 0 ed 1.



Riepilogando, la formula per il calcolo dei punti della distribuzione per età della popolazione non dipende direttamente dalla matrice di transizione considerata, non è presente infatti nella formula.

Nella formula però compare λ_0 , autovalore della matrice di transizione, che riassume le informazioni della matrice.

Nella matrice 2bis si è infatti evidenziato che otteniamo un valore di λ_0 più piccolo perché nella matrice si sono ipotizzati tassi di riproduzione e probabilità di sopravvivenza minori a quelli fino a quel momento utilizzati.

Evidentemente, una popolazione con bassa natalità e bassa probabilità di sopravvivenza è destinata ad estinguersi in periodi più o meno brevi, nell'esempio 2 in sette anni e nell'esempio 2bis in 3.

Quindi, ricordiamo sempre che il ragionamento intuitivo tramite il quale è stato scritto all'inizio del capitolo il modello di Bernadelli dev'essere sempre tenuto come bussola per analizzare e comprendere in senso pratico quello che poi la matematica sviluppa.

Ci stiamo occupando di matematica applicata e non di matematica per la matematica quindi stiamo costantemente cercando di rispondere a problematiche reali, attraverso lo studio matematico.

Infine, una tabella con i risultati in sintesi della sezione.

Tabella 2: andamento della numerosità della popolazione in funzione di λ_0

Valore di λ_0	Andamento della numerosità della popolazione
$\lambda_0 = 1$	costante
$\lambda_0 > 1$	poco crescente
$\lambda_0 \gg 1$	molto crescente
$\lambda_0 < 1$	poco decrescente
$\lambda_0 \ll 1$	molto decrescente

elaborazione propria

Notando bene che λ_0 è strettamente positivo.

2.9. Intuizioni sulla convergenza ad un equilibrio demografico

Adesso attraverso alcune rappresentazioni grafiche si vedrà, empiricamente, se e come è possibile raggiungere asintoticamente un equilibrio demografico.

Data la matrice di Leslie, $L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$, ed il vettore di stato al tempo 0, $x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

$\ln x_i(t) = \ln(L^t x(0))_i$

Tempo	$\ln x_1(t)$	$\ln x_2(t)$	$\ln x_3(t)$	SOMMA
1	2,30	2,30	2,30	6,91
2	3,14	1,95	1,79	6,87
3	2,65	2,78	1,44	6,86
4	2,58	2,29	2,27	7,14
5	3,10	2,23	1,78	7,11
6	2,68	2,75	1,71	7,14
7	2,76	2,33	2,24	7,32
8	3,08	2,40	1,82	7,30
9	2,75	2,72	1,89	7,36
10	2,88	2,39	2,21	7,49
11	3,07	2,52	1,88	7,48
12	2,82	2,71	2,01	7,55
13	2,97	2,47	2,20	7,64
14	3,08	2,61	1,96	7,65
15	2,90	2,72	2,10	7,73
16	3,04	2,55	2,21	7,80
...	...	...	...	...
40,00	3,45	3,06	2,53	9,04
41,00	3,45	3,09	2,55	9,09

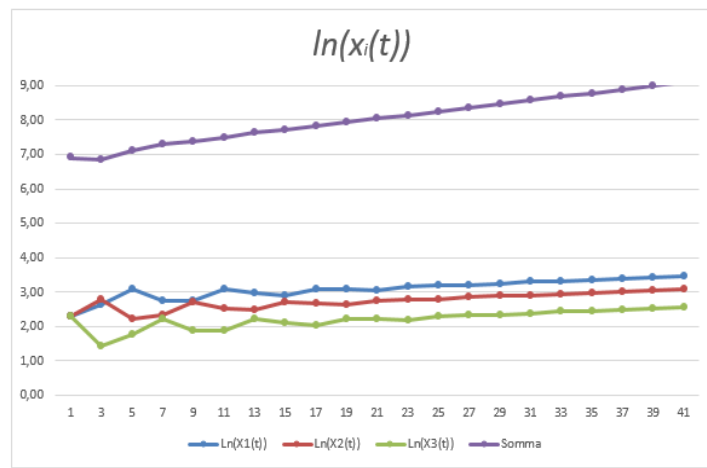


Figura 15: intuizioni sulla convergenza all'equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_1

Cosa possiamo intuire da questa rappresentazione?

Notiamo che per i primi 13 anni siamo ben lontani da un equilibrio demografico, nei secondi tredici anni invece notiamo che la distanza dall'equilibrio demografico tende a diminuire fino a quando, nei rimanenti anni, l'equilibrio della distribuzione per età della popolazione viene di fatto raggiunto e mantenuto.

Vediamo altri esempi e cerchiamo di dedurre delle regole affinché questa tensione all'equilibrio si verifichi.

Negli esempi successivi si lascerà invariato il vettore di stato e si modificherà unicamente la prima riga della matrice di transizione. La prima riga sarà modificata facendo assumere alternativamente agli α_i valori uguali o diversi da zero (sempre nell'ambito dei numeri positivi).

Nell'esempio precedente $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$ e $\alpha_3 > 0$.

Quindi, avere $\alpha_1 = 0$ e poi due α consecutivi strettamente positivi conduce all'equilibrio.

Nell'esempio che segue sarà $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 > 0$.

Data la matrice di Leslie $L_2 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$ ed il vettore di stato al tempo 0 $x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$\ln x_i(t) = \ln(L^t x(o))_i$$

Tempo	$\ln x_1(t)$	$\ln x_2(t)$	$\ln x_3(t)$	SOMMA
1	2,30	2,30	2,30	6,91
2	3,14	1,95	1,79	6,87
3	2,94	2,78	1,44	7,15
4	2,64	2,58	2,27	7,49
5	3,16	2,29	2,07	7,52
6	3,13	2,80	1,78	7,71
7	2,93	2,78	2,29	8,00
8	3,23	2,57	2,27	8,07
9	3,29	2,88	2,06	8,23
10	3,17	2,93	2,37	8,47
11	3,35	2,81	2,42	8,58
12	3,44	2,99	2,30	8,73
13	3,38	3,08	2,48	8,94
14	3,49	3,02	2,57	9,08
15	3,58	3,13	2,51	9,22
16	3,57	3,23	2,62	9,41
...	...	...	...	...
40,00	4,88	4,47	3,90	13,25
41,00	4,93	4,52	3,96	13,41

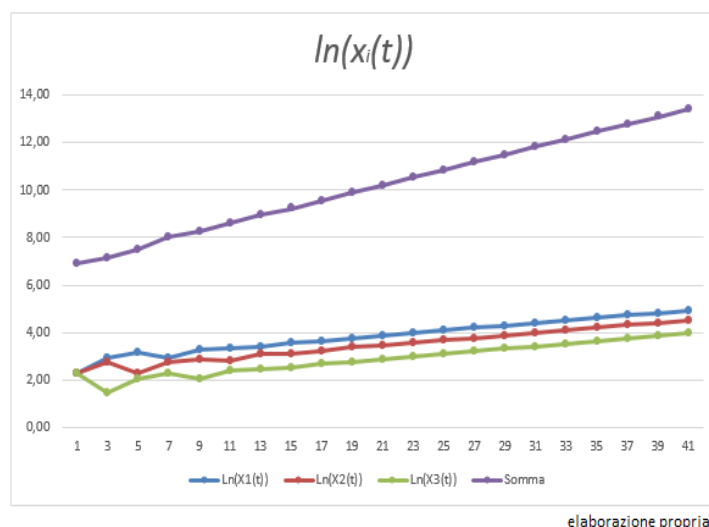


Figura 16: intuizioni sulla convergenza all'equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_2

Vediamo che anche in questo esempio dopo un primo momento di instabilità già dopo undici anni si inizia a delineare l'equilibrio della distribuzione per età della popolazione che si raggiunge poi al diciannovesimo anno.

Quindi, avere il primo e l'ultimo α positivo, $\alpha_1 > 0$ $\alpha_3 > 0$, conduce all'equilibrio demografico.

Ed ancora se $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 > 0$ allora otteniamo la matrice di Leslie $L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$

$$\ln x_i(t) = \ln(L^t x(o))_i$$

Tempo	$\ln x_1(t)$	$\ln x_2(t)$	$\ln x_3(t)$	SOMMA
1	2,30	2,30	2,30	6,91
2	3,00	1,95	1,79	6,73
3	2,48	2,64	1,44	6,56
4	2,13	2,13	2,13	6,38
5	2,82	1,77	1,62	6,21
6	2,31	2,46	1,26	6,04
7	1,95	1,95	1,95	5,86
8	2,65	1,60	1,44	5,69
9	2,14	2,29	1,09	5,51
10	1,78	1,78	1,78	5,34
11	2,47	1,42	1,27	5,16
12	1,96	2,12	0,91	4,99
13	1,61	1,61	1,61	4,82
14	2,30	1,25	1,09	4,64
15	1,79	1,94	0,74	4,47
16	1,43	1,43	1,43	4,29
...	...	...	...	...
40,00	0,04	0,04	0,04	0,11
41,00	0,73	-0,32	-0,47	-0,07

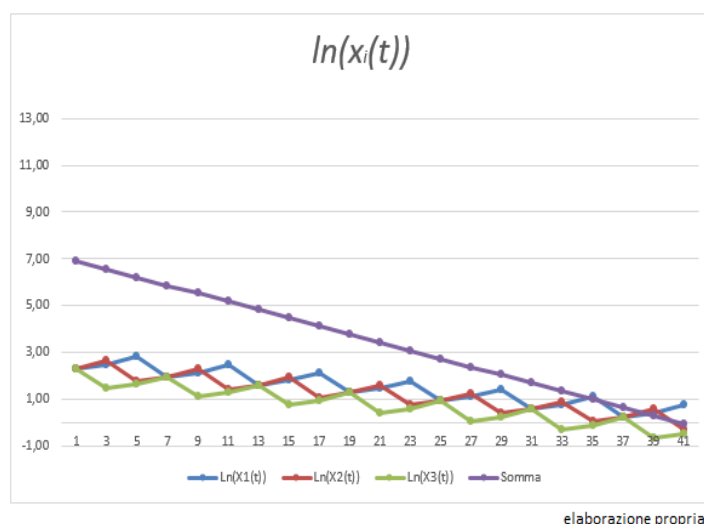


Figura 17: intuizioni sulla convergenza all'equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_3

Qui l'equilibrio demografico non c'è all'inizio, non c'è nel mezzo, non c'è alla fine del periodo e non sembra neanche si vada formando, in quanto l'oscillazione non si va attenuando.

Notiamo che in questo caso solamente l'ultimo valore di α è positivo.

Proviamo un esempio con i due primi α diversi da zero e l'ultimo invece uguale.

Data la matrice di Leslie $L_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$ ed il medesimo vettore di stato al tempo 0.

$$\ln x_i(t) = \ln(L^t x(0))_i$$

Tempo	$\ln x_1(t)$	$\ln x_2(t)$	$\ln x_3(t)$	SOMMA
1	2,30	2,30	2,30	6,91
2	3,69	1,95	1,79	7,43
3	4,54	3,33	1,44	9,31
4	5,50	4,19	2,82	12,51
5	6,43	5,14	3,68	15,25
6	7,37	6,07	4,63	18,07
7	8,30	7,01	5,56	20,87
8	9,24	7,94	6,50	23,68
9	10,17	8,88	7,43	26,49
10	11,11	9,82	8,37	29,29
11	12,04	10,75	9,31	32,10
12	12,98	11,69	10,24	34,91
13	13,92	12,62	11,18	37,72
14	14,85	13,56	12,11	40,52
15	15,79	14,50	13,05	43,33
16	16,72	15,43	13,98	46,14
...	...	...	...	...
40	39,18	37,89	36,44	113,51
41	40,12	38,83	37,38	116,32

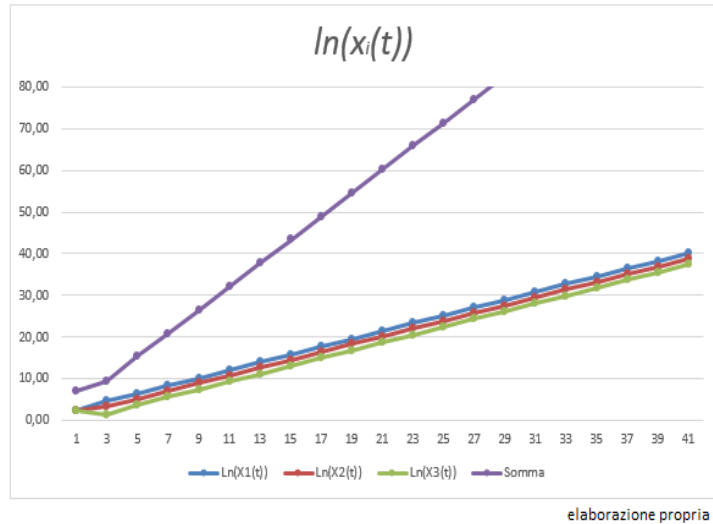


Figura 18: intuizioni sulla convergenza all'equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_4

In questo caso vediamo che nonostante $\alpha_N = 0$ c'è la convergenza all'equilibrio demografico, anche se si realizza in pochi anni.

Ne deduciamo che le condizioni che possiamo cogliere dagli esempi precedenti siano condizioni solo sufficienti e non necessarie per la convergenza.

Riflettiamo anche che potrebbe non esserci la convergenza ma soltanto l'equilibrio; infatti per l'equilibrio non abbiamo posto condizioni se non la positività degli omega e di almeno un'alfa.

È anche possibile pensare ad un mondo in cui, realisticamente, α e ω dipendano dal tempo ed è possibile farlo variando la matrice L tramite scenari.

Con scenari intendiamo una successione deterministica oppure stocastica dei parametri.

Effettivamente è realistico che i tassi di riproduzione e le probabilità di sopravvivenza siano dipendenti dal tempo.

Gli ω infatti sono crescenti nel tempo, la speranza di vita è crescente nel tempo e questo origina il *longevity risk*. Mentre il tasso di natalità tende, in questa fase storica, a diminuire.

Mantenere α e ω costanti risulta perciò una semplificazione notevole e necessaria dal punto vista del modello.

Ogni semplificazione ha un costo in termini di aderenza del modello alla realtà.

Introduciamo brevemente il concetto di convergenza, che sarà più approfonditamente trattato più avanti, come la proprietà di una funzione di tendere ad un limite al tendere della variabile

indipendente verso un certo valore: ci è utile per alcuni ragionamenti sulla dipendenza dei parametri della matrice di transizione al tempo.

Se la convergenza è raggiunta in un periodo breve allora può essere accettabile una semplificazione tale per cui consideriamo gli ω costanti; se invece la convergenza dovesse ottenersi in periodi più lunghi allora una semplificazione del genere risulterebbe una forzatura troppo importante.

Un esempio può aiutare a capire, se la convergenza si ottiene in 20 anni allora si può fare la semplificazione detta e assumere le probabilità di sopravvivenza costanti per tutti i 20 anni ma qualora la convergenza dovesse essere ottenuta in un periodo di 100 anni allora la semplificazione considerata risulterebbe troppo grossolana, non si potrebbe tenere “nascosto” l’aumento costante della speranza di vita su un periodo di 100 anni.

Analogo discorso vale per i tassi di riproduzione.

Di seguito, dopo aver generalizzato il modello di Leslie ad n dimensioni, sarà formalizzato con precisione il teorema di convergenza della distribuzione per età della popolazione.

3. Il modello classico di Leslie

Dopo aver introdotto il modello di Bernadelli e una versione del modello di Leslie costituito da solo 3 classi di età ora è opportuno generalizzare ed estendere le precedenti osservazioni per giungere alla definizione del modello classico di Leslie con n classi di età.

Per il modello classico di Leslie con n classi di età verrà calcolato l'equilibrio demografico e verrà dimostrato che questo equilibrio è unico.

Verrà inoltre definito il tasso di crescita asintotica della popolazione, il tasso riproduttivo netto della popolazione e verranno fatti dei ragionamenti su un valore ottimale di R .

Infine, verrà enunciato, e successivamente dimostrato, il teorema di convergenza alla luce dei concetti e teoremi dalla teoria di Perron-Frobenius sulle matrici non negative ed il teorema di Perron-Frobenius.

3.1. Equilibrio demografico per il modello di Leslie con n classi di età

Il modello di Leslie classico è già stato trattato in numerose pubblicazioni a partire da quelle dello stesso Leslie nel 1945⁶ e nel 1948⁷ ed ancora Caswell nel 1989⁸.

Supponiamo che $\lambda > 0$ sia un autovalore di $L_{n \times n}$. Allora per un autovettore, $\bar{z} \in \mathbf{R}^n$ associato abbiamo $L\bar{z} = \lambda\bar{z}$ cioè $(L - \lambda I_n)\bar{z} = \bar{0}$ con I_n matrice identica dello stesso ordine di L .

Quindi, $\lambda > 0$ è un autovalore di L se e solo se il sistema $(L - \lambda I_n)\bar{z} = \bar{0}$ ha una soluzione non banale quindi se e solo se $\det(L - \lambda I_n) = 0$.

Quindi, data la matrice di transizione di Leslie⁹

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.1)$$

⁶ P. H. Leslie, On the use of matrices in certain population mathematics, Biometrika, 33, No 3, 1945, pp. 183-212.

⁷ P. H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in certain population mathematics, Biometrika, 35, No 3-4, 1948, pp. 213-245.

⁸ H. Caswell, Matrix population models: construction analysis and interpretation. Sinauer Ass. Inc. Publ. Sunderland Massachusetts, 1989.

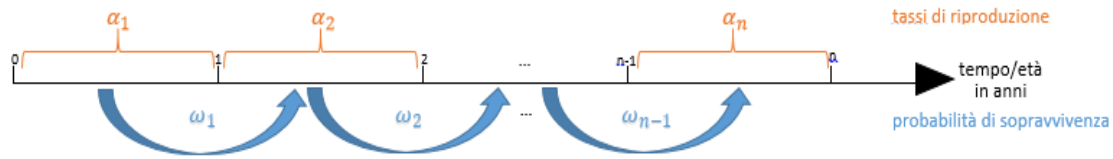
⁹ Si ritiene opportuna una piccola nota riguardo la costruzione di questa matrice in quanto può risultare utile nella sua formalizzazione nel linguaggio di MATLAB.

Notiamo che L è composta da una prima riga $1 \times n$ contenente i tassi di riproduzione, $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_n]$, da una matrice diagonale $(n-1) \times (n-1)$ con le probabilità di so-

pravvivenza, $\begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{n-1} \end{bmatrix}$, ed infine da un vettore colonna nullo $(n-1) \times 1$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Accostando in modo opportuno queste componenti è possibile ottenere agevolmente la matrice di transizione di Leslie su MATLAB.

rappresentabile graficamente



allora,

$$(L - \lambda I_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \omega_1 & 0 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{n-1} & 0 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(L - \lambda I_n) = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \omega_1 & 0 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{n-1} & 0 - \lambda \end{bmatrix}$$

da cui il polinomio caratteristico normalizzato

$$p(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \alpha_2 \omega_1 \lambda^{n-2} - \dots - \alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1} \quad (3.1.2)$$

ora cerchiamo $\lambda > 0$ per $p(\lambda) = 0$

$$\lambda^n = \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \omega_1 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}$$

la soluzione di questa equazione non è affatto banale.

Possiamo dividere entrambi i membri per λ^n ed otteniamo

$$1 = \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2 \omega_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{\alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}}{\lambda^n}$$

I singoli addendi risultano essere n funzioni iperboliche sempre più schiacciate verso gli assi.

Definiamo ora la funzione

$$q(\lambda) := \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2 \omega_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{\alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}}{\lambda^n} \quad (\lambda > 0) \quad (3.1.3)$$

Allora, il teorema di Bolzano ci garantisce l'esistenza di un autovalore $\lambda_0 > 0$, ma senza fornircene il valore.

$\lambda_0 > 0$ è unico, essendo $q(\lambda)$ una funzione continua strettamente monotona decrescente (è secante una sola volta la retta $q(\lambda) = 1$), tra i numeri positivi può avere una sola soluzione.

L'autovalore positivo è unico, l'autovettore no perché è definito salvo un multiplo diverso da 0.

$$(L - \lambda I_n)\bar{z} = \bar{0},$$

cioè

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda_0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \omega_1 & 0 - \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 - \lambda_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{n-1} & 0 - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, per trovare un autovettore occorre che il sistema abbia una soluzione non banale, alla quale consegue l'equilibrio.

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \lambda_0)z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n = 0 \\ \omega_1 z_1 - \lambda_0 z_2 = 0 \\ \vdots \\ \omega_{n-1} z_{n-1} - \lambda_0 z_n = 0 \end{cases},$$

posto arbitrariamente $z_n = 1$, otteniamo¹⁰,

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_0^n}{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}} \\ \frac{\lambda_0^{n-1}}{\omega_2 \dots \omega_{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_0}{\omega_{n-1}} \\ 1 \end{bmatrix} > 0 \text{ è un equilibrio demografico.} \quad (3.1.4)$$

Abbiamo quindi dimostrato e calcolato che il modello di Leslie classico con n classi di età ha un equilibrio demografico.

3.2. Unicità dell'equilibrio demografico

Si dimostrerà che l'equilibrio demografico è unico, salvo un fattore positivo.

Prima verrà mostrato che λ_0 è una radice semplice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ della matrice di Leslie.

Si supponga per assurdo che la molteplicità algebrica¹¹ di λ_0 sia più grande di uno.

¹⁰ Dato $z_n = 1$ e partendo sempre dall'ultima equazione del sistema per poi salire passo dopo passo verso la prima, otteniamo: $\omega_{n-1} z_{n-1} - \lambda_0 z_n = 0 \Rightarrow z_{n-1} = \frac{\lambda_0}{\omega_{n-1}}$

ed ancora, $\omega_{n-2} z_{n-2} - \lambda_0 z_{n-1} = 0 \Rightarrow z_{n-2} = \frac{\lambda_0 z_{n-1}}{\omega_{n-2}} = \frac{\lambda_0^2}{\omega_{n-2} \omega_{n-1}}$

$\omega_{n-3} z_{n-3} - \lambda_0 z_{n-2} = 0 \Rightarrow z_{n-3} = \frac{\lambda_0 z_{n-2}}{\omega_{n-3}} = \frac{\lambda_0^3}{\omega_{n-3} \omega_{n-2} \omega_{n-1}}$

così di seguito fino ad arrivare alla prima equazione del sistema.

¹¹ La molteplicità algebrica di λ_0 è la molteplicità di λ_0 come radice del polinomio caratteristico.

La molteplicità geometrica di λ_0 è la dimensione dell'autospazio relativo a λ_0 .

Un autovalore si dice semplice quando è di molteplicità algebrica pari ad uno.

Si inizia fattorizzando $p(\lambda)$, con $r(\lambda)$ polinomio generico, nella forma

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0)^2 r(\lambda) \\ \Rightarrow p'(\lambda) &= 2(\lambda - \lambda_0)r(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^2 r'(\lambda), \\ p'(\lambda_0) &= 2(\lambda_0 - \lambda_0)r(\lambda) + (\lambda_0 - \lambda_0)^2 r'(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} p'(\lambda_0) &= n\lambda_0^{n-1} - \alpha_1(n-1)\lambda_0^{n-2} - \alpha_2\omega_1(n-2)\lambda_0^{n-3} - \dots - \alpha_{n-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-2} \\ n\lambda_0^{n-1} &= \alpha_1(n-1)\lambda_0^{n-2} + \alpha_2\omega_1(n-2)\lambda_0^{n-3} + \dots + \alpha_{n-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-2}. \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri per λ_0^{n-1} otteniamo

$$\begin{aligned} n &= \frac{(n-1)\alpha_1}{\lambda_0} + \frac{(n-2)\alpha_2\omega_1}{\lambda_0^2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-2}}{\lambda_0^{n-1}} \\ \Rightarrow s(\lambda_0) &:= \frac{(n-1)\alpha_1}{\lambda_0} + \frac{(n-2)\alpha_2\omega_1}{\lambda_0^2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-2}}{\lambda_0^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Dato che

$$q(\lambda_0) := \frac{\alpha_1}{\lambda_0} + \frac{\alpha_2\omega_1}{\lambda_0^2} + \dots + \frac{\alpha_{N-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{N-2}}{\lambda_0^{N-1}}. \quad (3.2.2)$$

Supposto che

$$nq(\lambda_0) - s(\lambda_0) = 0$$

allora

$$\begin{aligned} n\frac{\alpha_1}{\lambda_0} + n\frac{\alpha_2\omega_1}{\lambda_0^2} + \dots + n\frac{\alpha_{N-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{N-2}}{\lambda_0^{N-1}} - \frac{(n-1)\alpha_1}{\lambda_0} - \frac{(n-2)\alpha_2\omega_1}{\lambda_0^2} - \dots \\ - \frac{\alpha_{n-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-2}}{\lambda_0^{n-1}} = \\ = \frac{\alpha_1}{\lambda_0} + \frac{2\alpha_2\omega_1}{\lambda_0^2} + \dots + \frac{(n-1)\alpha_{n-1}\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-2}}{\lambda_0^{n-1}} + \frac{n\alpha_n\omega_1\omega_2 \dots \omega_n}{\lambda_0^n} > 0. \end{aligned}$$

Si noti che essendo la somma di addendi positivi, o comunque sicuramente non negativi con almeno un elemento positivo, il risultato sarà necessariamente positivo mentre avevamo ipotizzato fin dall'inizio un polinomio nullo. Quindi siamo caduti in contraddizione con le ipotesi, è sbagliato negare la tesi che risulta invece vera. Il risultato evidentemente non può essere allo stesso tempo 0 e > 0 .

Ricordando che $0 < \omega_i < 1$ ed almeno un $\alpha_i > 0$

Quindi, λ_0 è una radice semplice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ della matrice di Leslie.

Poiché ad un autovalore semplice corrisponde un autospazio unidimensionale¹², ne consegue che qualsiasi equilibrio demografico è un multiplo positivo di $\bar{z}$.

La molteplicità algebrica è 1, ne segue che la molteplicità geometrica è pari ad 1 e quindi ne segue un autospazio unidimensionale. Quindi, l'equilibrio demografico è unico, salvo un fattore positivo.

Ricordiamo che se λ è autovalore di A allora $V(\lambda)$ prende il nome di autospazio se

$$V(\lambda) := \{x \in \mathbf{R}^n : (A - \lambda I_n)x = 0\}$$

che risulta essere il nucleo della matrice $A - \lambda I_n$.

3.3. Definizione del tasso di crescita asintotica e del tasso riproduttivo netto della popolazione

λ_0 è detto tasso di crescita asintotica.

Se $\lambda_0 > 1$ o < 1 la popolazione va crescendo o decrescendo, mentre se $\lambda_0 = 1$ la popolazione resta in equilibrio dinamico.

Vediamo allora che la funzione q non è solo una funzione ausiliare ma ha anche una notevole interpretazione demografica. A tale scopo definiamo le variabili aleatorie, inizialmente considerando i primi tre gruppi di età:

X_i è il numero di figli prodotti da uno stesso individuo nel periodo di riferimento e nello i -esimo gruppo di età, con $i = 1, 2, 3$ e aventi valore medio $M(X_i)$.

Sia quindi $X = X_1 + X_2 + X_3$ la variabile casuale numero totale di discendenti generati da uno stesso individuo in tutta la vita, con valore medio

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3). \quad (3.3.1)$$

L'ottica delle osservazioni seguenti è quella del singolo individuo, o della singola coorte, al passare del tempo.

Dopo un periodo, il numero totale di individui è dato dalla media degli individui prodotti da un individuo del primo gruppo per la numerosità dei genitori

$$M(X_1)x_1(0) = \alpha_1 x_1(0), \quad (3.3.2)$$

da cui

$$M(X_1) = \alpha_1 \text{ è il tasso riproduttivo del 1° gruppo.}$$

Passato un altro periodo abbiamo

$$M(X_2)x_1(0) = \alpha_2 x_2(1) = \alpha_2 \omega_1 x_1(0),$$

da cui

$$M(X_2) = \alpha_2 \omega_1.$$

¹² http://algebra.math.ust.hk/eigen/05_multiplicity/lecture3.shtml

Ed ancora

$$M(X_3)x_1(0) = \alpha_3 x_3(2) = \alpha_3 \omega_2 x_2(1) = \alpha_3 \omega_1 \omega_2 x_1(0),$$

da cui

$$M(X_3) = \alpha_3 \omega_1 \omega_2.$$

Ora

$$q(\lambda_0) = \frac{\alpha_1}{\lambda_0} + \frac{\alpha_2 \omega_1}{\lambda_0^2} + \frac{\alpha_3 \omega_1 \omega_2}{\lambda_0^3},$$

per $\lambda_0 = 1$ dà esattamente

$$q(1) = \alpha_1 + \alpha_2 \omega_1 + \alpha_3 \omega_1 \omega_2 = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3). \quad (3.3.3)$$

Per convenzione

$$R := q(1).$$

$q(1)$ rappresenta il numero medio di figli fatti da un individuo in un periodo di tre anni (quando generalizzeremo per n diventerà il numero di figli fatti nel corso di tutta la vita).

Nella formula di $q(1)$ notiamo che gli α_i sono i valori medi della variabile casuale del numero di figli, cioè il numero medio di figli per classe di età, mentre gli ω_i servono a scontare il numero di figli per la probabilità di sopravvivenza.

Infatti, nella (3.3.3) vediamo che α_1 rappresenta il numero medio di figli per la prima classe, che è lo stato di osservazione, il momento in cui siamo ora, e quindi non è scontato per la probabilità di sopravvivenza, mentre per la classe 2 abbiamo il prodotto tra α_2 , che è il numero atteso di figli per la classe 2, e ω_2 che è la probabilità di arrivare in vita alla classe 2 (evidentemente se il soggetto non arriva all'età 2 non potrà nemmeno generare figli all'età 2). Analogo discorso per la classe 3, il prodotto $\omega_1 \omega_2$ rappresenta la probabilità di sopravvivere fino all'età 2 (ω_1) e poi di sopravvivere un ulteriore anno (ω_2).

L'ISTAT definisce il numero medio di figli per donna come "il numero di figli che una donna metterebbe al mondo nel caso in cui, nel corso nella propria vita riproduttiva, fosse sottoposta al calendario di fecondità (sotto forma di tassi specifici di fecondità per età) dell'anno di osservazione."¹³

Quindi

$$q(1) = M(X). \quad (3.3.4)$$

Il risultato trovato motiva la seguente definizione:

$$q(1) = \alpha_1 + \alpha_2 \omega_1 + \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \text{ è detto tasso riproduttivo netto della popolazione.}$$

¹³ ISTAT, *il futuro demografico del paese, Previsioni regionali della popolazione residente al 2065*, 26 aprile 2017.

Osservando il grafico di $q(\lambda_0)$ possiamo osservare che se $\lambda_0 > 1$ allora $q(1) > 1$;

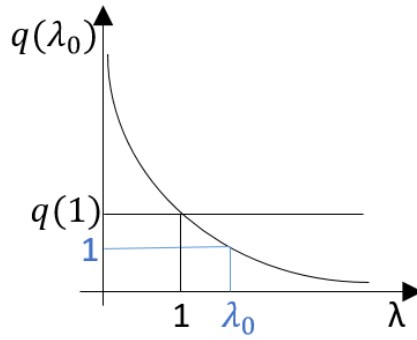


Figura 19: condizione necessaria e sufficiente: se $\lambda_0 > 1$ allora $q(1) > 1$

ed anche $\lambda_0 < 1$ implica $q(1) < 1$.

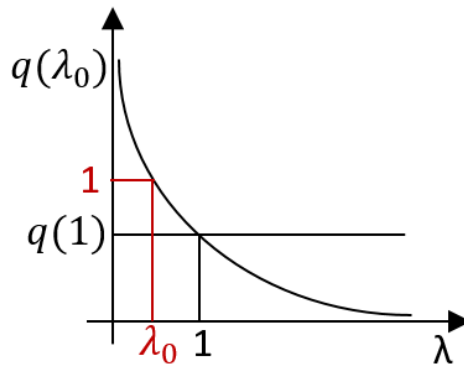


Figura 20: condizione necessaria e sufficiente: se $\lambda_0 < 1$ allora $q(1) < 1$

Ricordiamo che si denota con λ_0 il punto in cui $q(\lambda_0) = 1$.

Riflettiamo ancora sulle considerazioni fatte nella sezione 2.8 e riassunte nella tabella 2 sull'andamento della numerosità della popolazione in funzione di λ_0 .

Le considerazioni già fatte sono state di natura molto intuitiva ed empirica qui possiamo notare un altro aspetto del modo di evolvere della popolazione.

Sia $\lambda_0 > 0$,

allora

$$q(\lambda_0) = \frac{\alpha_1}{\lambda_0} + \frac{\alpha_2 \omega_1}{\lambda_0^2} + \dots + \frac{\alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}}{\lambda_0^n}.$$

Dato, a parità di tutti gli altri parametri, $\bar{\alpha}_2 > \alpha_2$,

allora

$$q(\tilde{\lambda}_0) = \frac{\alpha_1}{\tilde{\lambda}_0} + \frac{\bar{\alpha}_2 \omega_1}{\tilde{\lambda}_0^2} + \dots + \frac{\alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}}{\tilde{\lambda}_0^n}.$$

Evidentemente aumentare il numeratore di uno degli addendi, in questo caso α_2 , fa crescere $\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\omega_1 + \dots + \alpha_n\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-1}$; ciò comporta l'alzarsi della curva $q(\lambda_0)$.

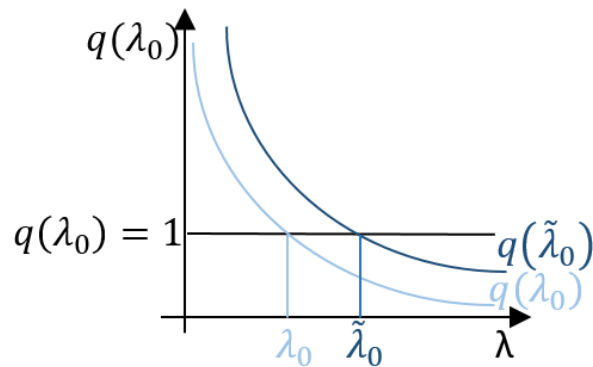


Figura 21: valutazione di uno spostamento verso nord est di $q(\lambda_0)$

Dalla figura 21 osserviamo che l'alzarsi della curva comporta una crescita dell'autovalore λ_0 fino a $\tilde{\lambda}_0$.

Questa valutazione grafica della curva $q(\lambda_0)$ ci permette di osservare sotto una luce più matematica come l'aumento di uno o più tassi di fertilità α_i , o di una probabilità di sopravvivenza ω_i , comporta uno spostamento verso nord est della curva $q(\lambda_0)$ e quindi anche del valore per cui assume valore pari ad 1.

Ecco un altro motivo per cui λ_0 può essere considerato come un parametro riassuntivo della matrice di Leslie e quindi della condizione della popolazione.

3.4. Generalizzazione ad n classi del tasso riproduttivo netto della popolazione

Definiamo le variabili aleatorie:

X_i come il numero di figli prodotti da un individuo nel periodo di riferimento e nel gruppo i –esimo di età, con $i = 1, 2, \dots, n$ e con valore medio $M(X_i)$.

Sia quindi $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la variabile casuale numero totale di discendenti generati da uno stesso individuo in tutta la vita, con valore medio

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n). \quad (3.4.1)$$

Dopo un periodo, il numero totale di individui è dato dalla media degli individui prodotti dai genitori del primo gruppo per la numerosità dei genitori

$$M(X_1)x_1(0) = \alpha_1 x_1(0),$$

con $M(X_1) = \alpha_1$ e cioè uguale al tasso riproduttivo del 1° gruppo.

Passato un altro periodo abbiamo

$$M(X_2)x_1(0) = \alpha_2 x_2(1) = \alpha_2 \omega_1 x_1(0),$$

con $M(X_2) = \alpha_2 \omega_1$.

Iterando il procedimento esposto n volte

$$M(X_n)x_1(0) = \alpha_n x_n(n-1) = \alpha_n \omega_{n-1} x_{n-1}(n-1) = \dots = \alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1} x_1(0),$$

da cui

$$M(X_n) = \alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}.$$

Ora

$$q(\lambda_0) = \frac{\alpha_1}{\lambda_0} + \frac{\alpha_2 \omega_1}{\lambda_0^2} + \dots + \frac{\alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}}{\lambda_0^n} \quad (3.4.2)$$

per $\lambda_0 = 1$ dà esattamente

$$q(1) = \alpha_1 + \alpha_2 \omega_1 + \dots + \alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1} = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n) \quad (3.4.3)$$

$$R := q(1) \quad (3.4.4)$$

Questa è la definizione di R , tasso di riproduzione netto, data da R. Kuczynsk nel 1935¹⁴.

¹⁴ R. Kuczynski, the measurement of population Growth, London 1935; the balance of births and deaths, vol. 1, the brookings institutions, New York, 1928. [16]

Il tasso di riproduzione netto a differenza di quello lordo tiene in considerazione le probabilità di sopravvivenza.

Assume il significato di numero medio di nati derivanti da una generazione di 1000 donne nelle ipotesi che, nel gruppo, nel corso delle età feconde, si verifichino perdite per morte, che le migrazioni siano nulle e che le fecondità per età nel futuro siano pari alle fecondità per età odierne. Si riferisce al totale delle nascite, nati maschi e femmine¹⁵.

Da quanto appena scritto risulta che i figli sono attribuiti alla sottopopolazione di donne ma questo verrà modellizzato solo successivamente nel modello di Leslie strutturato per sessi, per ora si tiene in considerazione che i tassi di fertilità siano riferiti a tutta la popolazione, indipendentemente dal sesso.

$R := q(1)$ rappresenta il numero medio di figli fatti da un individuo nel corso di tutta la vita.

Estendendo le considerazioni fatte precedentemente notiamo che il numero di figli per individuo nel periodo n è pari al numero atteso di figli per un individuo di età n (α_n) ponderato per la probabilità di essere in vita all'età n , cioè $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}$.

3.5. Considerazioni su un valore ottimale di R

Come definito nella sezione 3.4 di questo capitolo $R := q(1)$.

Quindi, R rappresenta il tasso di riproduzione netto o, più semplicemente, il numero medio di figli per donna durante tutta la vita.

Per arrivare ad ipotizzare un valore tale per cui la popolazione rimanga in equilibrio possiamo ragionare in termini di α^F e α^M , che rappresentano le figlie femmine α_i^F e i figli maschi α_i^M e la loro somma sarà pari al già noto α_i .

Si vedrà che la matrice di transizione del modello di Leslie strutturato per sessi è generata dalla prima riga della matrice di Leslie della sottopopolazione delle femmine; quindi è rilevante valutare quali sono le probabilità che nasca un neonato o una neonata.

Dai dati vediamo che nel 2015 i neonati maschi sono 255.201 e le neonate femmine sono 241.426.

Il rapporto tra i neonati maschi e le neonate femmine ci può dare una misura di quanti maschi nascono ogni 100 nate femmine,

$$\frac{\text{Nati maschi}}{\text{Nate femmine}} = \frac{255.201}{241.426} = 1,0570 \approx 1,06.$$

Quindi, da questo campione, si deduce che per generare 100 femmine è necessario generare 106 maschi.

Perché si sta facendo questo tipo di valutazione?

¹⁵ R. Lenzi, una specificazione del tasso lordo (o netto) di riproduzione per ordine di nascita, *Genus*, Vol. 36, No. 3/4 1980, pp. 141-152. [17]

Per mantenere in equilibrio dinamico la popolazione femminile è necessario che ogni femmina generi almeno un'altra femmina e per farlo è quindi necessario che in media produca almeno 2,06 figli in quanto questo permetterebbe di tenere conto del sopra citato rapporto.

Ragionando sempre in termini medi, $R = 2,06$ garantirebbe, per una popolazione di 100 individui femmina, la generazione di 100 femmine e 106 maschi.

3.6. Teorema di convergenza

Teorema (di convergenza)

Dato

$$1. \quad \alpha_N > 0 \quad \text{e} \quad \alpha_1 > 0$$

oppure

$$2. \quad \alpha_N > 0 \quad \text{ed} \quad \exists j = 2, 3, \dots, n-1 \quad \text{tale che} \quad \alpha_j > 0 \text{ e } \alpha_{j+1} > 0;$$

allora $\forall x(0) > 0 \exists c > 0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\lambda_0^t} = c\bar{z}. \quad (3.6.1)$$

Ciò significa che per ogni vettore di stato iniziale, indipendente dal suo essere uno stato di equilibrio demografico o meno, $\exists c > 0$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\lambda_0^t} = c\bar{z}$.

Il rapporto con λ_0^t risulta necessario per puntare alla convergenza.

La distribuzione per classi di età quindi può convergere ad un equilibrio demografico.

Condizione necessaria per la convergenza è che i parametri siano costanti all'interno della matrice di transizione di Leslie

Notiamo anche che la costante c dipende dallo stato iniziale, in quanto esiste c per ogni vettore di stato al tempo zero. Quindi, quello che va evidenziato è che l'equilibrio che si raggiunge è un multiplo del vettore $\bar{z}$.

Ragionando per singole componenti abbiamo $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i(t)}{\lambda^t} = c z_i$.

Finora si era considerato uno stato di partenza pari ad un equilibrio demografico, adesso, invece, abbandoniamo questa ipotesi. Se lo stato iniziale dovesse essere un equilibrio demografico allora rimarremmo costantemente nella stessa distribuzione per età, anche se la numerosità, per definizione, potrebbe cambiare. Diciamo quindi che consideriamo l'equilibrio demografico dello stato iniziale come una particolare condizione, vantaggiosa.

Teniamo però in considerazione le due condizioni alternative e sufficienti affinché, partendo da uno stato di non equilibrio, dopo un certo tempo, si converga ad una situazione di equilibrio pari ad un multiplo del vettore $\bar{z}$.

Allora, per $t \gg 1$ (per t molto grande), cioè trascorso un tempo molto grande,

dato

$$\frac{x(t)}{\lambda_0^t} \approx c\bar{z}$$

$$x(t) \approx \lambda_0^t c\bar{z}$$

$$x(t+1) \approx \lambda_0^{t+1} c\bar{z}$$

allora

$$x(t+1) \approx \lambda_0 x(t).$$

Quindi, $x(t)$ asintoticamente è una successione geometrica¹⁶ vettoriale, con ragione λ_0 .

Ed ancora, passando a ragionare per singole componenti del vettore di stato,

$$\frac{x_i(t)}{\lambda_0^t} \approx cz_i$$

$$x_i(t+1) \approx \lambda_0 x_i(t)$$

$$x_i(t+1) \approx \lambda_0 \lambda_0^t cz_i$$

$$x_i(t+1) \approx \lambda_0^{t+1} cz_i$$

$$x_i(t) \approx \lambda_0^t cz_i,$$

dove

$$x_i(t) = (L^t x(0))_i$$

passando al logaritmo

$$\ln x_i(t) \approx \ln(L^t x(0))_i \approx t \ln \lambda_0 + \ln cz_i. \quad (3.6.2)$$

Questo matematicamente conferma i risultati intuitivi dai grafici delle sezioni precedenti.

¹⁶ Una successione geometrica è una successione di numeri $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ tale che il rapporto tra qualsiasi elemento della successione, ad esclusione del primo, ed il precedente è costante.

$$\frac{a_2}{a_1} = r; \frac{a_3}{a_2} = r \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Tale costante $r \neq 0$ è detta ragione della successione.

È utile fare delle valutazioni sui valori assumibili dalla ragione della successione:

- $r = 1$ allora il risultato è costante e pari ad a ;
- $r = -1$ allora il risultato oscilla tra a e $-a$;
- $r > 1$ allora il risultato è una crescita esponenziale verso l'infinito positivo;
- $-1 < r < 1$ allora il risultato è una decrescita esponenziale verso lo zero.

La definizione di successione geometrica data nella nota 16 mal si adatta al nostro caso in quanto non è possibile dividere per componenti due vettori con le classiche operazioni tra vettori. Per questo è utile il precedente passaggio nel quale si passa dal vettore alle singole componenti del vettore.

È anche possibile ridefinire la successione geometrica.

$$a_2 = a_1 r; a_3 = a_2 r; \dots; a_n = a_{n-1} r$$

In questi termini la successione geometrica è direttamente osservabile anche senza il passaggio alla forma per componenti in quanto è sempre possibile il prodotto di un vettore per uno scalare.

Non ci resta che riflettere sul passaggio al logaritmo.

Una successione geometrica non nulla mostra un andamento esponenziale, crescente o decrescente.

La valutazione grafica della convergenza secondo un andamento esponenziale non risulta agevole né immediata invece passando al logaritmo è possibile effettuare la stessa valutazione ma in funzione di una retta.

La rettificazione dell'andamento indica la convergenza, risultato molto agevole ed intuitivo.

Dalla 3.6.2 notiamo infatti che $\ln \lambda_0$ è il punto di intersezione con l'asse delle ordinate e $\ln cz_i$ il coefficiente angolare della retta.

Ricapitolando

Partendo da un vettore di stato che risulta essere un equilibrio demografico col passare del tempo si tornerà sempre alla distribuzione per età dello stato di partenza, proprio perché si è partiti da un equilibrio; semplicemente, partendo da un equilibrio si resta in equilibrio. In questo caso l'evoluzione della numerosità della popolazione sarà proprio una successione geometrica. Nel caso in cui, invece, si parta da un vettore di stato che non è un equilibrio, allora, attraverso il limite della 3.6.1 possiamo verificare che al crescere del tempo l'evoluzione della popolazione convergerà, si avvicinerà sempre di più all'equilibrio, alla rettificazione dell'andamento. Ad ogni passo in più il risultato del limite sarà sempre più simile al prodotto della costante, dipendente dallo stato iniziale, e dell'autovettore rappresentante l'equilibrio della popolazione.

Infatti partendo da un equilibrio si ha che $\frac{x(t)}{\lambda^t} = \bar{z}$ ma se lo stato iniziale non è un equilibrio questa uguaglianza risulta vera solo dopo un tempo infinito, converge dopo un numero infinito di anni. Cioè, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\lambda^t} = c\bar{z}$.

Allora per $t \gg 1$, per t molto grande, $\frac{x(t)}{\lambda^t} \approx c\bar{z}$, il rapporto è sempre più simile ad un multiplo dell'autovettore di equilibrio. Da cui ricaviamo la formula generale di iterazione del modello $x(t+1) \approx \lambda x(t)$, dato che $x(t) = \lambda^t c\bar{z}$. Si torna in questo modo ad una successione geometrica in cui, ad ogni iterazione successiva, l'approssimazione per λ è sempre più esatta.

3.7. Rappresentazione grafica di un esempio, programmato in MATLAB

Partendo dai dati¹⁷ forniti dall'ISTAT nel 2015 in merito alla popolazione totale italiana per classi di età, alle probabilità di sopravvivenza e ai tassi di fertilità possiamo creare un modello su MATLAB che rappresenti l'andamento della popolazione lungo un periodo di tempo di 150 anni.

Di seguito osserviamo l'evoluzione della popolazione italiana totale, distinta per singole età, senza distinzioni di sesso.

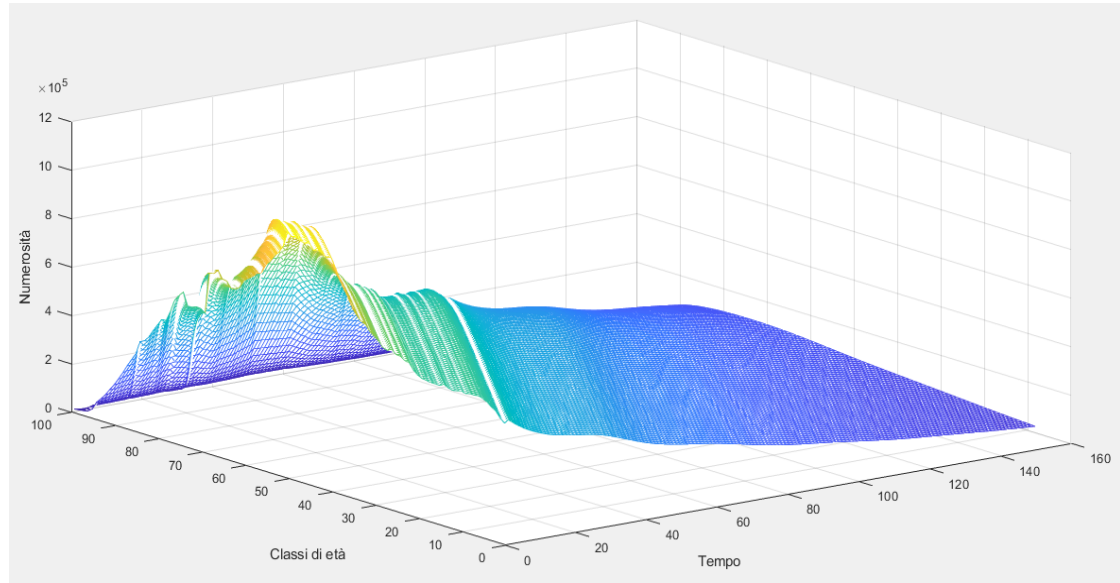


Figura 22: rappresentazione dell'evoluzione della popolazione italiana con dati ISTAT riferiti al 2015

Nella successiva esemplificazione teniamo in considerazione l'andamento logaritmico della distribuzione per età della popolazione.

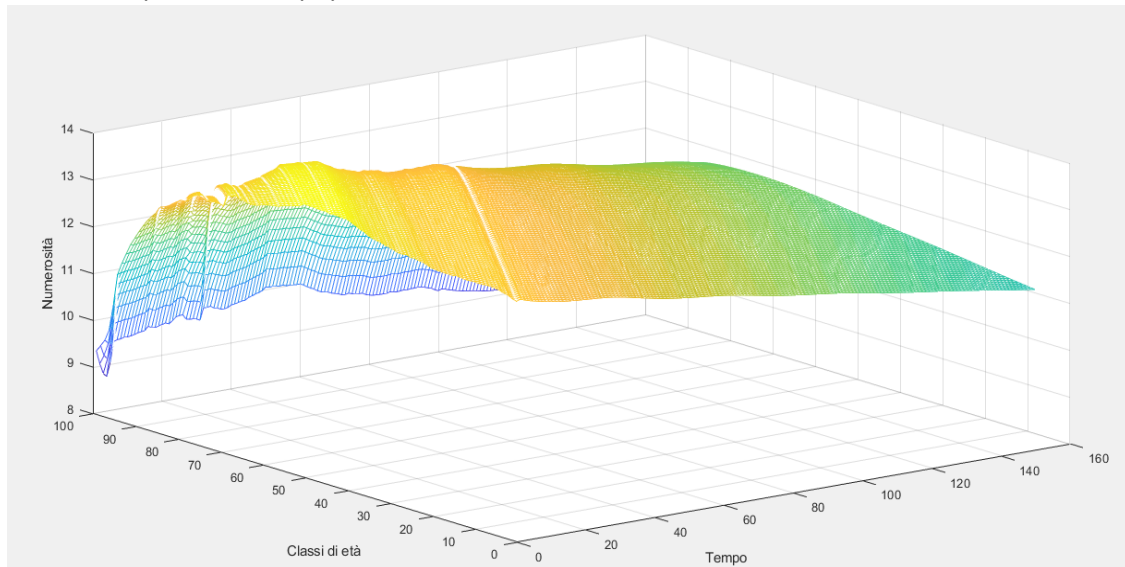


Figura 23: rappresentazione dell'evoluzione semilogaritmica della popolazione italiana con dati ISTAT riferiti al 2015

¹⁷ Nella appendice B i dati sono forniti analiticamente

Per verificare che l'andamento sia quello corretto possiamo tagliare la superficie e osservarne una sezione in modo da valutare al meglio se si ritrova l'andamento che abbiamo visto caratterizzare la convergenza, nel caso in cui venga operata una valutazione semilogaritmica.

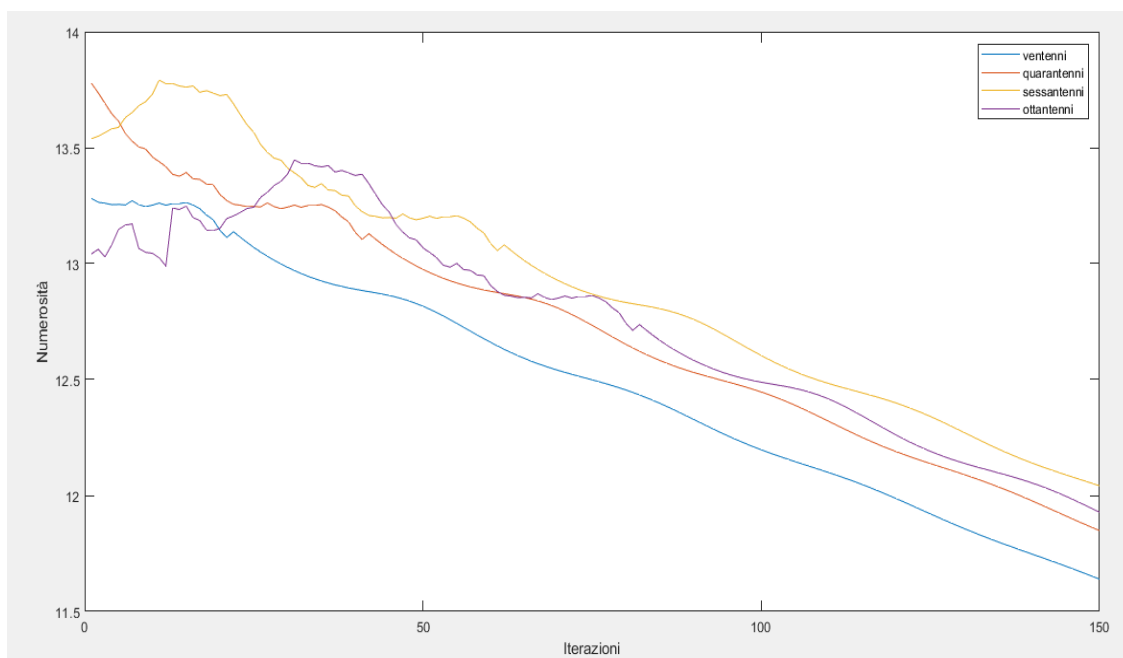


Figura 24: rappresentazione dell'evoluzione semilogaritmica di quattro diverse classi di età con dati ISTAT riferiti al 2015

Vediamo dalla rappresentazione della superficie fornita come output dal modello un andamento molto simile agli esempi precedenti con solo tre età.

Infatti, osserviamo come tutte le curve col passare del tempo tendano a rettificarsi.

$$\ln x_i(t) = t \ln \lambda + \ln x_i(0)$$

Notiamo che secondo l'equazione sopra riportata gli andamenti finiscono per essere paralleli e quindi tendono ad avere lo stesso coefficiente angolare, benché con punti di intersezione sull'asse delle ordinate diversi.

Il punto di intersezione con gli assi $\ln x_i(0)$ risulta essere dipendente dallo stato di partenza e per questo è specifico per ogni tempo e per ogni classe di età.

Il coefficiente angolare della retta $\ln \lambda$ dipende invece dalla matrice di transizione di Leslie che sappiamo essere costante.

Se fossimo partiti da un punto di equilibrio allora avremmo avuto da subito andamenti lungo rette parallele.

In questa applicazione non si parte dall'equilibrio e il teorema di convergenza ci assicura che, iterazione dopo iterazione, si arriva sempre più vicino all'andamento lungo rette parallele.

3.8. Concetti e teoremi dalla teoria di Perron-Frobenius

Per lo studio dell'equilibrio demografico asintotico e quindi della stabilizzazione dell'evoluzione della popolazione, con riferimento al modello demografico fin qui analizzato, risulta, a questo punto, utile riportare i risultati ottenuti dalla teoria delle matrici non negative di Perron¹⁸ e Frobenius¹⁹.

Sottolineiamo da subito l'importanza della teoria delle matrici non negative non solo per i modelli demografici, dove la matrice della dinamica è sempre non negativa, ma anche in molti modelli economici.

Nei modelli demografici la matrice della dinamica evolutiva della popolazione è sempre non negativa, perché tutti i parametri demografici sono non negativi. Infatti, almeno uno dei tassi di fertilità dev'essere positivo e le probabilità di sopravvivenza, per definizione di probabilità, non possono essere negative e nel modello saranno sempre strettamente positive e strettamente minori di uno; non può essere negativa nemmeno la numerosità di una classe di età, in quanto assumerà almeno il valore zero.

Teorema (un teorema generale della teoria delle matrici non negative)

Se la matrice quadrata A , non negativa, è irriducibile allora possiede un unico autovalore positivo λ_0 e un autovettore positivo $\bar{z}$ associato a λ_0 , unico salvo un fattore positivo, cioè, ogni altro autovettore associato a λ_0 è un multiplo positivo di $\bar{z}$. Ed ancora, λ_0 è il radio spettrale²⁰ di A , $\sigma(A)$.

Può succedere che il massimo dei moduli degli autovalori non sia unico in quanto caratterizzante più autovalori. Non sappiamo, per esempio, se tra gli autovalori complessi ne esiste uno con lo stesso modulo dell'autovalore reale positivo λ_0 .

Nel teorema di convergenza si aggiunge che l'autovalore deve essere strettamente dominante, cioè col valore assoluto strettamente maggiore di tutti gli altri.

Definizione (indice di imprimitività)

Si definisce indice di imprimitività, $\rho(A)$, di una matrice quadrata non negativa, il numero di radici distinte del polinomio caratteristico della matrice che hanno il modulo uguale a λ_0 .

L'indice di imprimitività conta il radio spettrale di A .

Un caso particolare è quando l'indice ha valore uguale a 1, cioè esiste un solo autovalore il cui modulo è pari al massimo, in questo caso λ_0 è strettamente dominante.

¹⁸ O. Perron, *Zur Theorie der Matrizen*, Mathematische Annalen, Volume 64, 1907, pp. 248–263.

¹⁹ G. Frobenius, "Über Matrizen aus nicht negativen Elementen", ETH-Bibliothek Zürich, Berlino, 1912, pp. 456–477.

²⁰ Il radio spettrale è il massimo dei moduli delle radici del polinomio caratteristico.

Semplicemente, preso il modulo delle radici del polinomio caratteristico se ne considera il più grande.

Definizione (matrice primitiva)

La matrice A si dice matrice primitiva quando $\rho(A) = 1$.

Questo risultato è utilizzato nel teorema di convergenza.

Ora vedremo come calcolare l'indice di imprimitività a partire dal polinomio caratteristico.

La strada apparentemente più semplice è quella di calcolare le radici dell'equazione caratteristica, calcolarne i moduli e confrontare i risultati. Percorso apparentemente agile ma di fatto calcolare le radici di un'equazione polinomiale non è mai immediato, è sempre molto complesso anche per polinomi di grado non elevato quindi si cercherà di raggiungere l'obiettivo evitando il calcolo delle soluzioni dell'equazione caratteristica.

Teorema (calcolo dell'indice di imprimitività).

Dato il polinomio caratteristico²¹ di A ,

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{k_1} + \dots + a_r\lambda^{k_r}$$
$$\text{con } k_1 > k_2 > \dots > k_r \text{ e } \forall j \ a_j \neq 0,$$

allora,

$$\rho(A) = \text{MCD}\{n - k_1, n - k_2, \dots, n - k_r\}. \quad (3.8.1)$$

Nello specifico, se $n - k_1, n - k_2, \dots, n - k_r$ sono numeri primi relativi allora A è primitiva.

Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ preso in considerazione è composto da soli termini non nulli, per questo ci sono le k e non le n .

Allora l'indice di imprimitività è pari al massimo comun divisore²² delle differenze tra il grado del polinomio e gli esponenti successivi dei termini non nulli $n - k_1, n - k_2, \dots, n - k_r$.

Allora, se l'argomento del massimo comun divisore sopra esposto è composto di numeri primi relativi²³, l'indice di imprimitività è pari ad uno e quindi la matrice è primitiva.

Ricordo che l'obiettivo è proprio la ricerca di una matrice primitiva per la successiva utilizzazione nel modello.

Infatti, riflettendo sulla matrice di transizione di Leslie L , date le condizioni alternative e sufficienti del teorema di convergenza, è implicito che la matrice L è primitiva.

²¹ Ricordo che il polinomio caratteristico della matrice di transizione del modello di Leslie ad n dimensioni è

$$p(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} - \alpha_2\omega_1\lambda^{n-2} - \dots - \alpha_n\omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-1}.$$

²² Il massimo comun divisore o brevemente MCD è il massimo divisore comune di più numeri. In un insieme di numeri scomponiamo in fattori primi, prendiamo il divisore comune a tutti i numeri con il massimo esponente.

²³ Sono numeri primi relativi i numeri che non hanno divisori comuni oltre ad 1.

3.9. Teorema di Perron-Frobenius e dimostrazione del teorema di convergenza per il modello di Leslie

Teorema (di Perron-Frobenius).

Supponendo una matrice $A_{n \times n}$ non negativa, irriducibile e primitiva, con autovalore positivo e semplice λ_0 ,

allora per ogni $x(0) \in \mathbf{R}^n$ esiste uno scalare $c > 0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A^t x(0)}{\lambda_0^t} = c \bar{z}. \quad (3.9.1)$$

Dimostrazione (del teorema di convergenza per il modello di Leslie).

La dimostrazione del teorema di convergenza per il modello di Leslie si basa sulla verifica delle condizioni per l'applicabilità dei teoremi della teoria di Perron-Frobenius sopracitati: non negatività, irriducibilità e primitività della matrice di transizione a cui è associato anche un autovalore semplice λ_0 .

Iniziamo notando come, grazie alle condizioni poste alla base del modello di Leslie, la matrice di transizione, e quindi il relativo grafo, per il modello di Leslie è sempre caratterizzato dalla non negatività e dalla irriducibilità, sempre che sia $\alpha_n > 0$.

Nella sezione 3.2 è già stato dimostrato che λ_0 è un autovalore semplice della matrice di transizione del modello di Leslie, ed anche la molteplicità geometrica di λ_0 è 1, cioè la dimensione del sottospazio è 1.

Quindi, poniamo l'attenzione specificatamente sulle due condizioni del teorema di convergenza riferito al modello di Leslie, facendo particolare attenzione alla valutazione dell'indice di imprimitività e della primitività, eventuale, della matrice di transizione.

Condizione 1: nel polinomio caratteristico²⁴, se otteniamo $\alpha_1 > 0$ allora $k_1 = n - 1$ e all'interno dell'argomento del massimo comun divisore per il calcolo dell'indice di imprimitività avremo $n - k_1 = n - (n - 1) = 1$; allora, indipendentemente da tutte le altre differenze nell'argomento, otterremo necessariamente che il MCD è pari ad 1 e quindi che l'indice di imprimitività è 1, $\rho(A) = 1 \Rightarrow A$ è primitiva; allora, essendo la matrice già non negativa ed irriducibile e con autovalore semplice λ_0 , esiste, per il teorema di Perron-Frobenius, la convergenza.

Condizione 2: nel polinomio caratteristico, se $\exists j = 2, 3, \dots, n - 1$ tale che $\alpha_j > 0$ e $\alpha_{j+1} > 0$ allora sono presenti due coefficienti con esponenti successivi e quindi all'interno dell'argomento del massimo comun divisore per il calcolo dell'indice di imprimitività saranno presenti due termini, due differenze, successive. Il MCD di due numeri successivi è sempre 1 in quanto due numeri successivi sono sempre due numeri primi relativi; allora l'indice di imprimitività è pari ad 1, quindi la matrice di transizione del modello di Leslie è primitiva, oltre che non negativa ed irriducibile e con autovalore semplice λ_0 ; ne segue, per il teorema di Perron-Frobenius, la convergenza.

²⁴ $p(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \alpha_2 \omega_1 \lambda^{n-2} - \dots - \alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}$

4. Una estensione del modello classico: il modello di Leslie distinto per sesso

In questo capitolo andremo oltre il modello classico di Leslie come già osservato da Angrisani, Attias, Bianchi e Varga nel 2004²⁵.

Ricordiamo la notazione utilizzata finora:

$x_i(t)$ è il numero di individui della classe i ($i = 1, 2, \dots, n$ con n pari all'ultima classe di individui considerata) al tempo t ;

ω_i è la probabilità di sopravvivenza di un individuo dalla classe i alla classe $i + 1$;

$x(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ è il vettore di stato della popolazione al tempo t ;

$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$ è la matrice di transizione del modello di Leslie ad n dimensioni;

$x(t + 1) = Lx(t)$ è l'equazione di evoluzione da uno stato al successivo del modello.

Il modello di Leslie prende evidentemente spunto dall'antecedente modello di Bernadelli che, come detto all'inizio di questo elaborato, era stato pensato per popolazioni di insetti. Il modello classico di Leslie ha sviluppato il modello pensato per gli insetti ad un modello per popolazioni più complesse come quella umana. Ora si intende estendere il modello classico di Leslie ed adattarlo ancora meglio alla popolazione umana facendo le opportune distinzioni tra i due sessi, quindi tra maschi e femmine.

Data Ω come l'età estrema per tutti gli individui, diciamo che $x^F(t)$ e $x^M(t)$ sono i vettori di stato al tempo t rispettivamente per le femmine e per i maschi.

Per la sottopopolazione delle femmine, assumiamo pari ad f_i il numero di nuovi nati da mille individui femmine di classe i ed assumiamo pari a q_i^F la probabilità di morte tra $(i, i + 1)$, quindi il suo complemento ad uno sarà la probabilità di sopravvivenza, per lo stesso periodo, di un soggetto di età i .

Allora, il tasso di fertilità per le femmine di età i è $\alpha_i = \frac{f_i}{1000}$ che risulta essere l'equivalente del tasso specifico di fecondità per età, definito dall'ISTAT, come "il rapporto tra il numero di nati

²⁵ M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Demographic dynamics for the pay-as-you-go pension system*. Pure Mathematics and Applications 15 (4), 2004, pp. 357-374.

M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Dinamiche demografiche e stabilità dei sistemi pensionistici a ripartizione: un approccio metodologico mediante il modello di Leslie*. XXVIII Convegno AMASES. Modena, Italia, 8 - 12 settembre, 2004. Abstracts pp. 64-65.

M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Demographic dynamics for the pay-as-you-go pension system*. Pure Mathematics and Applications 15 (4), 2004, pp. 357-374.

vivi da donne di età compresa tra x e $x+1$ e il numero medio di donne residenti di tali età in un dato anno.”²⁶

Per le valutazioni che andremo a fare tenendo in considerazione i due sessi della popolazione risulta essere rilevante la proporzione dei sessi alla nascita.

Possiamo definire la proporzione di femmine alla nascita come

$$\varphi = \frac{x_1^F(0)}{x_1^F(0) + x_1^M(0)} = \frac{x_1^F(0)}{x_1(0)}, \quad (4.1)$$

che misura proprio la proporzione, la porzione, di femmine alla nascita $x_1^F(0)$, rispetto alla popolazione totale $x_1^F(0) + x_1^M(0) = x_1(0)$.

Evidentemente la proporzione di maschi alla nascita si ottiene come $\frac{x_1^M(0)}{x_1(0)}$.

Se moltiplicassimo il risultato della proporzione di femmine alla nascita per cento ne otterremo la percentuale. Quindi, la percentuale di maschi alla nascita si ottiene come complemento ad uno della percentuale di neonate femmine.

Ora è possibile calcolare il tasso di fertilità riguardante le sole nate femmine

$$\alpha_i^F = \frac{f_i}{1000} \varphi. \quad (4.2)$$

Moltiplicare α_i per la proporzione di femmine alla nascita φ ha l'effetto di contare solamente le nuove nate femmine e di tenere fuori dal conteggio i nuovi nati maschi. Questo è utile perché per definire la prima componente del vettore di stato delle femmine occorre conoscere il numero di neonate.

Semplicemente un individuo femmina all'età i metterà al mondo α_i^F figlie femmine e α_i^M figli maschi e la loro somma sarà pari ad α_i .

Come accennato, per le femmine la probabilità di sopravvivenza è $\omega_i^F = (1 - q_i^F)$ per $i = 1, 2, \dots, n$ con $n = \Omega$ e sono il complemento ad uno delle probabilità di morte.

Dobbiamo fare una ulteriore considerazione prima di introdurre la matrice di transizione di Leslie per le femmine. Ricordiamo che la prima riga della matrice L riporta i tassi di fertilità. Sappiamo che la femmina di uomo non è fertile per tutta la durata della vita; quindi, assumeremo come periodo fertile l'intervallo tra i 15 e i 50 anni.

$$L^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_{15}^F & \dots & \alpha_{50}^F & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_1^F & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^F & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1}^F & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.3)$$

²⁶ IL FUTURO DEMOGRAFICO DEL PAESE Previsioni regionali della popolazione residente al 2065, 26 aprile 2017, ISTAT, p 14.

L'equazione di evoluzione per le femmine sarà data da

$$x^F(t+1) = L^F x^F(t) \quad (4.4)$$

L^F è una matrice di Leslie perfettamente coerente e non considera la sottopopolazione dei maschi.

Un elemento che può essere notato è che entrambe le condizioni alternative e sufficienti del teorema di convergenza impongono $\alpha_n^F > 0$. Qui invece l'ultimo α non risulta positivo in quanto pari a 0.

Allora vedremo come successivamente per poter godere delle proprietà del teorema di convergenza la matrice verrà tagliata per poter usare efficacemente il teorema.

$$L^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_{15}^F & \dots & \alpha_{50}^F & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_1^F & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^F & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1}^F & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Ricordiamo anche che gli α_i^F ($i = 15, 16, \dots, 50$) si riferiscono alle sole le nate femmine.

Per la sottopopolazione dei maschi la matrice di Leslie sarà

$$L^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1^M & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^M & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_{n-1}^M & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che la prima riga della matrice è composta da tutti 0, in quanto, evidentemente, agli individui maschi non si attribuiscono i figli, e che i maschi invecchiano con probabilità ω_i^M .

Riflettiamo però sul fatto che gli individui maschi derivano dalle femmine quindi la prima componente del vettore di stato dei maschi, i neonati maschi, sarà strettamente dipendente dalla sottopopolazione delle femmine. Questo si riflette nell'equazione di evoluzione di riferimento per la sottopopolazione maschi.

$$x^M(t+1) = L^M x^M(t) + \frac{(1-\varphi)}{\varphi} e_1 \circ L^F x^F(t). \quad (4.5)$$

Si definisce prodotto di Hadamard di vettori di $\mathbf{R}^n$ il vettore di $\mathbf{R}^n$ dato dal prodotto delle singole componenti occupanti le medesime posizioni nei rispettivi vettori; cioè $\bar{a} \circ \bar{b} = [a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n]$.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è il vettore di base.}$$

Quindi, il primo addendo dell'equazione di evoluzione (4.5) è il solito modello di evoluzione della sottopopolazione dei maschi.

Il secondo addendo della (4.5) invece caratterizza la sola sottopopolazione dei maschi in quanto la prima componente del vettore di stato è data dai nati maschi generati dalla sottopopolazione delle femmine e per questo usiamo il vettore e_1 , perché il suo prodotto con $\frac{(1-\varphi)}{\varphi}$ ci fornisce solamente la prima componente di un vettore n dimensionale.

$$\begin{aligned} \frac{(1-\varphi)}{\varphi} e_1 &= \begin{bmatrix} (1-\varphi) \\ \varphi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_1^F(0)}{x_1^F(0)} \\ \frac{x_1^F(0)}{x_1^F(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1(0) - x_1^F(0)}{x_1^F(0)} \\ \frac{x_1^F(0)}{x_1^F(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1(0) - x_1^F(0)}{x_1^F(0)} \frac{x_1(0)}{x_1^F(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x_1(0) - x_1^F(0)}{x_1^F(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^M(0)}{x_1^F(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Infine, con il prodotto di Hadamard tra il vettore appena trovato e $L^F x^F(t)$ otteniamo il numero di neonati maschi generati dalla sottopopolazione femmine al tempo t .

$$\begin{aligned} L^F x^F(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_{15}^F & \dots & \alpha_{50}^F & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_1^F & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^F & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1}^F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^F(t) \\ x_2^F(t) \\ x_3^F(t) \\ \vdots \\ x_n^F(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 + 0 + \dots + \alpha_{15}^F x_{15}^F(t) + \alpha_{16}^F x_{16}^F(t) + \dots + \alpha_{50}^F x_{50}^F + 0 + \dots + 0 \\ \omega_1^F x_1^F(t) \\ \omega_2^F x_2^F(t) \\ \vdots \\ \omega_{n-1}^F x_{n-1}^F(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \frac{x_1^M(0)}{x_1^F(0)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \alpha_{15}^F x_{15}^F(t) + \alpha_{16}^F x_{16}^F(t) + \dots + \alpha_{50}^F x_{50}^F \\ \omega_1^F x_1^F(t) \\ \omega_2^F x_2^F(t) \\ \vdots \\ \omega_{n-1}^F x_{n-1}^F(t) \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \frac{x_1^M(0)}{x_1^F(0)} [\alpha_{15}^F x_{15}^F(t) + \alpha_{16}^F x_{16}^F(t) + \dots + \alpha_{50}^F x_{50}^F] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La prima componente rappresenta proprio il numero di maschi della prima classe di età.

Alternativamente, risulta ancora più evidente se facciamo questi altri semplici passaggi

Ricordando che

$$\alpha_i^F = \frac{f_i}{1000} \varphi,$$

allora,

$$\frac{(1-\varphi)}{\varphi} e_1 = \begin{bmatrix} \frac{(1-\varphi)}{\varphi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{(1-\varphi)}{\varphi} e_1 \circ L^F x^F(t) &= \begin{bmatrix} \frac{(1-\varphi)}{\varphi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \alpha_{15}^F x_{15}^F(t) + \alpha_{16}^F x_{16}^F(t) + \dots + \alpha_{50}^F x_{50}^F(t) \\ \omega_1^F x_1^F(t) \\ \omega_2^F x_2^F(t) \\ \vdots \\ \omega_{n-1}^F x_{n-1}^F(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(1-\varphi)}{\varphi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \frac{f_{15}}{1000} \varphi x_{15}^F(t) + \frac{f_{16}}{1000} \varphi x_{16}^F(t) + \dots + \frac{f_{50}}{1000} \varphi x_{50}^F(t) \\ \omega_1^F x_1^F(t) \\ \omega_2^F x_2^F(t) \\ \vdots \\ \omega_{n-1}^F x_{n-1}^F(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(1-\varphi)}{\varphi} [\varphi (\frac{f_{15}}{1000} x_{15}^F(t) + \frac{f_{16}}{1000} x_{16}^F(t) + \dots + \frac{f_{50}}{1000} x_{50}^F(t))] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (1-\varphi) [\frac{f_{15}}{1000} x_{15}^F(t) + \frac{f_{16}}{1000} x_{16}^F(t) + \dots + \frac{f_{50}}{1000} x_{50}^F(t)] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi, ricordando la definizione

$$\varphi = \frac{x_1^F(t)}{x_1^F(t) + x_1^M(t)} = \frac{x_1^F(t)}{x_1(t)},$$

allora

$$(1-\varphi) = 1 - \frac{x_1^F(t)}{x_1(t)} = \frac{x_1^M(t)}{x_1(t)}.$$

Per questo il primo elemento del vettore $\frac{(1-\varphi)}{\varphi} e_1 \circ L^F x^F(t)$ ci fornisce il numero dei neonati maschi.

Nel nostro modello per sessi ora è utile valutare il vettore di stato della distribuzione per età dell'intera popolazione.

Il vettore di stato della popolazione totale è dato dalla concatenazione del vettore della sottopopolazione femmine e del vettore della sottopopolazione maschi.

$$x = \begin{bmatrix} x^F \\ x^M \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Così nello stesso modello è possibile tenere in considerazione entrambi i sessi separatamente e contemporaneamente.

Il vettore di stato della popolazione strutturato per sessi al tempo zero, nella nostra esemplificazione, sarà costituito quindi da $2 \times n$ elementi, n elementi riguardanti le femmine e n riguardanti i maschi.

Allora l'equazione di evoluzione che unisce i due modelli, femmine e maschi, sarà

$$x(t+1) = \Lambda x(t) \quad (4.7)$$

dove

$$\Lambda = \begin{bmatrix} L^F & 0 \\ d & 0 \\ 0 & L_2^M \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (4.8)$$

è la nuova matrice partizionata di transizione. All'interno troviamo l'intera matrice di Leslie per la sottopopolazione delle femmine e la matrice di Leslie della sottopopolazione maschi eccetto la parte riguardante la prima classe di età che è incorporata nel vettore d . La prima riga della matrice di Leslie dei maschi, neonati, è nel vettore d per questo motivo c'è il 2 a pedice di L^M .

$$L_2^M = \begin{bmatrix} \omega_1^M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^M & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1}^M & 0 \end{bmatrix}_{n-1 \times n} \quad (4.9)$$

$$d = [0 \quad \dots \quad 0 \quad (1-\varphi)\alpha_{15} \quad \dots \quad (1-\varphi)\alpha_{50} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \quad (4.10)$$

Il vettore d misura proprio il numero di figli maschi generati dalla sottopopolazione femmine.

Vediamo che quando svolgiamo il prodotto $\Lambda x(t) = \begin{bmatrix} L^F & 0 \\ d & 0 \\ 0 & L_2^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^F \\ x^M \end{bmatrix}$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} L^F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^F \\ x^M \end{bmatrix} = L^F x^F + 0x^M = L^F x^F$$

$$\begin{bmatrix} 0 & L_2^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^F \\ x^M \end{bmatrix} = 0x^F + L_2^M x^M = L_2^M x^M$$

$\begin{bmatrix} d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^F \\ x^M \end{bmatrix} = dx^F + 0x^M$ questo prodotto produce proprio la generazione di neonati maschi

Il vettore di stato dei maschi è dato dalla somma dei maschi esistenti più i maschi che nascono.

4.1. Equilibrio demografico per il modello di Leslie distinto per sesso

Del modello

$$x(t+1) = \Lambda x(t)$$

possiamo valutare se esiste o meno un equilibrio demografico, cioè uno stato della popolazione dato da un autovettore non negativo della matrice Λ associato all'autovalore λ_0 ; nel lungo termine, per il teorema della convergenza, si raggiunge l'equilibrio demografico.

Per valutare questo equilibrio verrà adoperata la teoria, precedentemente esposta, di Perron-Frobenius.

Data la matrice partizionata

$$\Lambda = \begin{bmatrix} L^F & 0 \\ d & 0 \\ 0 & L_2^M \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_{15}^F & \dots & \alpha_{50}^F & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_1^F & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^F & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1}^F & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (1-\varphi)\alpha_{15} & \dots & (1-\varphi)\alpha_{50} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \omega_1^M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & \omega_2^M & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1}^M & 0 \end{bmatrix}$$

risulta che l'ultima colonna è costituita da tutti zero, ne consegue che Λ non è irriducibile.

Il teorema generale della teoria delle matrici non negative afferma che se la matrice Λ , non negativa, è irriducibile allora possiede un unico autovalore positivo λ_0 e un unico autovettore positivo $\bar{z}$ associato a λ_0 ; inoltre, ogni altro autovettore associato a λ_0 è un multiplo di $\bar{z}$.

Ma la matrice appena esposta non essendo irriducibile non può godere di tale proprietà a meno che non si operi su una sottomatrice che non consideri la colonna nulla.

Consideriamo allora la sottomatrice

$$L_{50} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_{15}^F & \dots & \alpha_{49}^F & \alpha_{50}^F \\ \omega_1^F & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^F & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_{49}^F & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.1.1)$$

in questa matrice essendoci $\alpha_{50}^F > 0$ per ogni coppia di vertici è garantito che esiste un percorso per transitare tra due stati qualsiasi del grafo associato alla matrice. Quindi, la matrice L_{50} è irriducibile.

Nel polinomio caratteristico sono presenti almeno due coefficienti con esponenti successivi positivi, ad esempio $\alpha_{15}^F \omega_{14}^F$ e $\alpha_{16}^F \omega_{14}^F \omega_{15}^F$, e quindi nel calcolo dell'indice di imprimitività, nell'argomento della MCD saranno presenti due differenze, due termini successivi. Il MCD di due numeri successivi è sempre 1; in quanto, due numeri successivi sono sempre due numeri primi relativi.

Ne consegue che la matrice L_{50} è primitiva.

Allora è possibile applicare il teorema generale della teoria delle matrici non negative e il teorema della convergenza.

Quindi, L_{50} possiede un unico autovalore positivo λ_0 ed un unico autovettore positivo ${}^{50}z^0$ associato a λ_0 .

λ_0 è anche strettamente dominante rispetto a tutti gli altri elementi dello spettro e risulta essere un autovalore semplice.

Ricordando che supponendo una matrice $A_{n \times n}$ non negativa, irriducibile e primitiva, con autovalore semplice λ_0 , con autovettore associato $\bar{z} > 0$, per ogni $x(0) \in \mathbf{R}^n$ esiste un numero $c > 0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A^t x(0)}{\lambda_0^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\lambda_0^t} = c \bar{z}.$$

In applicazione del teorema generale di Perron-Frobenius.

Nel nostro caso $A = L_{50}$ e consideriamo $x(0) = {}^{50}x^F(0)$, vettore di stato della sottopopolazione femmine fino a 50 anni al tempo zero.

Allora esiste $c > 0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_{50}^t {}^{50}x^F(0)}{\lambda_0^t} = c {}^{50}z^0,$$

quindi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{{}^{50}x^F(t)}{\lambda_0^t} = c {}^{50}z^0. \quad (4.1.2)$$

Per $i = 51$ abbiamo

$$\begin{aligned} x_{51}^F(t+1) &= \omega_{51-1}^F x_{51-1}^F(t) \quad (t > 51-50) \\ \frac{x_{51}^F(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} &= \frac{\omega_{50}^F}{\lambda_0^{51-50+1}} \frac{{}^{50}x_{51}^F(t-(51-50))}{\lambda_0^{t-(51-50)}} = \frac{\omega_{50}^F}{\lambda_0^2} \frac{{}^{50}x^F(t-1)}{\lambda_0^{t-1}}. \end{aligned}$$

È importante che i tempi al numeratore e al denominatore siano uguali in modo che calcolando il limite entrambi "correranno" all'infinito con la stessa velocità.

Per $i = 52$ abbiamo

$$x_{52}^F = \omega_{52-1}^F x_{52-1}^F(t) \quad (t > 52 - 50)$$

$$x_{52}^F(t+1) = \frac{\omega_{50}^F \omega_{51}^F}{\lambda_0^{52-50+1}} \frac{{}^{50}x_{52}^F(t - (52 - 50))}{\lambda_0^{t-(52-50)}} = \frac{\omega_{50}^F \omega_{51}^F}{\lambda_0^3} \frac{{}^{50}x^F(t-2)}{\lambda_0^{t-2}}.$$

Per tutti i valori di $i = 53, 54, \dots, \Omega$ abbiamo

$$x_i^F(t+1) = \omega_{i-1}^F x_{i-1}^F(t) \quad (t > i - 50)$$

$$\frac{x_i^F(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \frac{\omega_{50}^F \omega_{51}^F \dots \omega_{i-1}^F}{\lambda_0^{i-50+1}} \frac{{}^{50}x_i^F(t - (i - 50))}{\lambda_0^{t-(i-50)}}.$$

Notiamo che il primo fattore non dipende dal tempo ma solamente da i .

L'ultima relazione implica che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i^F(t)}{\lambda_0^t} = c z_i^{0F},$$

con

$$z_i^{0F} = \frac{\omega_{50}^F \omega_{51}^F \dots \omega_{i-1}^F}{\lambda_0^{i-50+1}} {}^{50}x_{50}^0 \quad (i = 51, 52, \dots, \Omega).$$

Ora definiamo il vettore di stato

$$z^{0F} = \begin{bmatrix} {}^{50}z^0 \\ z_{51}^0 \\ \vdots \\ z_{\Omega}^0 \end{bmatrix},$$

è la concatenazione di un vettore (${}^{50}z^0$) e $\Omega - 50$ scalari ($z_{51}^0, \dots, z_{\Omega}^0$). La prima componente è infatti il vettore definito prima e gli scalari sono il numero di individui per classe di età generati facendo sopravvivere gli individui in ${}^{50}z^0$.

Allora per l'equilibrio demografico asintotico della sottopopolazione delle femmine otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^F(t)}{\lambda_0^t} = c z^{0F}.$$

Ora, inseriamo nella valutazione appena fatta la popolazione maschile.

Definito

$$\alpha_k^M = \frac{(1 - \varphi)}{\varphi} \alpha_k^F \quad (k = 15, 16, \dots, 50), \quad (4.1.3)$$

per gli individui maschi di età compresa tra 0 ed 1, abbiamo

$$\frac{x_1^M(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=15}^{50} \alpha_k^M \frac{x_k^F(t)}{\lambda_0^t},$$

applicando il limite per $t \rightarrow \infty$ al primo ed al secondo membro

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_1^M(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=15}^{50} \alpha_k^M \frac{x_k^F(t)}{\lambda_0^t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_1^M(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \frac{1}{\lambda_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=15}^{50} \alpha_k^M \frac{x_k^F(t)}{\lambda_0^t}$$

questo implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_1^M(t)}{\lambda_0^t} = c \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=15}^{50} \alpha_k^M z_k^{0F} = c z_0^{0M}$$

con

$$z_1^{0M} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=15}^{50} \alpha_k^M z_k^{0F}.$$

Per il resto della sottopopolazione maschile $i = 2, 3, \dots, \Omega$ otteniamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i^M(t)}{\lambda_0^t} = c z_i^{0M},$$

dove

$$z_i^{0M} = \frac{\omega_{i-1}^M \omega_{i-2}^M \dots \omega_1^M}{\lambda_0^{i-50+1}} z_1^{0M}.$$

Perciò, dato il vettore

$$z^{0M} = \begin{bmatrix} x_1^{0M} \\ x_2^{0M} \\ \vdots \\ x_\Omega^{0M} \end{bmatrix},$$

per i maschi sono tutti scalari, e abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^M(t)}{\lambda_0^t} = c z^{0M}. \quad (4.1.4)$$

Infine, definito il vettore della distribuzione per età della popolazione

$$z^0 = \begin{bmatrix} z^{0F} \\ z^{0M} \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

otteniamo il seguente equilibrio demografico

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\lambda_0^t} = c z^0. \quad (4.1.6)$$

Adesso vediamo che z^0 è un autovettore non negativo della matrice Λ , associato all'autovalore λ_0 .

Infatti, dall'equazione di evoluzione del modello di Leslie per due sessi

$$x(t+1) = \Lambda x(t)$$

otteniamo che con $t = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{x(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \Lambda \frac{x(t)}{\lambda_0^{t+1}}$$

$$\frac{x(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \frac{1}{\lambda_0} \Lambda \frac{x(t)}{\lambda_0^t}.$$

Applicando il limite al primo ed al secondo membro per il tempo che tende all'infinito otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_0} \Lambda \frac{x(t)}{\lambda_0^t},$$

allora

$$\lambda_0 z^0 = \Lambda z^0. \quad (4.1.7)$$

Riepilogando: per la convergenza esiste un equilibrio demografico, cioè uno stato di popolazione z^0 che è un autovettore non negativo della matrice Λ , associato ad un autovalore positivo λ_0 ; inoltre nel lungo periodo, la distribuzione per età della popolazione tende alla distribuzione per età di equilibrio nel senso che, per ogni stato iniziale $x(0)$ esiste $c > 0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\lambda_0^t} = c z^0.$$

Osserviamo che dall'autovettore corrispondente all'equazione della definizione di autovettore per il caso specifico

$$L_{50} z^0 = \lambda_0 z^0$$

è semplice calcolare l'autovettore, moltiplicato eventualmente per una costante,

$${}^{50}z^0 = \begin{bmatrix} \lambda_0^{50} \\ \frac{\omega_1^F \omega_2^F \dots \omega_{49}^F}{\lambda_0^{49}} \\ \frac{\omega_1^F \omega_2^F \dots \omega_{48}^F}{\lambda_0} \\ \vdots \\ \frac{\omega_{49}^F}{1} \end{bmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Tale vettore è ottenuto mediante gli stessi passaggi svolti per il calcolo dell'equilibrio demografico del modello di Leslie con n classi di età senza distinzione per sesso, in cui ottenevamo, ponendo arbitrariamente $z_n = 1$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_0^n}{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{n-1}} \\ \frac{\lambda_0^{n-1}}{\omega_2 \cdots \omega_{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_0}{\omega_{n-1}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nel nostro caso $A = L_{50}$ e consideriamo $x(0) = {}^{50}x^F(0)$, vettore di stato della sottopopolazione femmine fino a 50 anni al tempo zero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{{}^{50}x^F(t)}{\lambda_0^t} = c {}^{50}z^0. \quad (4.1.9)$$

5. Le applicazioni

In questo capitolo verranno applicate le nozioni teoriche fin qui presentate.

Tutte le applicazioni verranno svolte in ambiente di programmazione MATLAB su dati reali riferiti al 2015.

Le applicazioni del modello saranno eseguite per l'Italia, per l'Ungheria e per l'Unione Europea (ante Brexit, 28 stati).

Si sottolinea che le proiezioni sono state fatte per un periodo di 150 anni ed evidentemente le ipotesi sottostanti il modello, costanza degli α e ω , possono essere una forzatura, soprattutto se la convergenza si raggiunge in molti anni, in quanto in un periodo molto ampio è realistico aspettarsi una variazione delle probabilità di sopravvivenza e dei tassi di fertilità.

Quello che però è rilevante e che ben si può intuire da queste proiezioni è la tendenza della dinamica.

Realisticamente è quindi poco probabile che si realizzino esattamente le proiezioni che si faranno nel corso del capitolo, soprattutto nel lungo periodo.

Quello che renderà evidente l'applicazione del modello è la tendenza della dinamica della evoluzione della popolazione.

I risultati sono al netto dell'effetto della immigrazione.

Quindi, tutti i calcoli sono stati effettuati non considerando la popolazione che migra, sia in entrata che in uscita dalla popolazione in oggetto. Questo, per esempio, spiega nel caso dell'Italia perché la perdita di numerosità della popolazione residente stimata dall'ISTAT risulta più contenuta rispetto a quella del modello. Infatti l'ISTAT²⁷ stima che nel 2065 la popolazione residente italiana diminuirà ma non drasticamente come sarà rappresentato in questa sede. La previsione ISTAT dell'andamento decrescente è molto più contenuta in quanto viene preso in considerazione un aumento della popolazione residente immigrata pari a 14,4 milioni di persone, nei primi cinquant'anni del periodo di proiezione.

Lo studio degli effetti delle migrazioni risulta essere il naturale sviluppo del modello di Leslie, tale ricerca è già stata effettuata da Angrisani, Attias, Bianchi e Varga nel 2010²⁸ e nel 2012²⁹, da A. Pianese, A. Attias and Z. Varga nel 2014³⁰, da M. Angrisani e C. Di Palo nel 2016³¹.

²⁷ ISTAT, *il futuro demografico del paese*, 26 aprile 2017

²⁸ M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Dynamic analysis of the effect of immigration on the demographic background of the pay-as-you-go pension system*. MAF 2010 - Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance, Ravello, Italy, 7 - 9 April 2010, Abstracts, pp. 6 – 7.

²⁹ M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Sustainability of a Pay-As-You-Go Pension System by Dynamic Immigration Control*. Applied Mathematics and Computation, 219, 2012, pp. 2442–2452.

³⁰ A. Pianese, A. Attias and Z. Varga, *Dynamic immigration control improving inverse old-age dependency ratio in a pay-as-you-go pension system*. Decision Support Systems, Volume 64, August 2014, pp. 109–117.

³¹ M. Angrisani e C. Di Palo, *The Leslie model modified for fertility and immigration: the inefficiency of immigration-based population stabilization*, Current politics and economics of Europe, Vol 27, N. 1, 2016

5.1. Applicazioni sui dati italiani

Ora si mostreranno alcune rappresentazioni grafiche che riguardano l'andamento della popolazione Italiana mediante programmazione MATLAB e l'utilizzo del sopra esposto modello di Leslie distinto per sesso.

L'orizzonte temporale è di 150 anni e la distribuzione della popolazione per classi di età iniziale, le probabilità di sopravvivenza distinte per sesso e i tassi di fertilità sono riferiti a statistiche ISTAT riferite all'anno 2015 (Appendice B).

Applicando la 4.7 si ottiene la seguente rappresentazione grafica.

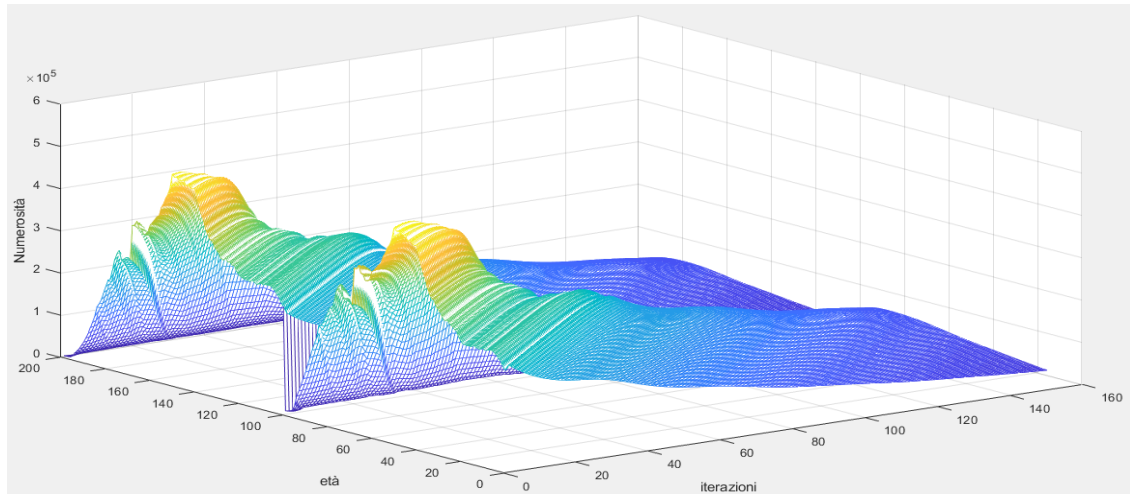


Figura 25: stima dell'evoluzione della popolazione italiana mediante il modello di Leslie distinto per sesso

Da cui si vede che, con lo stesso modello, vengono rappresentate, contemporaneamente ma separatamente, le evoluzioni per le due sottopopolazioni, maschi e femmine. Le prime cento classi di età rappresentano la sottopopolazione femminile e le seconde cento rappresentano la sottopopolazione maschile.

Ancora, si può stimare l'andamento futuro della sottopopolazione femminile.

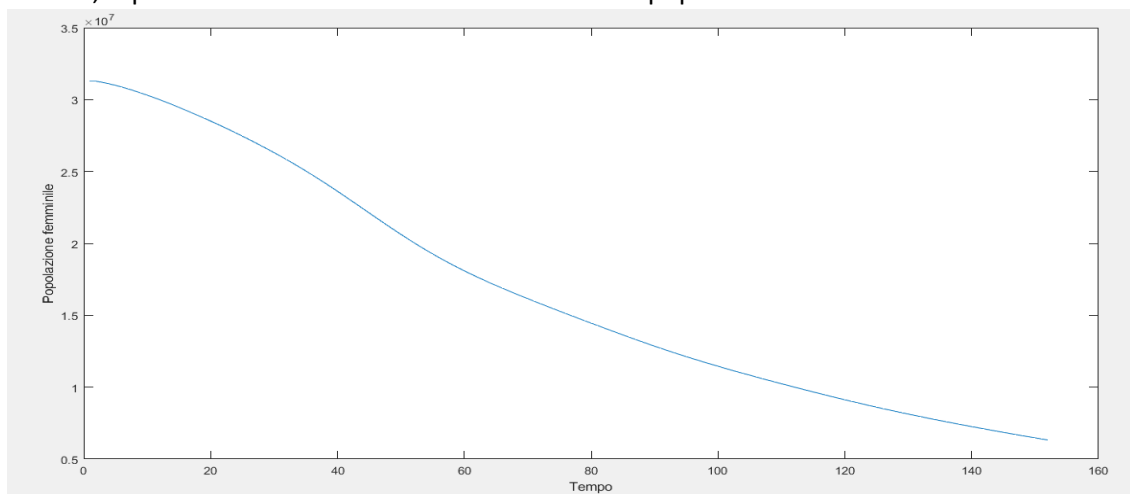


Figura 26: stima dell'evoluzione della popolazione femminile italiana mediante il modello di Leslie distinto per sesso

Possiamo stimare anche l'andamento futuro della sottopopolazione maschile.

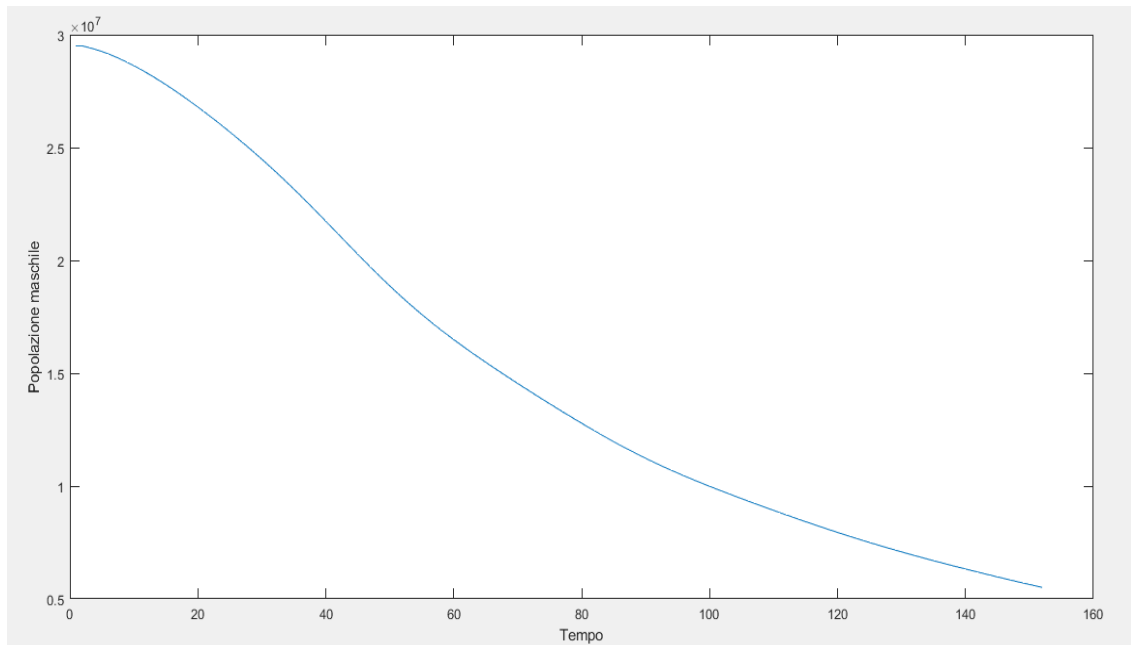


Figura 27: stima dell'evoluzione della popolazione maschile italiana mediante modello di Leslie distinto per sesso

Infine, possiamo osservare la stima dell'andamento futuro dell'intera popolazione.

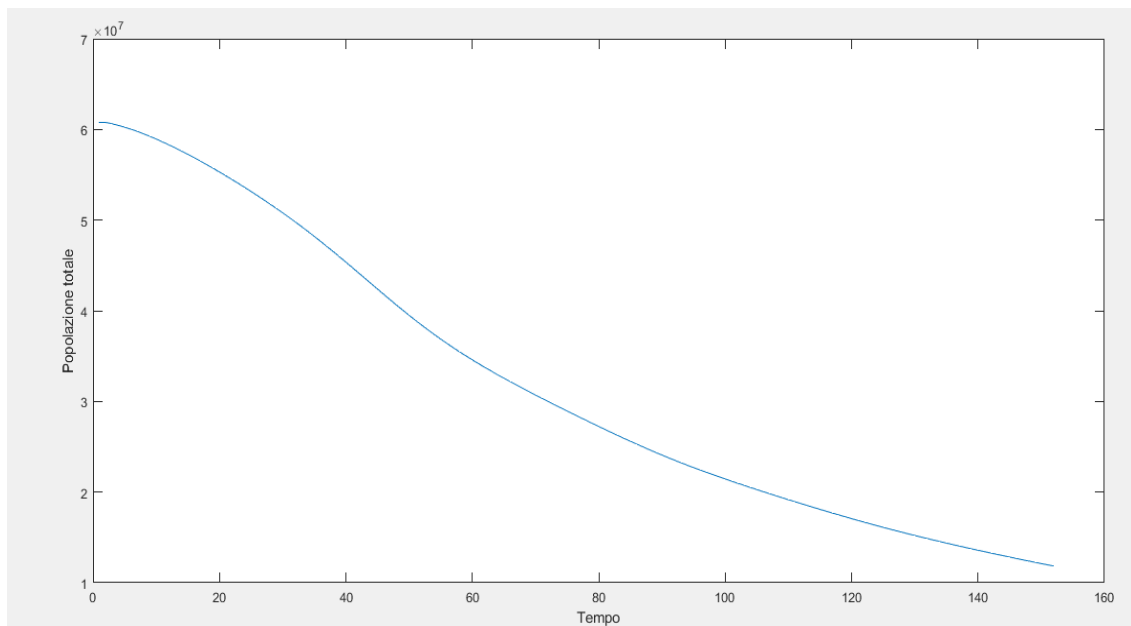


Figura 28: stima dell'evoluzione della popolazione totale italiana mediante modello di Leslie distinto per sesso

Notiamo che la popolazione stimata col modello di Leslie con due sessi è una popolazione che va lentamente estinguendosi. Teniamo però in considerazione che sono stati tenuti costanti, per tutta la durata della proiezione, i tassi di fertilità e le probabilità di sopravvivenza, e non è stato tenuto in considerazione l'effetto migrazione.

Inoltre, un andamento del genere non è necessariamente insostenibile dal punto di vista previdenziale.

Nonostante sia evidente l'impossibilità che, date le ipotesi, si raggiunga un equilibrio dinamico è però possibile che nonostante il decadimento della numerosità della popolazione si mantenga un equilibrio demografico, della distribuzioni per classi di età.

5.2. Evoluzione della popolazione e autovalore associato alla matrice di transizione

Come già osservato si può valutare l'andamento demografico anche in funzione dell'autovalore associato alla matrice di transizione.

L'autovalore della matrice di transizione della sottopopolazione femminile italiana tagliata a 50 anni è $\lambda_0 = 0,9886$, essendo minore di uno porta ad una dinamica dell'evoluzione della popolazione decrescente.

Tale autovalore è anche l'autovalore della matrice partizionata Λ , in quanto generata a partire proprio dalla matrice delle femmine tagliata a 50 anni.

Possiamo avere un altro riscontro riguardo questo andamento negativo attraverso la valutazione di $q(1)$ definito come $R := q(1) = \alpha_1 + \alpha_2 \omega_1 + \dots + \alpha_n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}$ che rappresenta il numero medio di figli per donna durante l'intera durata della vita.

Nel nostro caso $R = 1,3422$, come ci è confermato anche dal report di ISTAT³².

A questo punto è interessante valutare come sia possibile invertire questa tendenza.

Cioè, per quale valore di R l'autovalore λ_0 diventa almeno pari ad 1?

In un sistema chiuso, quindi senza migrazioni, le leve su cui è possibile far forza sono le probabilità di sopravvivenza e i tassi di fertilità; ci concentreremo su questi ultimi.

Vediamo di quanto sia necessario aumentare i tassi di fertilità.

Un aumento complessivo del 45% dei tassi di fertilità comporta il conseguimento di un valore dell'autovalore $\lambda_0 = 1.0000$ e di un valore di $q(1) = 1,9462$.

Infatti dalla figura seguente vediamo come il comportamento asintotico dell'evoluzione della popolazione porti nel tempo ad una stabilizzazione demografica, ad un valore costante della popolazione, non più tendente allo zero come succede invece nel caso realistico.

Grazie al modello studiato si riesce quindi a valutare a quali condizioni si stabilizza la numerosità della popolazione in valore assoluto.

³² Natalità e fecondità della popolazione residente, anno 2015, ISTAT, 28 novembre 2016

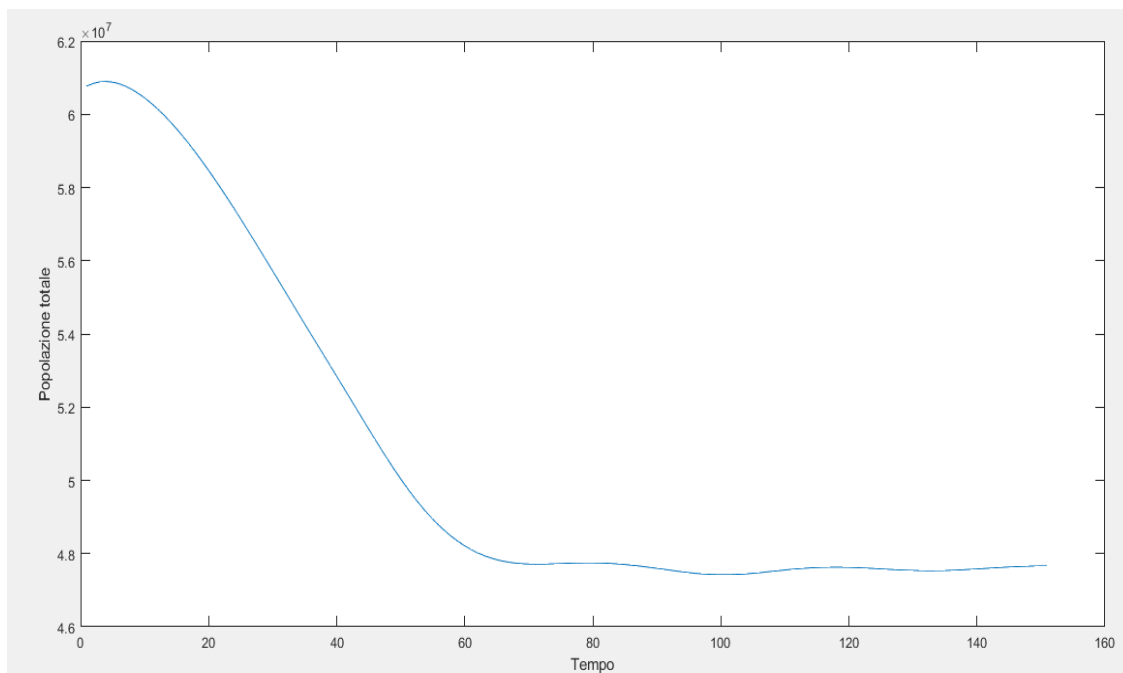


Figura 29: Scenario 1: incremento dei tassi di fertilità del 45% e quindi con $\lambda_0 = 1.0000$

Vediamo ora che cosa succederebbe in uno scenario, poco realistico, ma interessante, in cui i tassi di fertilità aumentano del 90%.

Questa circostanza comporterebbe un valore dell'autovalore $\lambda_0 = 1.0085$ a cui corrisponde un $R = 2,55$ da cui possiamo quindi già ipotizzare un andamento esponenzialmente crescente verso l'infinito.

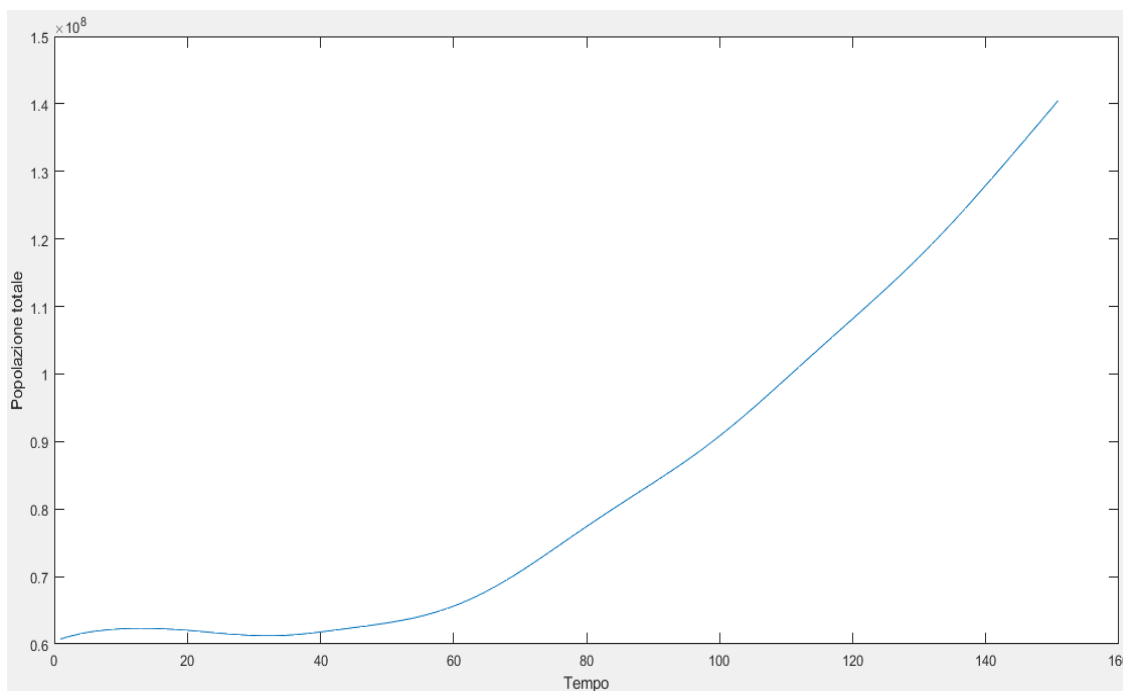


Figura 30: Scenario 2: incremento dei tassi di fertilità del 90% e quindi con $\lambda_0 = 1.0085$

La figura che deriva dalla relativa simulazione in ambiente MATLAB conferma ciò che avevamo ipotizzato.

Si noti che nella figura 30 è stata cambiata la scala dell'asse delle ordinate da " $\times 10^7$ " a " $\times 10^8$ ".

La teoria del modello di Leslie ci garantisce che, dati i tassi di fertilità e le probabilità di sopravvivenza costanti, allora la popolazione tende, nel medio lungo periodo, all'equilibrio demografico nonostante l'andamento della numerosità assoluta della popolazione possa tendere all'estinzione.

$$\min_i \{L_{50,i}u\} \leq \lambda_0 \leq \max_i \{L_{50,i}u\} \quad (5.2.1)$$

Dove $L_{50,i}$ è la i -esima riga della matrice di transizione tagliata della sottopopolazione femmine

per $i = 1, 2, \dots, 50$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

La condizione 5.2.1 è detta criterio di Brauer-Solow³³.

Infatti, notiamo che la somma degli elementi della prima riga della matrice tagliata delle femmine è uguale alla somma dei tassi di fertilità delle femmine, α_i^F e che la somma delle altre righe è uguale alle probabilità di sopravvivenza delle femmine per ciascuna età, fino a 49 anni.

Quindi, con riferimento alla sottopopolazione femminile italiana, essendo le probabilità di sopravvivenza da una età all'altra sempre strettamente minore di uno ed essendo la somma dei tassi di natalità per ogni età, $L_{50,1}u$, pari a 0,65, allora il massimo della somma degli elementi di ciascuna riga dovrà essere strettamente minore dell'unità: $\max_i \{L_{50,i}u\} < 1$. Nel nostro caso $\max_i \{L_{50,i}u\} = 0.9999$, che è la probabilità di sopravvivenza più alta.

Quindi, per la 5.2.1, $\lambda_0 \leq \max_i \{L_{50,i}u\} < 1 \rightarrow \lambda_0 < 1$.

Riepilogando.

Condizione necessaria affinché l'autovalore dominante sia più grande o almeno uguale ad uno è che la somma dei tassi di fertilità della sottopopolazione delle femmine sia almeno uguale ad uno.

³³ M. Angrisani, C. Di Palo, R. Fantaccione, A.M. Palazzo, *The Leslie model population stability: an application*, REASER, Vol 6, N. 2, 2013.

5.3. Confronto tra l'andamento di R in Ungheria e in Italia

Prendendo a riferimento i dati forniti dall'EUROSTAT possiamo costruire un grafico che metta a confronto l'andamento, dal 2010 al 2016, del numero medio di figli per donna in Italia, in Ungheria ed in Europa.

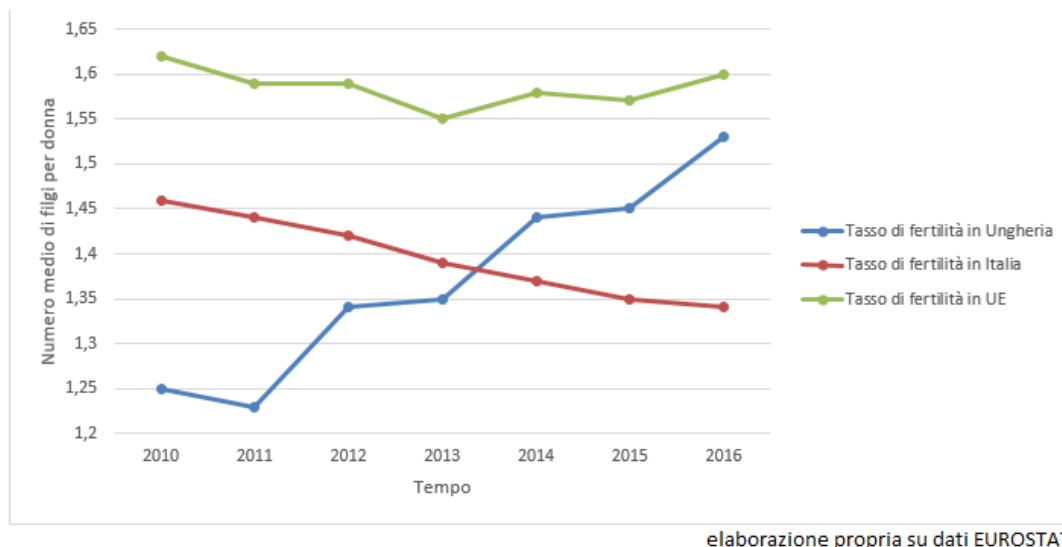


Figura 31: confronto del numero medio di figli per donna in Italia, in Ungheria ed in Europa

Vediamo come in Ungheria, la linea blu, l'andamento dei tassi di fertilità è crescente, dal 2011 al 2017 si è avuto un incremento della natalità del 21%.

Mentre in Italia, la linea rossa, l'andamento dei tassi di fertilità è decrescente, dal 2010 al 2016 si è avuto un decremento della natalità dell'8%.

Il motivo per cui l'andamento del tasso di fertilità in Ungheria sia radicalmente diverso da quello italiano è apprezzabile in funzione di ben precise scelte fatte dal governo ungherese in questo senso.

A tal proposito è utile ricordare il discorso che il segretario di Stato responsabile per le politica della famiglia ungherese Katalin Novák ha fatto a Roma il 21 maggio 2018 riguardo le politiche del governo ungherese in tema di famiglia³⁴.

La costituzione ungherese protegge il matrimonio e la famiglia.

Il governo incoraggia le coppie ad avere figli avendo ben presente l'importanza dell'evoluzione demografica della popolazione ungherese.

L'obiettivo può essere raggiunto attraverso politiche stabili ma in grado di adattarsi alle esigenze contingenti.

Per i genitori e i futuri genitori è importante avere una situazione finanziaria stabile nel lungo periodo affinché siano incentivati a procreare. Quindi è necessario creare le condizioni per cui

³⁴ <https://www.lifesitenews.com/news/hungary-sees-abortion-numbers-plunge-with-rise-of-pro-family-policies>

non sia necessario scegliere tra famiglia e lavoro. Il lavoro e la famiglia devono trovare entrambi spazio nella vita della persona, non devono essere l'uno escludente l'altro.

Per guadagnare la fiducia delle persone e spiegare l'intenzione del governo di essere vicino alle famiglie, dalle elezioni del 2014 è stata creata una distinzione tra il ministero degli affari sociali e della famiglia proprio per evidenziare come la povertà e le nuove nascite siano due questioni ugualmente meritevoli di attenzioni.

La spesa media dei paesi OCSE in sostegni alle famiglie è del 2.43% del PIL.

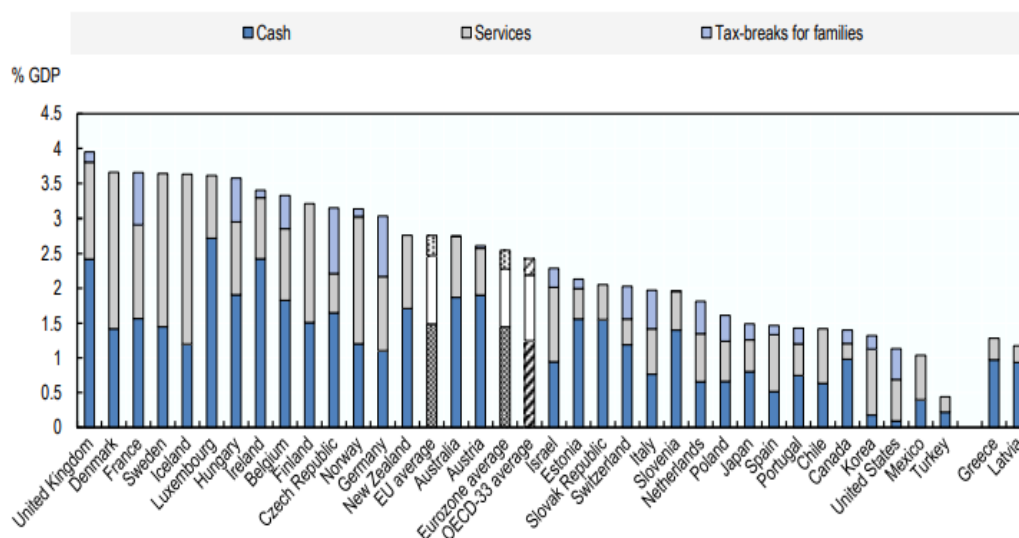


Figura 32: spesa per tipo di sostegno alle famiglie in percentuale del PIL (2013) aggiornato al 2017

OECD Family Database <http://www.oecd.org/els/family/database.htm>

Dalla figura 32 vediamo che l'Ungheria è in settima posizione per ammontare di spesa per sostenere le famiglia con una spesa superiore al 3.5% del PIL, ben sopra la media OCSE ed europea.

L'Italia è solamente ventunesima nella classifica e sotto la media OCSE ed europea.

In Ungheria i supporti alle famiglie sono subordinati all'occupazione lavorativa prima che nasca il bambino ma anche universali per il solo fatto che nasca un bimbo.

Per quanto riguardo i supporti universali:

- è garantito un pagamento *una tantum* alla nascita del bambino;
- i genitori hanno diritto a tre anni di maternità retribuita;
- la *child home care fee* (GYED), ulteriore supporto per assicurare che la nascita di un figlio non escluda i genitori, o uno dei due, dal mondo del lavoro, ne hanno usufruito 90.000 genitori nel 2017;
- agevolazioni fiscali, da quando il feto del primo figlio ha 91 giorni;
- diminuzione della spesa per le "bollette", i genitori con un figlio hanno in media un salario netto più alto del 13% rispetto a chi non ha figli;
- sostegno all'acquisto o all'affitto della casa;

- le famiglie che stanno attualmente allevando tre o più figli, o che si impegnano a crescere almeno tre figli in futuro, possono ricevere un sostegno in contanti una tantum di 32.260 euro quando costruiscono o comprano una nuova proprietà;
- incentivo fiscale per le nuove coppie sposate di 16 euro al mese;
- i Baby Bond, titoli del tesoro con 19 anni di durata depositati per ciascun nuovo nato dal governo per un importo iniziale di 137 euro e poi rimpinguato annualmente sempre dallo Stato;
- il programma Elizabeth che garantisce l'opportunità di partecipare a dei centri estivi per i bambini che non hanno possibilità di andare in vacanza, quasi gratuitamente;
- nell'anno accademico 2016/17 467.000 bambini hanno avuto diritto alla mensa scolastica gratuitamente;
- diritto ad avere i libri scolastici gratuitamente per tutti i bambini delle scuole primarie;
- da quest'anno le ragazze che aspettano il primo figlio possono temporaneamente sospendere il pagamento del prestito studentesco, chi aspetta il secondo figlio ne dovrà pagare solo la metà e chi aspetta il terzo figlio è liberato dall'obbligazione;
- l'importo dei mutui contratti dalle famiglie è ridotto di un milione di fiorini per ogni figlio;
- "donna 40" è una misura che permette alle donne di andare in pensione con una anzianità contributiva di 40 anni indipendentemente dall'età per poter supportare la crescita dei nipoti, ne hanno beneficiato in 27.713 nel 2017.

Un po' di numeri a confronto.

Tabella 3: dati indicativi degli incentivi alla famiglia in Ungheria ed in Italia

	UNGHERIA		ITALIA	
	2009	2016	2009	2016
<i>Abitanti</i>	10 030 975	9 830 485	60 340 328	60 589 445
<i>Nati vivi</i>	96 442	93 063	560 259	468 345
<i>Tasso di fertilità totale</i>	1,32	1,49	1,45	1,34
<i>Numero di aborti</i>	43 181	30 439	118 579	84 916
<i>Numero di matrimoni</i>	36 730	51 805	230 613	203 258
<i>Numero di divorzi</i>	23 820	19 552	54 000	82 469
<i>Occupazione femminile (più di 15 anni)</i>	55,1%	65,0%	34,7%	35,3%

5.4. Confronto tra la stima della dinamica demografica col modello di Leslie ad un sesso e a due sessi

A questo punto è opportuno valutare se effettivamente la maggiore complessità del modello a due sessi è giustificata da una migliore stima dell'andamento futuro della popolazione.

Intuitivamente il modello a due sessi risulta essere un modello più raffinato in quanto distingue le caratteristiche contingenti tra maschi e femmine.

Ricordiamo che tiene in considerazione delle diverse probabilità di sopravvivenza da un anno ad un altro che ci sono tra maschi e femmine. Probabilità che risultano maggiori per la sottopopolazione femminile. Distingue anche i tassi di fertilità, tenendo in considerazione il fatto che sono solamente gli individui femmina a procreare e non è indifferente la probabilità che al parto nasca un maschio o una femmina.

La differenza tra le due curve quindi può essere spiegata dalla diversa aspettativa di vita alla nascita di un neonato; in Italia per esempio nel 2015 la speranza di vita risulta pari a 80,1 anni per gli uomini e a 84,7 anni per le donne³⁵.

Nel grafico seguente è rappresentata l'evoluzione della numerosità totale della popolazione applicando per la stima futura il modello di Leslie classico, senza distinzione per sesso, e poi il modello di Leslie distinto per sesso.

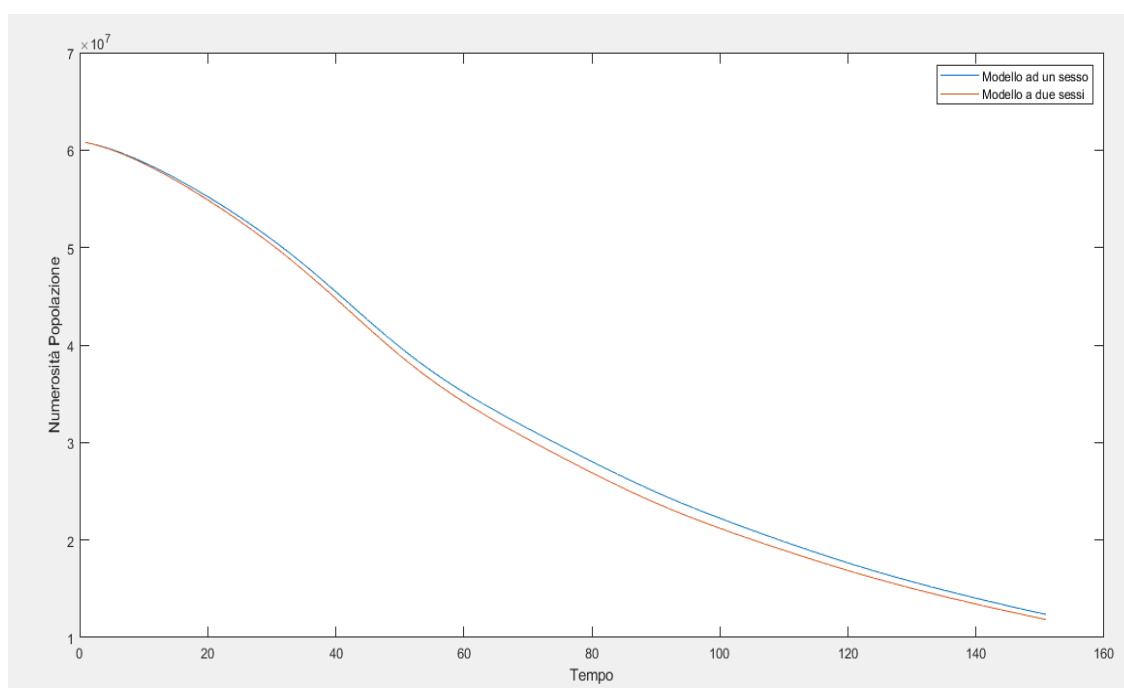


Figura 33: confronto tra l'evoluzione della popolazione totale italiana col modello di Leslie ad un sesso e modello di Leslie a due sessi

Si vede che il modello ad un sesso sovrastima, rispetto al modello a due sessi, l'andamento della popolazione questo perché non tiene in considerazione che le femmine in media hanno una probabilità di sopravvivenza del 2% superiore a quella degli uomini.

Quindi, gli uomini che risultano essere *ex ante* più numerosi nel modello di Leslie classico non soffrono delle probabilità di sopravvivenza più basse, il modello tende a farli sopravvivere di più e quindi ad ingrandire, più del dovuto, la popolazione.

Di seguito è riportata la figura che rappresenta la superficie dell'evoluzione semilogaritmica per la popolazione italiana divisa per classi di età della.

³⁵ https://www.termometropolitico.it/1208792_2015_speranza_di_vita.html

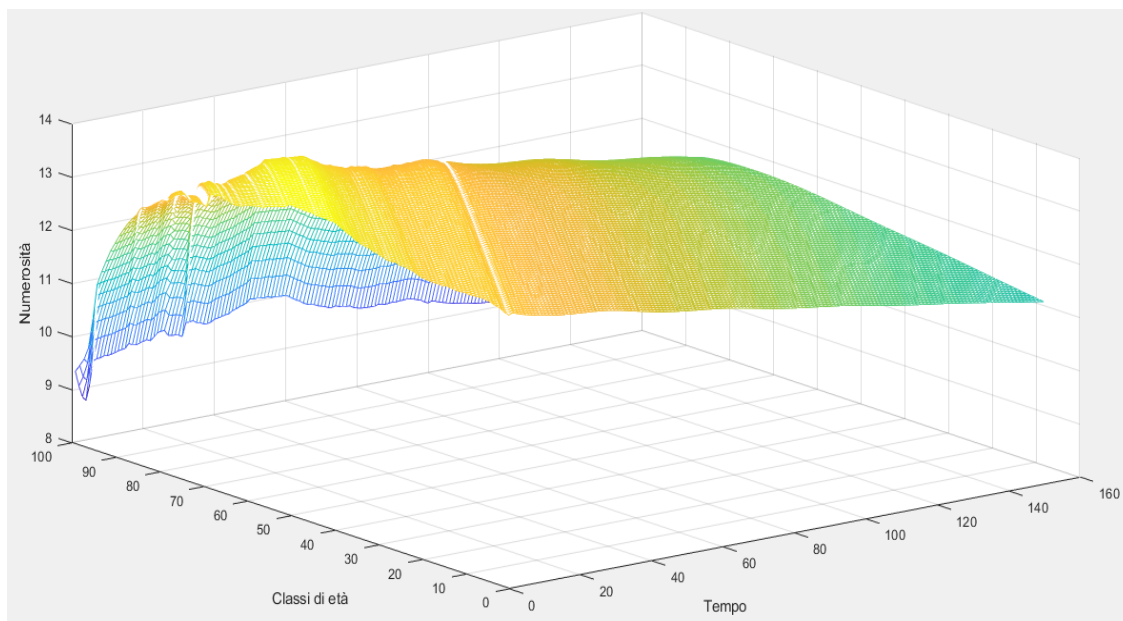


Figure 33bis: rappresentazione semilogaritmica dell'evoluzione demografica della popolazione italiana

In relazione a questa figura non risulta evidente la convergenza o meno all'equilibrio, risulta quindi opportuno riportare delle sezioni della superficie.

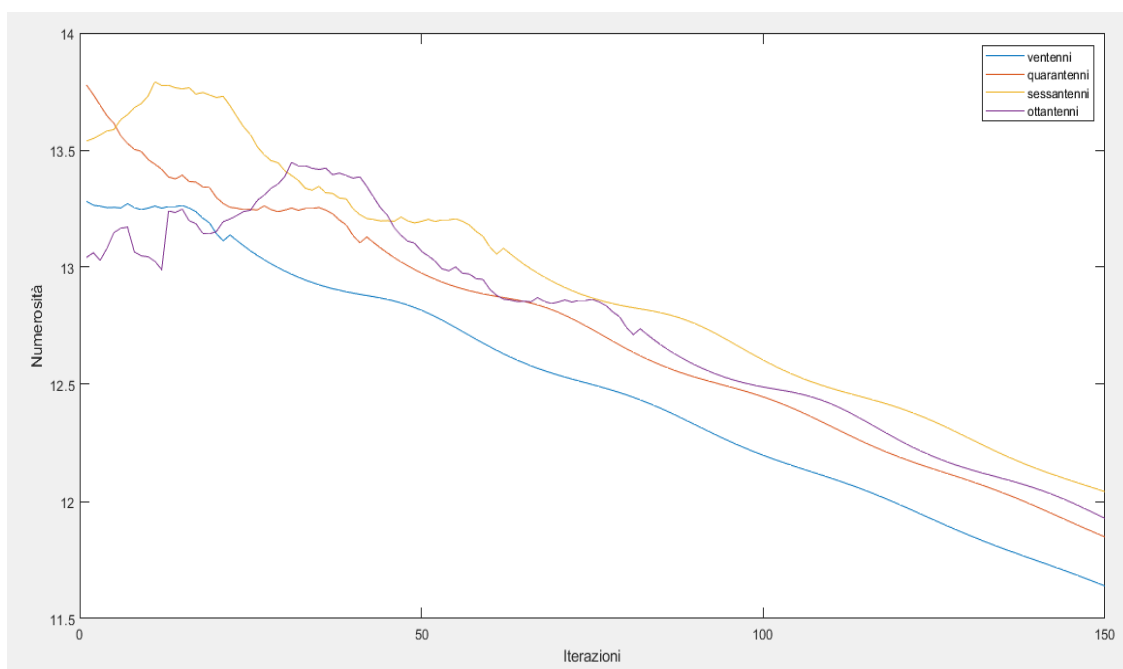


Figure 34: sezioni della superficie dell'andamento demografico logaritmico della popolazione italiana per il modello di Leslie non distinto per sesso

Infatti, dalla figura 34 cogliamo esattamente la rettificazione degli andamenti lungo rette parallele.

Andamento che, grazie alla rappresentazione semilogaritmica, ci permette di dedurre la convergenza all'equilibrio demografico.

5.5. Valutazione dell'andamento del rapporto attivi pensionati

Ai fini della valutazione di un sistema previdenziale a ripartizione è utile conoscere una stima dell'andamento demografico della popolazione di riferimento.

In particolare risulta essere rilevante lo studio del rapporto tra attivi e pensionati e il suo andamento nel tempo.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x^F(t) \\ x^M(t) \end{bmatrix} \quad \forall t = 1, 2, \dots, 150$$

$$y_i(t) := x_i^F(t) + x_i^M(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{100}(t) \end{bmatrix}$$

allora si definisce rapporto attivi pensionati il seguente rapporto

$$\gamma(t) = \frac{\sum_{i=16}^{64} y_i(t)}{\sum_{i=65}^{100} y_i(t)}. \quad (5.5.1)$$

Da questa relazione e dalle precedenti stime sull'andamento futuro della popolazione possiamo proiettare in avanti, per 150 anni, l'andamento del rapporto attivi pensionati.

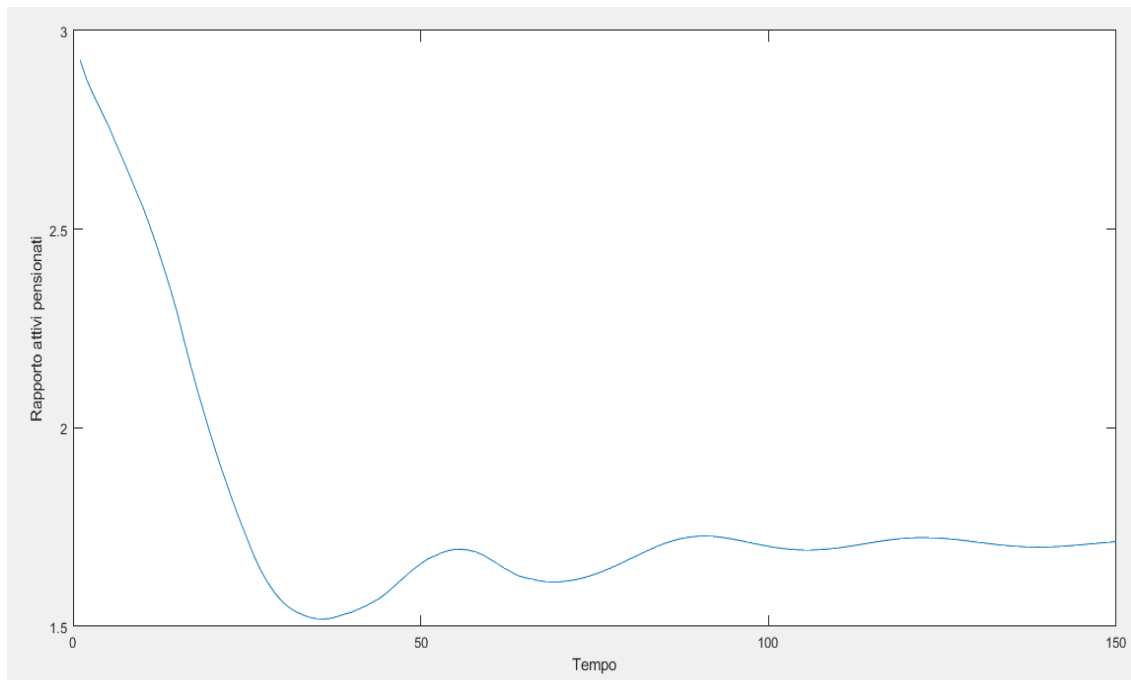


Figura 34bis: Andamento del rapporto attivi pensionati in Italia

Vediamo dalla figura che per i primi trenta quarant'anni il rapporto attivi pensionati crolla, questo è dovuto al pensionamento delle generazioni dei *baby boom*.

Generazioni che, evidentemente, dovranno morire e lo faranno entro i prossimi 40 anni.

Le onde sono dovute al residuo dell'onda dei *baby boom*.

Notiamo che dal cinquantesimo anno il rapporto attivi pensionati va stabilizzandosi, anche se a valori poco sopra 1.5, questo significa che tra cinquant'anni ci saranno 3 lavoratori ogni 2 pensionati.

Confrontando i valori trovati col modello in oggetto e quelli forniti dall'ISTAT si evidenziano delle divergenze. Questo non è dovuto ad errori di modellizzazione ma ad una diversa definizione di attivo e di pensionato. In questo lavoro sono considerati pensionati tutti gli over 65 ed attivi tutta la popolazione con una età compresa tra 16 e 64 anni. Quindi non si effettua una valutazione sull'effettiva presenza del soggetto nel mondo del lavoro o nella fase di quiescenza, si discrimina solo in funzione dell'età.

Indipendentemente dal valore del rapporto attivi pensionati quello che si vuole sottolineare è che allo scorrere del tempo questo rapporto si stabilizza.

Questo è conseguenza del fatto che anche nel rapporto attivi pensionati trattiamo con una distribuzione di probabilità, possiamo quindi puntare ad una sorta di equilibrio demografico.

Infatti, il rapporto può essere visto come normalizzato e quindi indipendente dai numeri assoluti e dipendente solo dalla distribuzione di probabilità.

Notiamo la convergenza anche nell'andamento del rapporto attivi pensionati proprio perché anche questa è una valutazione sulla distribuzione di probabilità in quanto

$$\gamma(t) = \frac{\frac{\sum_{i=16}^{64} y_i(t)}{\sum_i y_i(t)}}{\frac{\sum_{i=65}^{100} y_i(t)}{\sum_i y_i(t)}}.$$

Osserviamo ora un confronto tra la valutazione dell'andamento del rapporto attivi pensionati stimato con il modello di Leslie a due sessi ed il modello indistinto per sesso.

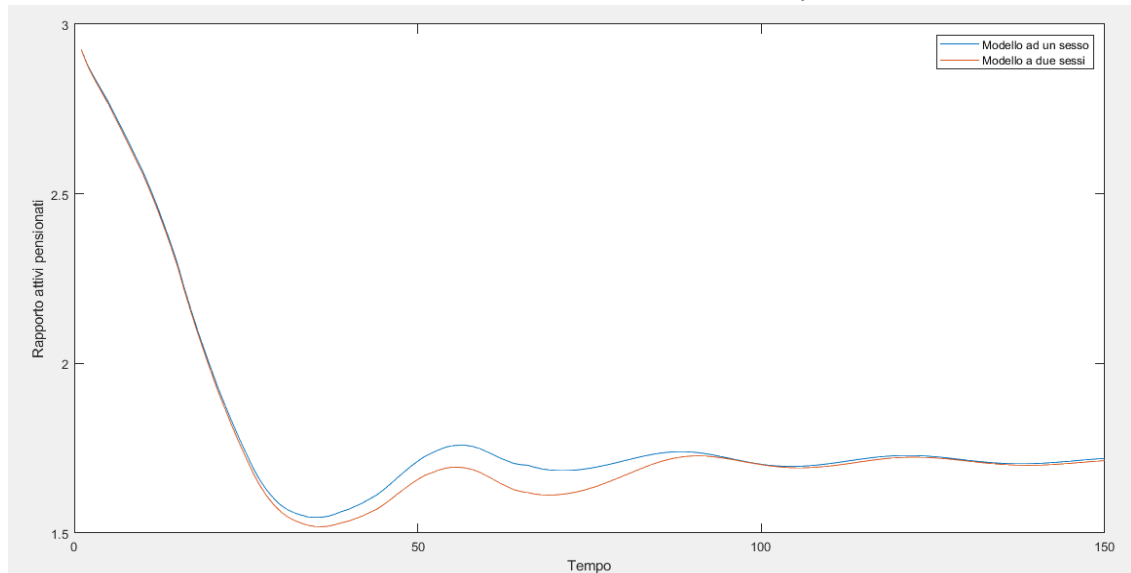


Figura 35: confronto tra il rapporto attivi pensionati del modello a due sessi e ad un sesso

La valutazione per due sessi qui comporta valutazione leggermente diversa.

Questo potrebbe essere dovuto al fatto che il modello indistinto per sesso non apprezza correttamente le maggiori probabilità di sopravvivenza delle donne.

Conseguenza diretta di questo è che il modello a due sessi stima più correttamente la coda della distribuzione della sottopopolazione femminile e quindi, tenendo conto di molti pensionati in più rispetto al modello ad un sesso, fa abbassare il rapporto.

5.6. Applicazioni sui dati ungheresi

Applicando il modello di Leslie distinto per sesso per la popolazione ungherese otteniamo un autovalore $\lambda_0 = 0.9902$, maggiore del nostro, che si ricorda risulta pari a 0.9886.

A causa di questo valore dell'autovalore associato alla matrice di transizione ci aspetta una tendenza comunque negativa, e comunque verso lo zero, ma con un andamento più moderato.

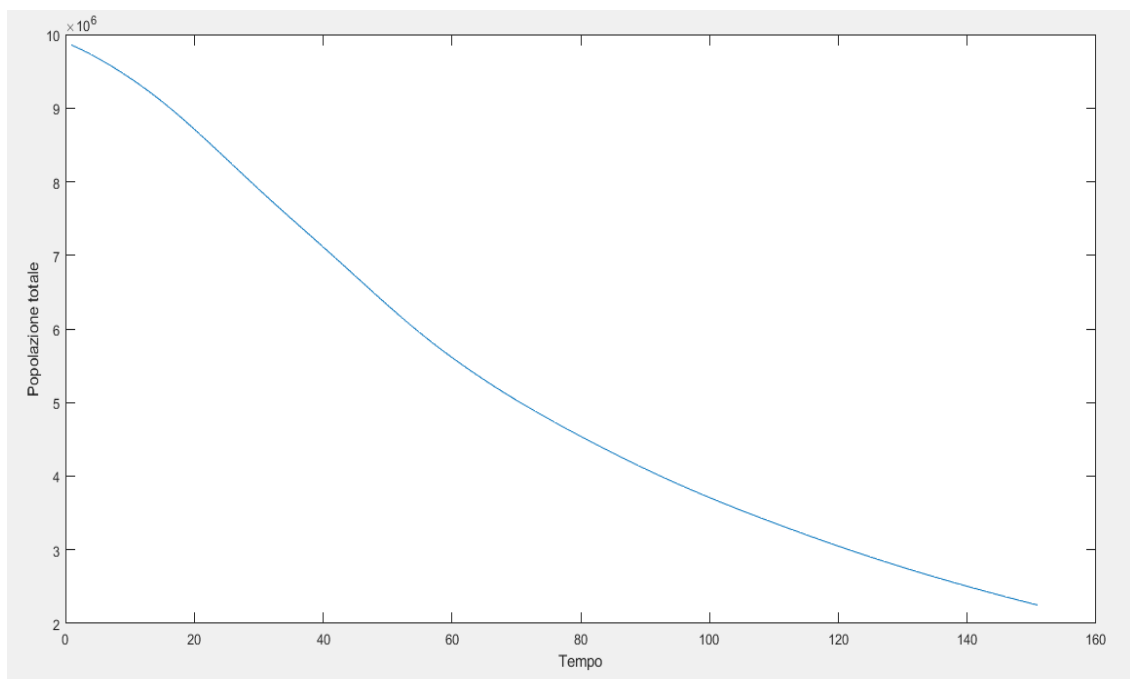


Figura 36: andamento della popolazione totale ungherese stimato col modello di Leslie distinto per sesso

A seguito delle proiezioni sulla popolazione ungherese attraverso il modello di Leslie possiamo stimare il relativo andamento del rapporto attivi pensionati.

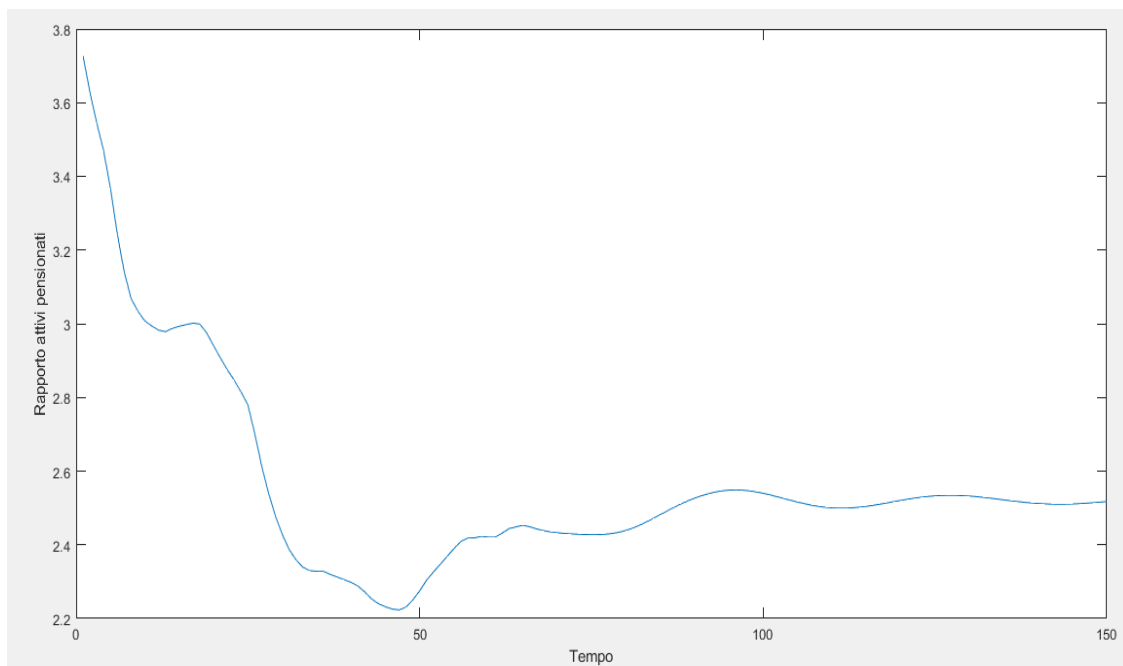


Figura 37: andamento del rapporto attivi pensionati in Ungheria stimato col modello di Leslie distinto per sesso

L'andamento generale del rapporto attivi pensionati parte dal valore $\gamma_{HU}(2015) = 3.7267$, per poi scendere in quasi cinquanta anni di un punto e mezzo, infine il rapporto converge, per le valutazioni già fatte, ad un valore $\gamma_{HU}(t) \approx 2.5$ per $t \gg 1$.

Vediamo ora le rappresentazioni grafiche dei modelli utilizzati.

Si inizia osservando la rappresentazione semilogaritmica della popolazione modellata senza distinzione per sesso insieme alle relative sezioni di superficie relative alle classi di ventenni, quarantenni, sessantenni ed ottantenni; utile per apprezzare le valutazioni sulla convergenza.

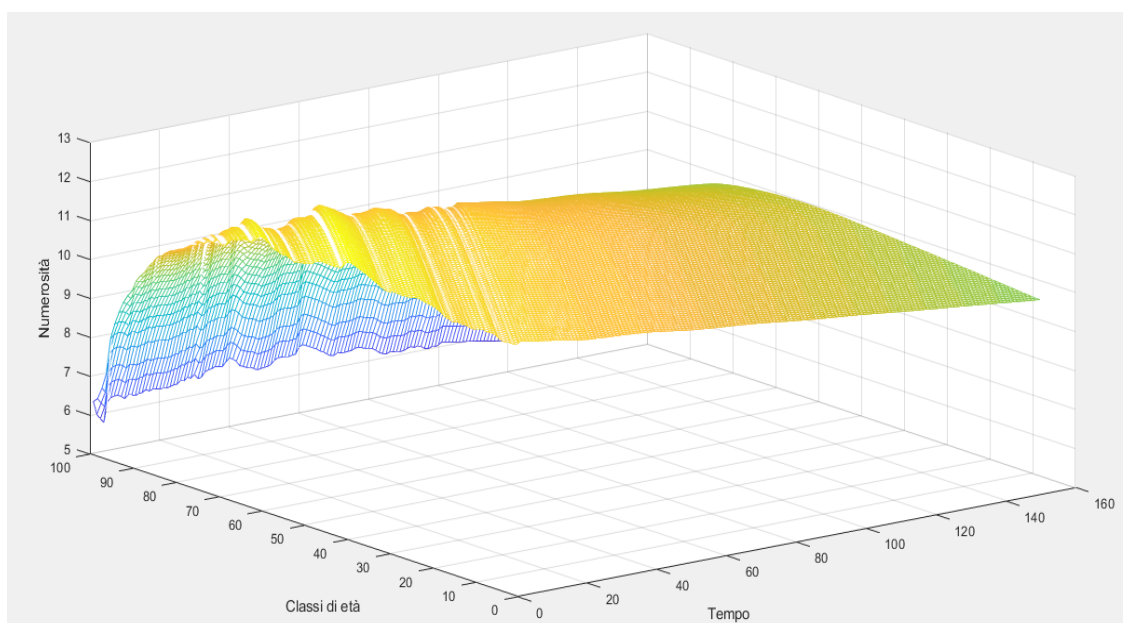


Figura 38: Superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione ungherese per il modello di Leslie non distinto per sesso

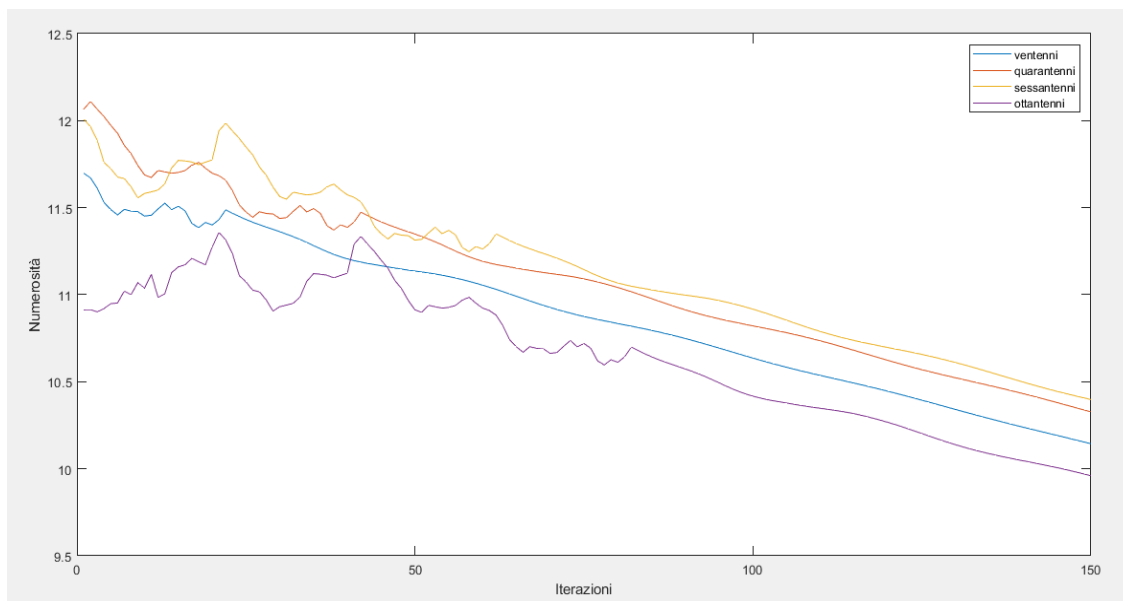


Figura 39: sezioni della superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione ungherese per il modello di Leslie non distinto per sesso

La superficie, ed in modo ancora più evidente, le sezioni del modello di Leslie semilogaritmico, benché ad un sesso, ci permettono di evidenziare la convergenza verso l'equilibrio demografico.

Si sottolinea sempre che l'equilibrio demografico non implica l'equilibrio dinamico.

Quindi, come in questa fattispecie, la popolazione, dato il modello, tende all'estinzione ma lo fa in equilibrio demografico e questo è rilevante dal punto di vista previdenziale.

Di seguito invece viene rappresentata la superficie riguardante l'andamento della popolazione, per singole età e distinta per sesso, derivante dal modello di Leslie a due sessi.

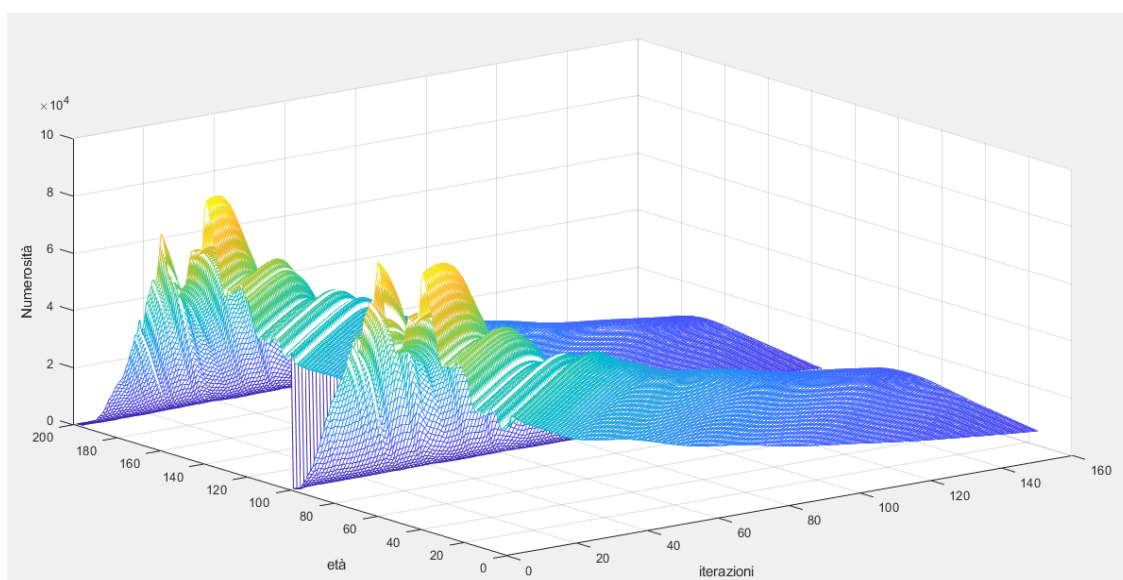


Figura 40: superficie dell'andamento demografico della popolazione ungherese per il modello di Leslie distinto per sesso

Infine si mostrano le differenze che si evidenziano nella stima della popolazione futura a seconda del tipo di modello di Leslie utilizzato.

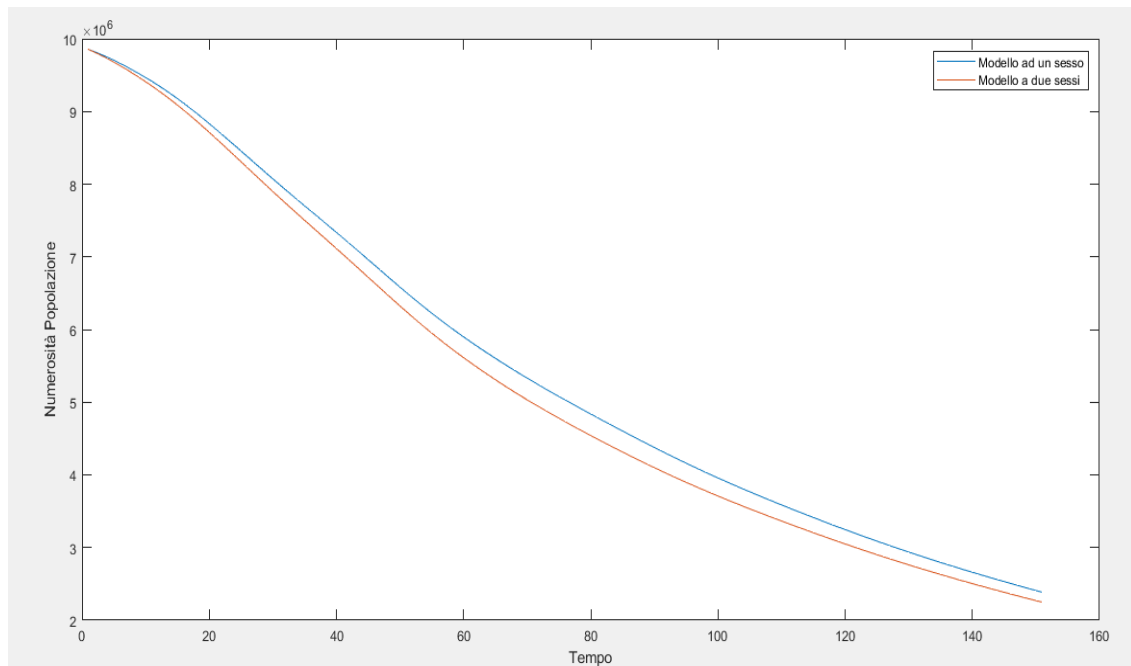


Figura 41: confronto dell'andamento della popolazione totale ungherese stimato col modello di Leslie distinto e non distinto per sesso

Le differenze tra i due modelli sono dovute alla considerazione di una più alta probabilità di sopravvivenza delle donne e una minore probabilità di sopravvivenza degli uomini.

La differenza tra le tue curve quindi può essere spiegata, per esempio, dalla diversa aspettativa di vita alla nascita di un neonato nel 2015 che risulta pari per gli uomini a 72,09 anni e per le donne a 78,61 anni, oltre sei anni in più³⁶.

Questa figura è proprio utile per apprezzare come diverse aspettative di vita, e quindi probabilità di sopravvivenza, rendano diverse le valutazioni fatte dai due modelli.

Ricordando la figura 33, avente lo stesso oggetto ma con i dati italiani, notiamo che il divario tra le due curve è più limitato ed infatti la differenza tra l'aspettativa delle femmine è più contenuta, in Italia tale differenza è di 3,6 mentre in Ungheria di 6,52.

³⁶ https://www.ksh.hu/docs/eng/xstadat/xstadat_annual/i_wnt001b.html

5.7. Applicazioni sui dati dell'intera Unione Europea (28 Stati)

Ora verrà applicato il modello di Leslie, nelle due varianti, ai dati dell'intera UE.

I dati sono stati presi, come per la popolazione ungherese, dall'EUROSTAT e si riferiscono all'anno 2015 (Appendice B).

Si ricorda che gli input per il modello sono la distribuzione per singole età della popolazione, distinta tra maschi e femmine, le probabilità di sopravvivenza da un anno all'altro, distinte tra maschi e femmine, e le probabilità di fare un figlio per singola età.

Vediamo da subito l'andamento futuro della popolazione Europea.

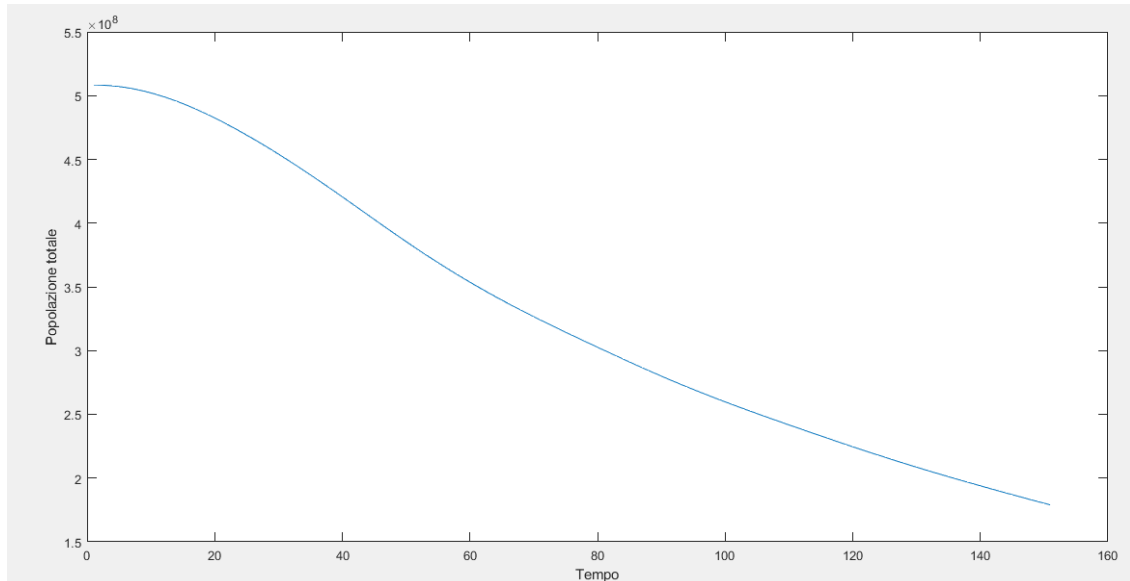


Figura 42: andamento della popolazione totale europea stimato col modello di Leslie distinto per sesso

Notiamo un andamento decrescente quindi ci attendiamo un autovalore associato alla matrice di transizione del modello di non molto inferiore ad uno; infatti, $\lambda_0 = 0.9927$.

Di seguito è rappresentato l'andamento del rapporto attivi pensionati per i prossimi 150 anni.

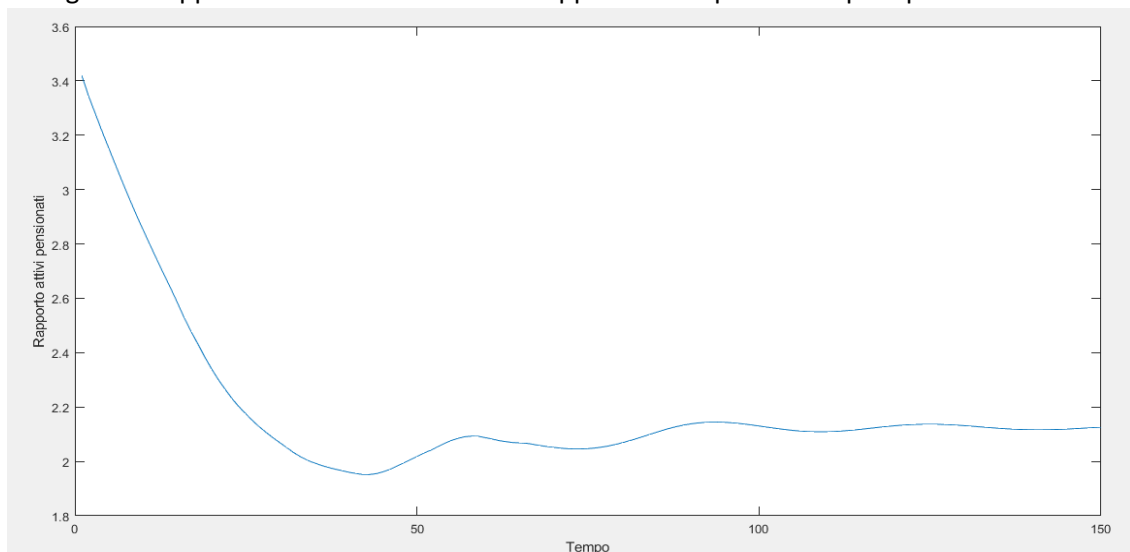


Figura 43: andamento del rapporto attivi pensionati europeo stimato col modello di Leslie distinto per sesso

La figura inizia dal rapporto attivi pensionati del 2015, $\gamma_{UE}(2015) = 3.4198$.

L'andamento decresce velocemente fino ad equilibrarsi per valori $\gamma_{UE}(t) \approx 2.1$ per $t \gg 1$.

Per verificare la convergenza, che si evidenzia nell'andamento del rapporto attivi pensionati, osserviamo la superficie dell'andamento semilogaritmico dell'evoluzione della popolazione, stimata col modello di Leslie ad un sesso, e alcune sue sezioni.

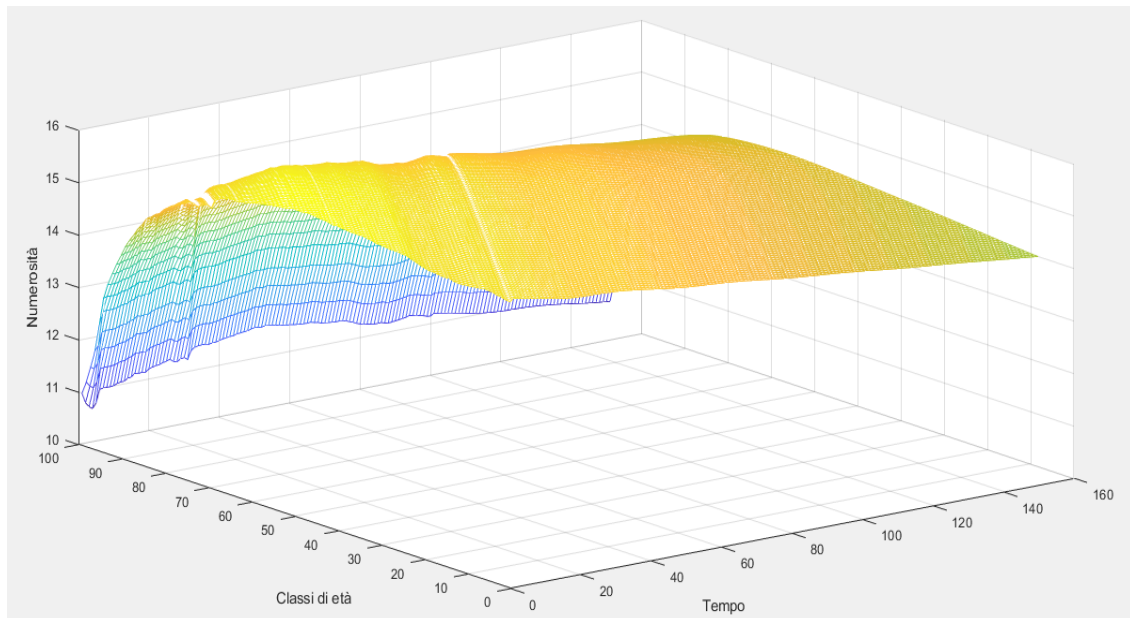


Figura 44: superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione europea per il modello di Leslie non distinto per sesso

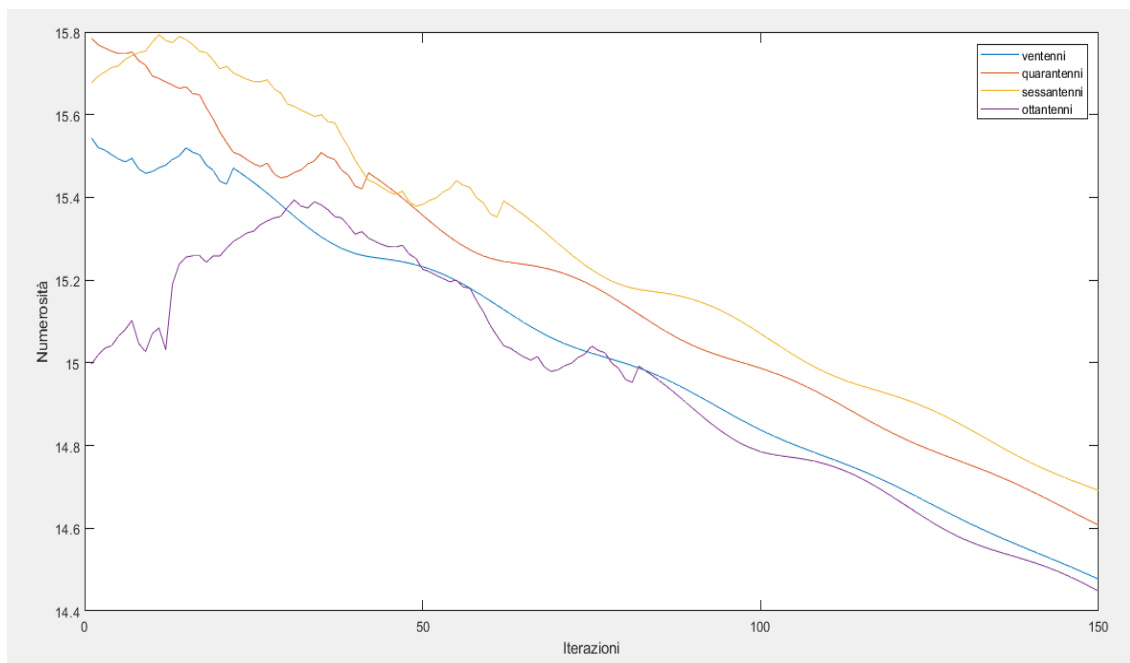


Figura 45: sezioni della superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione europea per il modello di Leslie non distinto per sesso

Notiamo la convergenza grazie al rettificarsi delle singole sezioni. L'andamento decrescente era intuibile *ex ante* per il valore dell'autovalore associato alla matrice di transizione del modello ad un sesso.

Sotto vediamo la superficie dell'andamento dell'evoluzione della popolazione per singole età stimato col modello di Leslie a due sessi su un orizzonte di 150 anni.

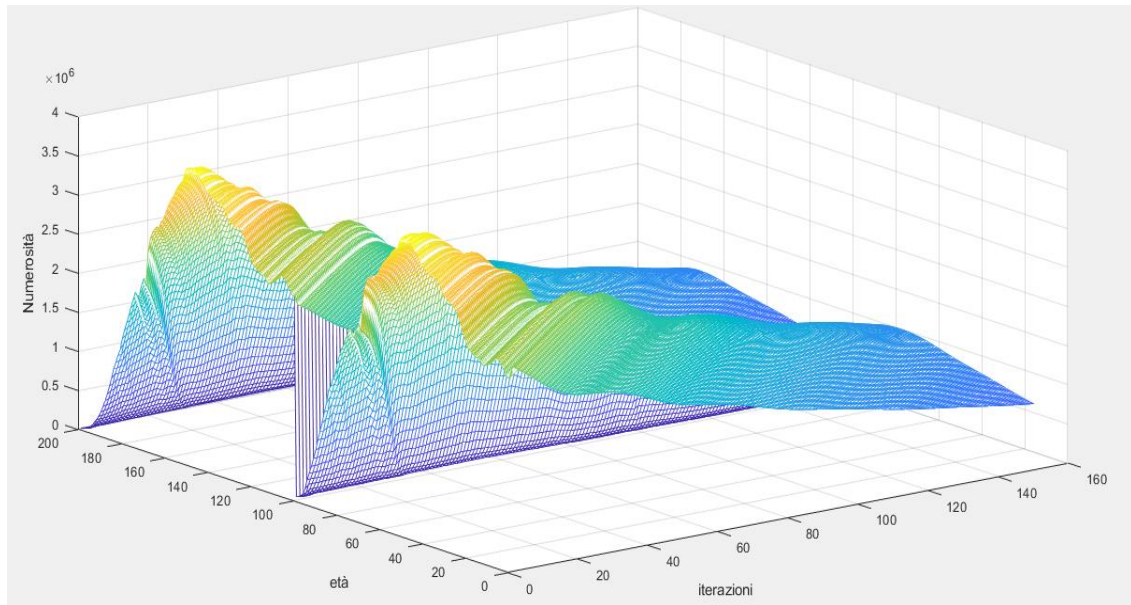


Figura 46: superficie dell'andamento demografico della popolazione europea per il modello di Leslie distinto per sesso

Come già descritto nella sezione riguardante la descrizione del modello matematico, le prime cento classi sono quelle riferite alla sottopopolazione delle femmine e le seconde cento alla sottopopolazione dei maschi.

5.8. Confronto tra UE28, ITA, HU

Abbiamo rappresentato finora delle stime ottenute attraverso il modello di Leslie distinto e indistinto per sesso per la popolazione italiana, ungherese e per l'intera popolazione europea.

Ora può essere interessante confrontare le tre popolazioni su due delle stime finora fatte.

La prima, più rilevante dal punto di vista previdenziale che riguarda il confronto tra i diversi rapporti attivi pensionati.

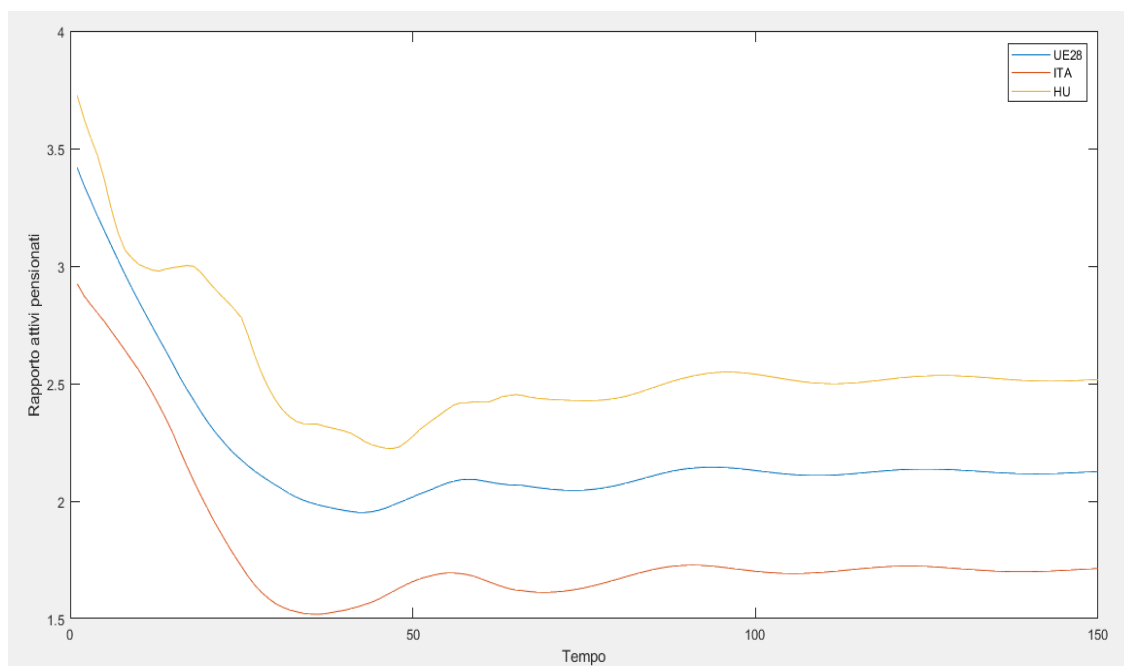


Figura 47: confronto dell'andamento del rapporto attivi pensionati europeo, italiano ed ungherese stimato col modello di Leslie distinto per sesso

In questa figura si nota come tutti e tre i rapporti convergono più o meno nello stesso numero di anni e che l'Ungheria ha un rapporto attivi pensionati più elevato di quello che si stima per l'intero vecchio continente e molto più elevato di quello stimato per l'Italia.

L'Italia va stabilizzandosi a livelli di equilibrio pari a circa $\gamma_{IT}(t) \approx 1.7$ per $t \gg 1$.

L'Europa va stabilizzandosi a livelli di equilibrio pari a circa $\gamma_{UE}(t) \approx 2.1$ per $t \gg 1$.

L'Ungheria va stabilizzandosi a livelli di equilibrio pari a circa $\gamma_{HU}(t) \approx 2.5$ per $t \gg 1$.

Evidentemente le popolazioni con un rapporto più elevato godranno di una maggiore serenità se inserite in un contesto previdenziale a ripartizione in cui, di fatto, con i contributi degli attivi si pagano le prestazioni previdenziali dei pensionati.

Vediamo anche come il livello europeo possa risultare come un valore medio tra i rapporti riferiti all'Italia e all'Ungheria.

Pensando ad una pensione europea si osserverebbe un effetto di mutualità tra i diversi stati, idea che ben si confarebbe al concetto di Comunità Europea ma che, di fatto, mal si adatta agli equilibri politici che si stanno creando all'interno del vecchio continente in cui tendono a prevalere gli egoismi, in tutti i campi e, quindi, presumibilmente anche in campo previdenziale.

Pensare ad una previdenza Europea è del tutto anacronistico.

In Italia si ha l'andamento peggiore ma è anche vero che è il paese in cui la speranza di vita è più alta e quindi il paese in cui l'anziano pensionato rimane per più tempo all'interno del sistema previdenziale.

Come mostra la figura 48, la speranza di vita alla nascita in Ungheria è ben al di sotto dell'aspettativa di un neonato italiano e questo evidentemente si riflette sugli equilibri demografici.

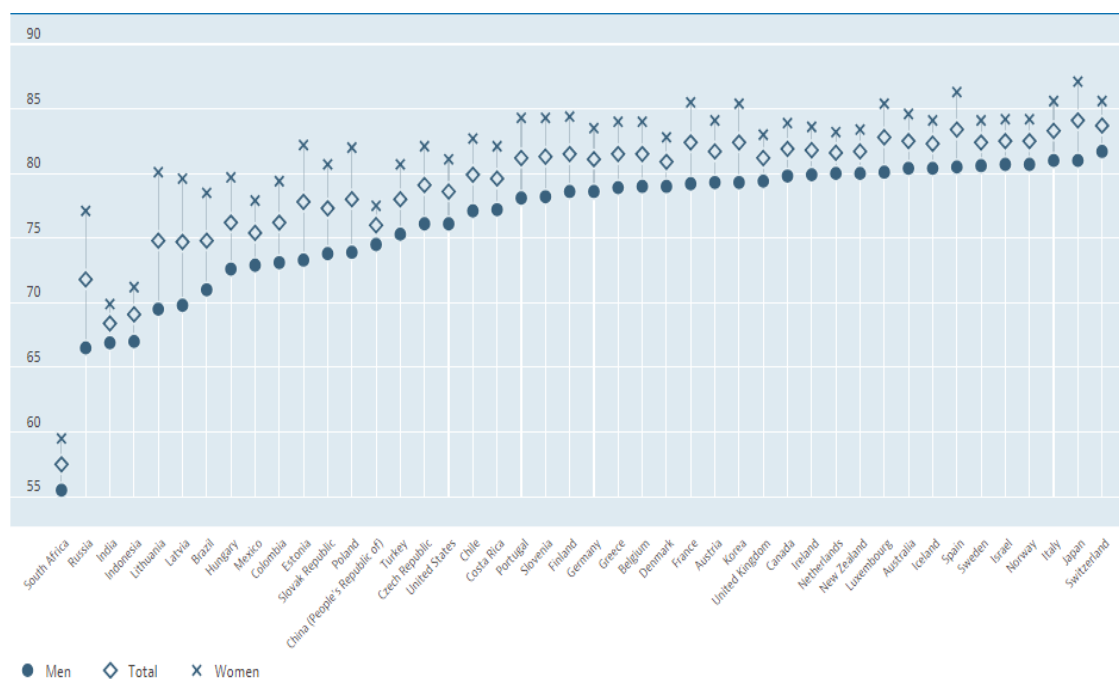


Figura 48: aspettative di vita alla nascita nel 2017

<https://data.oecd.org/healthstat/life-expectancy-at-birth.htm>

L'altra stima, più rilevante invece dal punto di vista demografico è il confronto tra gli andamenti totali delle popolazioni.

Si è più volte sottolineato come in sistemi previdenziali a ripartizione sia fondamentale la valutazione dell'andamento demografico; in questo caso si ritiene più rilevante dal punto di vista demografico solamente perché, benché una popolazione possa avere un andamento della numerosità decrescente, può accadere che questa possa comunque essere caratterizzata da un equilibrio demografico, non certamente dinamico, e, quindi, in qualche modo essere anche sostenibile dal punto di vista previdenziale.

Per la redazione della figura successiva sono state introdotte delle grandezze di scala che hanno reso confrontabili le diverse popolazioni, che hanno numerosità in valore assoluto assai diverse.

La popolazione Italiana si aggira intorno ai 60 milioni, quella ungherese intorno ai 10 milioni e quella europea intorno ai 500 milioni e presentare un grafico che le confronti in valore assoluto è senza dubbio poco comunicativo.

Rappresentare in una figura i valori assoluti degli andamenti non sarebbe stato utile in quanto le scale sono assai diverse e questo non permetterebbe il confronto dei diversi andamenti.

Allora è stato ritenuto opportuno dividere il vettore avente per componenti le numerosità totali delle singole popolazioni alle diverse iterazioni per la numerosità totale della specifica popolazione al tempo iniziale, quindi la prima componente del vettore risultato appena detto risulta essere, in tutti e tre i casi, pari all'unità.

In questo modo abbiamo ridotto gli andamenti delle tre popolazioni alla stessa scala, partendo tutte le popolazioni dal punto (0; 1).

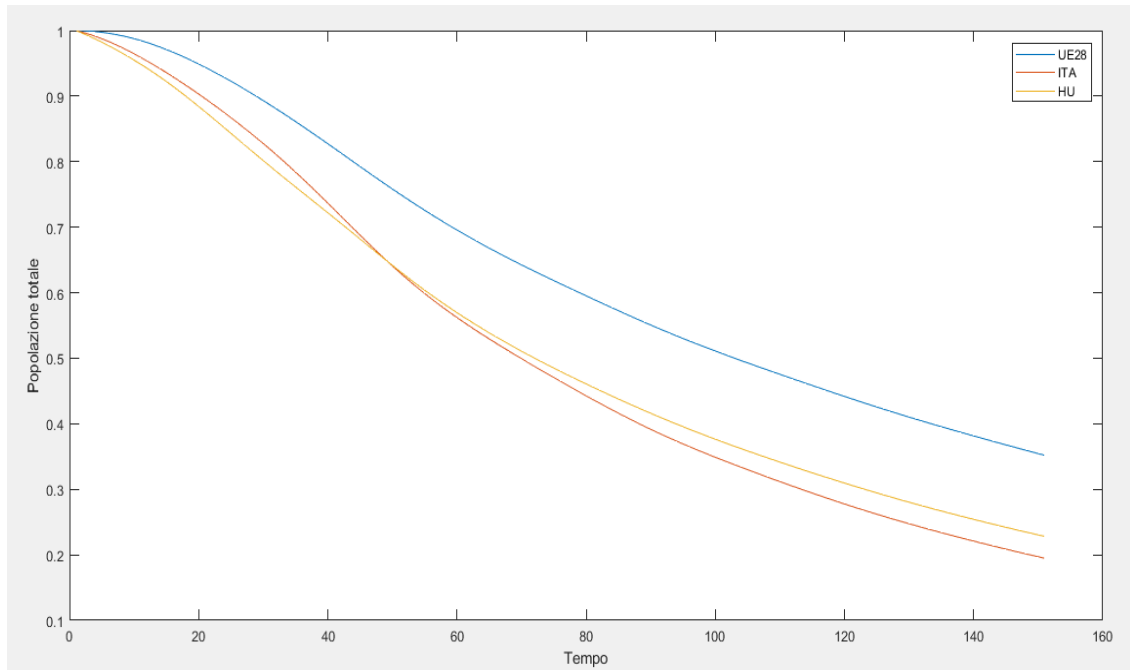


Figura 49: confronto dell'andamento della popolazione totale europea, italiana ed ungherese stimato col modello di Leslie distinto per sesso

Vediamo quindi che la popolazione europea ha un andamento sì decrescente ma con una “velocità” minore rispetto all'Italia e all'Ungheria.

I diversi andamenti, o le diverse velocità con cui le popolazioni decrescono sono evidenziabili alla luce dei valori dei relativi tassi di crescita asintotica.

In ordine decrescente:

$$\lambda_0^{UE} = 0,9927;$$

$$\lambda_0^{HU} = 0,9902;$$

$$\lambda_0^{IT} = 0,9886.$$

Questo stesso ordine infatti è conservato dagli andamenti delle popolazioni all'ultimo anno di proiezione.

Vediamo anche che in un primo momento, circa 50 anni, la popolazione italiana decresce ad una velocità minore rispetto a quella ungherese per poi invertire la tendenza fino alla fine della proiezione.

Questo effetto può essere sempre motivato dalla presenza, e dalla successiva estinzione, dei *baby boom*.

Conclusioni

Questo lavoro ha voluto rappresentare la situazione demografica del paese in quanto fortemente legata alla gestione di sistemi pensionistici gestiti finanziariamente a ripartizione, come quello italiano.

Sono stati raggiunti gli obiettivi prefissati.

È stata individuata una regola per la stabilizzazione del valore assoluto della popolazione attraverso la modificazione dei tassi di fertilità volta al raggiungimento di un autovalore, di un tasso di crescita asintotica pari all'unità ed è stato definito, e dimostrato, il teorema di convergenza che conduce asintoticamente la popolazione all'equilibrio demografico.

Nel corso della trattazione è stato studiato e applicato il modello classico di Leslie e la sua estensione mediante la strutturazione per sessi. Tale modello ha permesso di proiettare in futuro la popolazione di riferimento.

Nell'elaborazione fatta non si considerano le migrazioni. La situazione, soprattutto nel breve periodo potrebbe essere parzialmente sollevata dalle migrazioni controllate.

Le previsioni demografiche fatte nel corso della trattazione sono, per definizione e per costruzione, incerte e lo sono sempre di più all'allontanarsi della proiezione al tempo base. Non per questo però non risultano valide ed interessanti.

Infatti sono utilissime per una valutazione del trend, della tendenza dell'evoluzione demografica della popolazione.

Notiamo che la evoluzione futura demografica del paese è determinata, la demografia non ha shock, se non in casi eccezionali. Quello che succederà nei prossimi anni è noto e non si può negare o far finta che non sia evidente. Le modificazioni della popolazione sono lente ma inesorabili. Quindi, è possibile e necessario valutarle.

Si è visto che le coorti di ultra sessantacinquenni si infoltiranno e di conseguenze aumenteranno le morti; nel frattempo, diminuiranno le nuove nascite e quindi anche le femmine in età fertile. Mentre aumenterà la speranza di vita.

Quindi, data la diminuzione delle nascite e delle femmine in età fertile contro un aumento degli anziani e quindi dei decessi, il saldo della popolazione sarà, evidentemente, negativo. Così si spiega l'andamento fortemente decrescente della popolazione italiana.

Un'osservazione che si può fare è che i tassi di fertilità futuri, come il numero di nuovi nati sono più incerti dell'invecchiamento. In quanto le fertilità future sono riferite anche a donne proiettate, donne ancora non nate; invece gli anziani futuri e l'incremento dei decessi sono riferiti a coorti già esistenti, le coorti già nate cresceranno di età, inevitabilmente.

Il nostro studio però raggiunge un risultato straordinario, la popolazione, nonostante in valore assoluto decresca, giungerà ad un equilibrio demografico, cioè i rapporti tra le numerosità delle classi di età diventano costanti. Questo risultato, dal punto di vista previdenziale, è molto importante in quanto assicura che, nel lungo periodo, tutta l'instabilità nei rapporti tenderà a dileguarsi.

L'instabilità di cui si parla è legata al progressivo invecchiamento della popolazione dovuto anche al transitare dell'onda demografica, legata ai *baby boom* (1961-1975).

I *baby boom* oggi infoltiscono la popolazione attiva che invecchia man mano che l'onda demografica si muove. Col passare del tempo i *baby boom* transiteranno verso le classi di età senili e quindi la popolazione non attiva tenderà ad aumentare a discapito di quella attiva.

Facendo riferimento anche a due report ISTAT³⁷ si farà un riepilogo della situazione italiana.

Lo spostamento dell'onda demografica è un fatto certo, come è certa la popolazione di attivi che sosterrà il peso dell'onda, l'incertezza è nel numero di nuove nascite e quindi dei tassi di fertilità ma che probabilmente nel prossimo futuro non salirà oltre 1,5.

A ridosso del 2045 le corti dei *baby boom* saranno tutte oltre l'età senile e decreteranno il momento più critico dal punto di vista della distribuzione per età della popolazione. La popolazione attiva scenderà sotto il 55%, gli over 65 saliranno quasi al 34%.

Le corti dei *baby boom* saranno le corti di gran lunga più numerose e lo saranno per decenni e saranno quindi l'ago della bilancia di ogni valutazione demografica. La distribuzione per età della popolazione sarà per almeno i prossimi tre decenni estremamente sensibile al passaggio dell'onda demografica.

La speranza di vita continuerà a crescere: nel 2015 l'aspettativa di vita alla nascita è di 80,1 e 84,6 ed arriverà nel 2065 a 86,1 e 90,2.

L'età media della popolazione passerà da 44,7 anni del 2017 a 50 nel 2065.

Quando i *baby boomer* entreranno tutti nell'età senile, oltre i 65 anni di età, la quota di ultrasessantacinquenni sarà superiore di un terzo della popolazione totale.

Il passaggio successivo dell'onda demografica sarà la progressiva estinzione di queste coorti gigantesche di individui che condurranno ad un impennamento delle morti.

Le future nascite non saranno sufficienti a compensare i futuri decessi e la popolazione diminuirà. L'innalzamento delle morti è un fatto certo a differenza dei tassi di fertilità che potrebbero continuare l'attuale trend negativo come anche, invece, risollevarsi. La stabilizzazione del valore assoluto della popolazione dipenderà dall'incerto andamento dei tassi di fertilità.

Dovrà quindi essere un preciso obiettivo dei governi innalzare i tassi di fertilità attraverso politiche attive per la famiglia.

Nel lungo termine, le previsioni e tutta la trattazione fatta in questo elaborato, ed in letteratura, dimostrano che si raggiungerà un equilibrio demografico. Inoltre non si garantisce, anche se si prevede, una stabilizzazione della popolazione oltre alla stabilizzazione della distribuzione per

³⁷ ISTAT, *il futuro demografico del paese, previsioni regionali della popolazione residente al 2065*, 26 aprile 2017.

ISTAT, *natalità e fecondità della popolazione residente*, 28 novembre 2016.

età della popolazione. La stabilizzazione del valore assoluto della popolazione per realizzarsi dovrà, in ogni caso, prevedere un aumento dei tassi di fertilità fino al raggiungimento di un auto-valore unitario.

Questo è stato il punto del lavoro svolto.

Inoltre l'Unione Europea prescrive che le pensioni si possono considerare adeguate quando, oltre a prevenire l'esclusione sociale, permettono ai singoli di mantenere lo stesso tenore di vita durante il pensionamento.

A riguardo non è mai stata emanata una normativa particolare per declinare questo principio, né in Europa né in Italia. Rimane solo un principio esposto durante il Consiglio di Lisbona del 2010 per cui gli Stati membri devono garantire l'adeguatezza e la sostenibilità dei sistemi previdenziali. Il 7 luglio 2010 la Commissione Europea ha pubblicato il *Green Paper*, sottotitolato "*towards adequate, sustainable and safe European pension systems*".

A riguardo e con i risultati ottenuti in questo lavoro la teoria della sostenibilità³⁸ e il teorema di separazione³⁹ permetterebbero certamente di avvicinarsi e poi raggiungere l'obiettivo della sostenibilità, dell'equità intergenerazionale e quindi l'obiettivo prefissato a livello europeo.

In un sistema a ripartizione queste valutazioni di natura demografica risultano essere assolutamente necessarie. Le pensioni correnti sono pagate con i contributi correnti quindi è rilevante conoscere i futuri rapporti tra le classi di età.

Già oggi il sistema è in forte disequilibrio: la spesa corrente per pensioni è ben lontana dall'essere pari all'entrata corrente per contributi. In tale contesto è impensabile sostenere un sistema interamente a ripartizione e sarebbe utile destinare il patrimonio pubblico al sostenimento del welfare e del sistema previdenziale.

Un sistema previdenziale caratterizzato da un'onda demografica non può essere gestito puramente a ripartizione, in quanto non sono verificate le ipotesi di *steady state*. È quindi utile integrare la gestione finanziaria a ripartizione del sistema con una gestione a capitalizzazione.

A capitalizzazione è opportuno gestire tutte le componenti del sistema che non sono gestibili a ripartizione; quindi tutta la popolazione caratterizzata da instabilità demografica, in tal caso la popolazione sull'onda demografica. La parte stabile della popolazione invece può essere gestita a ripartizione.

I due sistemi di gestione finanziaria non devono essere indipendenti ma integrati e complementari.

³⁸ M. Angrisani, *The logical sustainability of the pension system*. PU.M.A. Vol. 19, No. 1, pp. 67-81, (2008).

³⁹ M. Angrisani, C. Di Paolo, *Controlling a demographic wave in defined contribution pension system*. Pp. 1-18. In PURE MATHEMATICS AND APPLICATIONS – ISSN:1788-800X vol. 25 (1), (2015).

Prima di concludere si vuole specificare il significato di equità e solidarietà intergenerazionale.

L'equità intergenerazionale è la sostanziale stabilità nel tempo delle regole alla base del calcolo dei contributi e della prestazione previdenziale.

In un sistema a ripartizione la solidarietà intergenerazionale è invece l'accettazione, in chiave solidaristica, degli attivi del fatto che con i contributi versati non vengono creati dei fondi per le proprie pensioni ma vengono pagate le pensioni degli attuali pensionati.

Questo concetto è implicitamente alla base di un sistema con gestione finanziaria a ripartizione.

I soggetti attivi accetteranno di essere solidali con le generazioni attualmente pensionate solo ed esclusivamente se sono certi dell'equità intergenerazionale. Cioè, la solidarietà degli attivi con le generazioni attualmente in pensione dev'essere ricambiata con una parità di trattamento nel momento in cui anche loro andranno in pensione. Se non è presente questo passaggio gli attivi sono solamente persone che subiscono, passivamente, il ruolo di sostenitori del sistema.

La solidarietà intergenerazionale deve basarsi sull'equità intergenerazionale.

Se e solo se si verifica questa condizione si sceglierebbe di partecipare al sistema, se fosse possibile tale scelta.

Quindi alla base di una proposta di riforma, alla luce di quanto esposto, dovrebbe esserci, necessariamente, il superamento del sistema puramente a ripartizione.

Risulta necessaria l'integrazione di una componente del sistema a capitalizzazione. In questa componente dovrà rientrare tutta la parte di popolazione instabile demograficamente, perché ingestibile a ripartizione.

Per integrare le risorse disponibili, non sufficienti ma necessarie, per questa gestione ausiliaria completamente finanziata non si potrà fare a meno di ricorrere all'enorme patrimonio pubblico che deve essere messo a reddito.

Per la stabilizzazione della popolazione sarà necessario far sì che aumentino i tassi di fertilità attraverso politiche concrete di supporto alle famiglie.

L'aumento dei tassi di fertilità genererà coorti più numerose ma nel medio periodo perché i tempi per l'inserimento del lavoro sono lunghi. Quindi, nel breve periodo il deficit di fertilità può essere colmato attraverso una immigrazione controllata, finalizzata al sostentamento della popolazione di attivi e di donne in età feconda.

La situazione del sistema previdenziale è molto grave ma non irreversibile. Bisogna iniziare, nel più breve tempo possibile, a confrontarsi fattivamente con queste tematiche che devono diventare di dominio pubblico. Devono essere una priorità e se ne deve far carico la classe politica, di sua sponte o sollecitata dal popolo. Altrimenti i costi sociali che si dovranno pagare saranno enormi.

Appendice A

Codici MATLAB

BERNADELLI, CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE.

```
%dati
%fertilita
F1=0;
F2=0;
F3=6;
a=[F1 F2 F3];

%probabilita di sopravvivenza
P1=0.5;
P2=1/3;
b=[P1 0 0; 0 P2 0];

%MATRICE DI BERNADELLI (matrice di transizione)
B = [a;b];

%VETTORE DI STATO
x0=[10 10 10]';
X=[x0 zeros(3,19)];
for t =1:20
X(:,t+1)=B*X(:,t);
end

%grafico tempo-numerosità, divisi in tre classi
t=1:20;
plot(t,X(1,t))
hold on
plot(t,X(2,t))
hold on
plot(t,X(3,t))
```

MODELLO DI LESLIE GENERALE

```
%load data
load DatiLeslieGen1

%costruisco la matrice di Leslie
L = [FertRiga/10; SoprMatrix, zero];

%costruisco la matrice con l'evoluzione per età (40iterazioni)
x=[Pop zeros(101,180)];
for t=1:180
x(:,t+1)=L*x(:,t);
end

%costruisco il grafico dell'evoluzione
figure (1)
mesh(x)
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')
```

MODELLO DI LESLIE GENERALE VERSIONE LOGARITMICA

```
%load data
```

```

load DatiLeslieGen1

%costruisco la matrice di Leslie
L = [FertRiga/10; SoprMatrix, zero];

%costruisco la matrice con l'evoluzione per età (40iterazioni)
x=[Pop zeros(101,180)];
for t=1:180
x(:,t+1)=L*x(:,t);
end

%passaggio al logaritmo
y=log(x);

%costruisco il grafico dell'evoluzione
figure (2)
mesh(y)
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

Sezione del grafico del modello di Leslie Generale versione logarit-
mica
%load data
load DatiLeslieGen1

%costruisco la matrice di Leslie
L = [FertRiga/10; SoprMatrix, zero];

%costruisco la matrice con l'evoluzione per età (40iterazioni)
x=[Pop zeros(101,180)];
for t=1:180
x(:,t+1)=L*x(:,t);
end

%passaggio al logaritmo
y=log(x);

%sezione di superficie per la 20esima classe
figure (1)
t=1:180;
plot(t,y(20,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')

MODELLO DI LESLIE CON 100 CLASSI DI ETÀ E DISTINTO PER SESSO, ITALIA
%Carica i dati
load ('DatiL2S6agosto.mat')

%Definisco l'orizzonte temporale e il vettore e1
orizzonte=150;
e1 = [1; zeros(99,1)];

%Definisco fi
fi=sum(PopFem)/sum(PopTot);

%Costruisco LF nxn

```

```

PrimaRigaLF = [zeros(1,14) (Fert'/1000)*fi zeros(1,49)];
LF=[PrimaRigaLF; diag(PxF) zeros(99,1)];

%Costruisco L nxn
L=[PrimaRigaLF; diag(PxT) zeros(99,1)];

%Costruisco d 1x(n-1)
d = [zeros(1,100)];
for i=15:50
d(1,i)=((1-fi)/fi)*PrimaRigaLF(1,i);
end

%Costruisco LM2 (n-1)xn
LM2=[diag(PxM) zeros(99,1)];

%ANDAMENTO DI TUTTA LA POPOLAZIONE COL MODELLO AD UN SESSO
AndamentoPopTot=[PopTot zeros(100,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    AndamentoPopTot(:,t+1) = L*AndamentoPopTot(:,t);
end

figure(1)
mesh(AndamentoPopTot)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%ANDAMENTO LOG DELLA POPOLAZIONE AD UN SESSO
AndamentoLogPopTot=log(AndamentoPopTot);
figure(2)
mesh(AndamentoLogPopTot)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%sezione di superficie per la 20esima classe
figure (3)
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTot(21,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 40esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTot(41,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 60esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTot(61,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

```

```

%sezione di superficie per la 80esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTot(81,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

legend('ventenni','quarantenni', 'sessantenni', 'ottantenni','location','northeast')

%Costruisco il vettore della popolazione totale 2nx2n
x = [PopFem; PopMas];

%costruisco LAMBDA 2nx2n
LAMBDA = [LF zeros(100); d zeros(1,100); zeros(99,100) LM2];

%Equazione di evoluzione della popolazione X
X=[x zeros(200,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    X(:,t+1) = LAMBDA*X(:,t);
end

%disegno la superficie dell'evoluzione della X (3D)
figure(4)
mesh(X)
xlabel('iterazioni')
ylabel('età')
zlabel('Numerosità')

%disegno l'evoluzione della popolazione femmine (2D)
XF = X(1:100, :);
ForecastF = [sum(XF)];
figure(5)
plot(ForecastF)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione femminile')

%disegno l'evoluzione della popolazione maschi (2D)
XM=[PopMas zeros(100,orizzonte)];
LM2bis=[zeros(1,100); LM2]; %manca la prima riga di zeri e la aggiungo
for t = 1:orizzonte
    XM(:,t+1) = LM2bis * XM(:,t) + ((1-fi)/fi) * e1 .* (LF * XF(:,t));
end
ForecastM = [sum(XM)];
figure(6)
plot(ForecastM)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione maschile')

%disegno l'evoluzione della popolazione totale (2D)
ForecastTot = ForecastF + ForecastM;
figure(7)
plot(ForecastTot)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione totale')

%costruisco LF50, matrice della femmine tagliata a 50 anni

```

```

PrimaRigaLF50 = [zeros(14,1); (Fert/1000)*fi]';
LF50 = [PrimaRigaLF50; diag(PxF(1:50)) zeros(50,1)];

%calcolo autovalore e autovettore di LF50
[Autovet,Autoval] = eigs(LF50);
    lambda0LF50 = Autoval(1,1)
    AutovettorediLF50 = Autovet(:,1);
    AutovettorediLF50= abs(AutovettorediLF50);

%calcolo autovalore e autovettore di LAMBDA
[Autovet,Autoval] = eigs(LAMBDA);
    lambda0 = Autoval(1,1);
    AutovettorediLAMBDA = Autovet(:,1);
    AutovettorediLAMBDA= abs(AutovettorediLAMBDA);

%ANDAMENTO RAPPORTO ATTIVI PENSIONATI
Attivi=sum(X(17:65,1))+sum(X(117:165,1));
Pensionati=sum(X(66:100,1))+sum(X(166:200,1));
RapportoAttPens=Attivi/Pensionati

RapportoAttPensF=sum(X(17:65,1))/sum(X(66:100,1))

RapportoAttPensM=sum(X(117:165,1))/sum(X(166:200,1))

AndamentoRapportoAttPens=[zeros(1,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    AndamentoRapportoAttPens(1,t) =
    (sum(X(17:65,t))+sum(X(117:165,t)))/(sum(X(66:100,t))+sum(X(166:200,t)
));
end

Attivilsesso=sum(AndamentoPopTot(17:65,1));
Pensionatilsesso=sum(AndamentoPopTot(66:100,1));
RapportoAttPenslsesso=Attivilsesso/Pensionatilsesso

AndamentoRapportoAttPenslsesso=[zeros(1,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    AndamentoRapportoAttPenslsesso(1,t) = (sum(AndamentoPop-
Tot(17:65,t)))/(sum(AndamentoPopTot(66:100,t)));
end

figure(8)
plot(AndamentoRapportoAttPenslsesso)
xlabel('Tempo')
ylabel('Rapporto attivi pensionati')
hold on

plot(AndamentoRapportoAttPens)
xlabel('Tempo')
ylabel('Rapporto attivi pensionati')
hold off

legend('Modello ad un sesso','Modello a due sessi','location','nor-
theast')

```

```

%CONFRONTO EVOLUZIONE DELLA POPOLAZIONE MODELLO 1 SESSO E MODELLO 2
SESSI
ForecastTot1Sex=sum(AndamentoPopTot);

figure (9)
plot(ForecastTot1Sex)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold on

plot(ForecastTot)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold off

legend('Modello ad un sesso','Modello a due sessi','location','nor-
theast')

%SCENARIO +45%

%Costruisco LF45 nxn
PrimaRigaLF45 = [zeros(1,14) (Fert'/1000)*fi.*1.45 zeros(1,49)];
LF45=[PrimaRigaLF45; diag(PxF) zeros(99,1)];

%Costruisco L nxn
L45=[PrimaRigaLF45; diag(PxT) zeros(99,1)];

%Costruisco d 1x(n-1)
d = [zeros(1,100)];
for i=15:50
d(1,i)=((1-fi)/fi)*PrimaRigaLF45(1,i);
end

%Costruisco LM245 (n-1)xn
LM245=[diag(PxM) zeros(99,1)];

%Costruisco il vettore della popolazione totale 2nx2n
x = [PopFem; PopMas];

%costruisco LAMBDA45 2nx2n
LAMBDA45 = [LF45 zeros(100); d zeros(1,100); zeros(99,100) LM245];

%Equazione di evoluzione della popolazione X45
X45=[x zeros(200,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
X(:,t+1) = LAMBDA45*X(:,t);
end

XF45 = X(1:100, :);
ForecastF45 = [sum(XF45)];

XM45=[PopMas zeros(100,orizzonte)];
LM2bis45=[zeros(1,100); LM245];
for t = 1:orizzonte
XM45(:,t+1) = LM2bis45 * XM45(:,t) + ((1-fi)/fi) * e1 .* (LF45 *
XF45(:,t));

```



```

end
ForecastM45 = [sum(XM45)];

%disegno l'evoluzione della popolazione totale +45 (2D)
ForecastTot45 = ForecastF45 + ForecastM45;
figure(10)
plot(ForecastTot45)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione totale')

%costruisco LF50, matrice della femmine tagliata a 50 anni
PrimaRigaLF5045 = [zeros(14,1); (Fert/1000)*fi*1.45]';
LF5045 = [PrimaRigaLF5045; diag(PxF(1:50)) zeros(50,1)];

%calcolo autovalore e autovettore di LAMBDA90
[Autovet,Autoval] = eigs(LAMBDA45);
lambda045 = Autoval(1,1)
AutovettorediLAMBDA45 = Autovet(:,1);
AutovettorediLAMBDA45= abs(AutovettorediLAMBDA45);

%SCENARIO +90%

%Costruisco LF90 nxn
PrimaRigaLF90 = [zeros(1,14) (Fert'/1000)*fi.*1.90 zeros(1,49)];
LF90=[PrimaRigaLF90; diag(PxF) zeros(99,1)];

%Costruisco L nxn
L90=[PrimaRigaLF90; diag(PxT) zeros(99,1)];

%Costruisco d 1x(n-1)
d = [zeros(1,100)];
for i=15:50
d(1,i)=(1-fi)/fi)*PrimaRigaLF90(1,i);
end

%Costruisco LM290 (n-1)xn
LM290=[diag(PxM) zeros(99,1)];

%Costruisco il vettore della popolazione totale 2nx2n
x = [PopFem; PopMas];

%costruisco LAMBDA90 2nx2n
LAMBDA90 = [LF90 zeros(100); d zeros(1,100); zeros(99,100) LM290];

%Equazione di evoluzione della popolazione X90
X90=[x zeros(200,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
X(:,t+1) = LAMBDA90*X(:,t);
end

XF90 = X(1:100, :);
ForecastF90 = [sum(XF90)];

XM90=[PopMas zeros(100,orizzonte)];
LM2bis90=[zeros(1,100); LM290];
for t = 1:orizzonte

```

```

        XM90(:,t+1) = LM2bis90 * XM90(:,t) + ((1-fi)/fi) * e1 .* (LF90 *
XF90(:,t));
end
ForecastM90 = [sum(XM90)];

%disegno l'evoluzione della popolazione totale +90% (2D)
ForecastTot90 = ForecastF90 + ForecastM90;
figure(11)
plot(ForecastTot90)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione totale')

%costruisco LF50, matrice della femmine tagliata a 50 anni
PrimaRigaLF5090 = [zeros(14,1); (Fert/1000)*fi*1.90]';
LF5090 = [PrimaRigaLF5090; diag(PxF(1:50)) zeros(50,1)];

%calcolo autovalore e autovettore di LAMBDA90
[Autovet,Autoval] = eigs(LAMBDA90);
    lambda090 = Autoval(1,1)
    AutovettorediLAMBDA90 = Autovet(:,1);
    AutovettorediLAMBDA90= abs(AutovettorediLAMBDA90);

MODELLO DI LESLIE CON 100 CLASSI DI ETÀ E DISTINTO PER SESSO, UNGHERIA
%carico i dati
load DatiHU1

%Definisco l'orizzonte temporale e il vettore e1
orizzonte=150;
e1 = [1; zeros(99,1)];

%Definisco fi
fiHU=sum(PopFemHU)/sum(PopTotHU);

%Costruisco LF nxn
PrimaRigaLFHU = [alfaHU*fiHU]';
LFHU=[PrimaRigaLFHU; diag(PxFHU) zeros(99,1)];

%Costruisco L nxn
LHU=[PrimaRigaLFHU; diag(PxTHU) zeros(99,1)];

%Costruisco d 1x(n-1)
dHU = [zeros(1,100)];
for i=15:50
    dHU(1,i)=((1-fiHU)/fiHU)*PrimaRigaLFHU(1,i);
end
    %Costruisco LM2 (n-1)xn
    LM2HU=[diag(PxMHU) zeros(99,1)];

%ANDAMENTO DI TUTTA LA POPOLAZIONE COL MODELLO AD UN SESSO
AndamentoPopTotHU=[PopTotHU zeros(100,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    AndamentoPopTotHU(:,t+1) = LHU*AndamentoPopTotHU(:,t);
end

figure(1)

```

```

mesh(AndamentoPopTotHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%ANDAMENTO LOG DELLA POPOLAZIONE AD UN SESSO
AndamentoLogPopTotHU=log(AndamentoPopTotHU);
figure(2)
mesh(AndamentoLogPopTotHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%sezione di superficie per la 20esima classe
figure(3)
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotHU(21,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 40esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotHU(41,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 60esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotHU(61,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 80esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotHU(81,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

legend('ventenni','quarantenni','sessantenni','ottantenni','location','northeast')

%Costruisco il vettore della popolazione totale 2nx2n
xHU = [PopFemHU; PopMasHU];

%costruisco LAMBDA 2nx2n
LAMBDABHU = [LFHU zeros(100); dHU zeros(1,100); zeros(99,100) LM2HU];

%Equazione di evoluzione della popolazione X
XHU=[xHU zeros(200,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    XHU(:,t+1) = LAMBDABHU*XHU(:,t);
end

```

```

%disegno la superficie dell'evoluzione della X (3D)
figure(4)
mesh(XHU)
xlabel('iterazioni')
ylabel('età')
zlabel('Numerosità')

%disegno l'evoluzione della popolazione femmine (2D)
XFHU = XHU(1:100, :);
ForecastFHU = [sum(XFHU)];
figure(5)
plot(ForecastFHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione femminile')

%disegno l'evoluzione della popolazione maschi (2D)
XMHU=[PopMashU zeros(100,orizzonte)];
LM2bisHU=[zeros(1,100); LM2HU]; %manca la prima riga di zeri e la ag-
giungo
for t = 1:orizzonte
    XMHU(:,t+1) = LM2bisHU * XMHU(:,t) + ((1-fiHU)/fiHU) * e1 .* (LFHU
* XFHU(:,t));
end
ForecastMHU = [sum(XMHU)];
figure(6)
plot(ForecastMHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione maschile')

%disegno l'evoluzione della popolazione totale (2D)
ForecastTotHU = ForecastFHU + ForecastMHU;
figure(7)
plot(ForecastTotHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione totale')

%costruisco LF50, matrice della femmine tagliata a 50 anni
PrimaRigaLF50HU = [alfaHU(1:51)*fiHU]';
LF50HU = [PrimaRigaLF50HU; diag(PxFHU(1:50)) zeros(50,1)];

%calcolo autovalore e autovettore di LF50
[Autovet,Autoval] = eigs(LF50HU);
lambda0LF50 = Autoval(1,1)
AutovettorediLF50HU = Autovet(:,1);
AutovettorediLF50HU= abs(AutovettorediLF50HU);

%calcolo autovalore e autovettore di LAMBDA
[Autovet,Autoval] = eigs(LAMBDABHU);
lambda0HU = Autoval(1,1);
AutovettorediLAMBDABHU = Autovet(:,1);
AutovettorediLAMBDABHU= abs(AutovettorediLAMBDABHU);

%ANDAMENTO RAPPORTO ATTIVI PENSIONATI
AttiviHU=sum(XHU(17:65,1))+sum(XHU(117:165,1));
PensionatiHU=sum(XHU(66:100,1))+sum(XHU(166:200,1));
RapportoAttPensHU=AttiviHU/PensionatiHU

```

```

AndamentoRapportoAttPensHU=zeros(1,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    AndamentoRapportoAttPensHU(1,t) =
        (sum(XHU(17:65,t))+sum(XHU(117:165,t)))/(sum(XHU(66:100,t))+sum(XHU(16
        6:200,t)));
end

figure(8)
plot(AndamentoRapportoAttPensHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Rapporto attivi pensionati')

%CONFRONTO EVOLUZIONE DELLA POPOLAZIONE MODELLO 1 SESSO E MODELLO 2
SESSI
ForecastTot1SexHU=sum(AndamentoPopTotHU);
figure(9)
plot(ForecastTot1SexHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold on

plot(ForecastTotHU)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold off

legend('Modello ad un sesso','Modello a due sessi','location','nor-
theast')

MODELLO DI LESLIE CON 100 CLASSI DI ETÀ E DISTINTO PER SESSO, EUROPA
%carico i dati
load DatiUE

%Definisco l'orizzonte temporale e il vettore e1
orizzonte=150;
e1 = [1; zeros(99,1)];

%Definisco fiUE
fiUE=sum(PopFemUE)/sum(PopTotUE);

%Costruisco LF nxn
PrimaRigaLFUE = [alfaUE*fiUE]';
LFUE=[PrimaRigaLFUE; diag(PxFUE) zeros(99,1)];

%Costruisco L nxn
LUE=[PrimaRigaLFUE; diag(PxTUE) zeros(99,1)];

%Costruisco d 1x(n-1)
dUE = [zeros(1,100)];
for i=15:50
    dUE(1,i)=(1-fiUE)/fiUE*PrimaRigaLFUE(1,i);
end

%Costruisco LM2 (n-1)xn
LM2UE=[diag(PxMUE) zeros(99,1)];

```

```

%ANDAMENTO DI TUTTA LA POPOLAZIONE COL MODELLO AD UN SESSO
AndamentoPopTotUE=[PopTotUE zeros(100,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    AndamentoPopTotUE(:,t+1) = LUE*AndamentoPopTotUE(:,t);
end

figure(1)
mesh(AndamentoPopTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%ANDAMENTO LOG DELLA POPOLAZIONE AD UN SESSO
AndamentoLogPopTotUE=log(AndamentoPopTotUE);
figure(2)
mesh(AndamentoLogPopTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%sezione di superficie per la 20esima classe
figure(3)
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(21,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 40esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(41,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 60esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(61,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 80esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(81,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

legend('ventenni','quarantenni','sessantenni','ottantenni','location','northeast')

%Costruisco il vettore della popolazione totale 2nx2n
xUE = [PopFemUE; PopMasUE];

%costruisco LAMBDA 2nx2n

```

```

LAMBDAUE = [LFUE zeros(100); dUE zeros(1,100); zeros(99,100) LM2UE];

%Equazione di evoluzione della popolazione X
XUE=[xUE zeros(200,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    XUE(:,t+1) = LAMBDAUE*XUE(:,t);
end

%disegno la superficie dell'evoluzione della X (3D)
figure(4)
mesh(XUE)
xlabel('iterazioni')
ylabel('età')
zlabel('Numerosità')

%disegno l'evoluzione della popolazione femmine (2D)
XFUE = XUE(1:100, :);
ForecastFUE = [sum(XFUE)];
figure(5)
plot(ForecastFUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione femminile')

%disegno l'evoluzione della popolazione maschi (2D)
XMUE=[PopMasUE zeros(100,orizzonte)];
LM2bisUE=[zeros(1,100); LM2UE]; %manca la prima riga di zeri e la ag-
giungo
for t = 1:orizzonte
    XMUE(:,t+1) = LM2bisUE * XMUE(:,t) + ((1-fiUE)/fiUE) * e1 .* (LFUE
* XFUE(:,t));
end
ForecastMUE = [sum(XMUE)];
figure(6)
plot(ForecastMUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione maschile')

%disegno l'evoluzione della popolazione totale (2D)
ForecastTotUE = ForecastFUE + ForecastMUE;
figure(7)
plot(ForecastTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione totale')

%costruisco LF50, matrice della femmine tagliata a 50 anni
PrimaRigaLF50UE = [alfaUE(1:51)*fiUE]';
LF50UE = [PrimaRigaLF50UE; diag(PxFUE(1:50)) zeros(50,1)];

%calcolo autovalore e autovettore di LF50
[Autovet,Autoval] = eigs(LF50UE);
lambda0LF50UE = Autoval(1,1)
AutovettorediLF50UE = Autovet(:,1);
AutovettorediLF50UE= abs(AutovettorediLF50UE);

%calcolo autovalore e autovettore di LAMBDA
[Autovet,Autoval] = eigs(LAMBDAUE);
lambda0UE = Autoval(1,1);

```

```

AutovettorediLAMBDAUE = Autovet(:,1);
AutovettorediLAMBDAUE= abs(AutovettorediLAMBDAUE);

%ANDAMENTO RAPPORTO ATTIVI PENSIONATI
AttiviUE=sum(XUE(17:65,1))+sum(XUE(117:165,1));
PensionatiUE=sum(XUE(66:100,1))+sum(XUE(166:200,1));
RapportoAttPensUE=AttiviUE/PensionatiUE

AndamentoRapportoAttPensUE=zeros(1,orizzonte);
for t = 1:orizzonte
    AndamentoRapportoAttPensUE(1,t) =
    (sum(XUE(17:65,t))+sum(XUE(117:165,t)))/(sum(XUE(66:100,t))+sum(XUE(166:200,t)));
end

figure(8)
plot(AndamentoRapportoAttPensUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Rapporto attivi pensionati')

%CONFRONTO EVOLUZIONE DELLA POPOLAZIONE MODELLO 1 SESSO E MODELLO 2 SESSI
ForecastTot1SexUE=sum(AndamentoPopTotUE);
figure(9)
plot(ForecastTot1SexUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold on

plot(ForecastTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold off

legend('Modello ad un sesso','Modello a due sessi','location','northeast')

CONFRONTO TRA LE TRE POPOLAZIONI PRESE IN CONSIDERAZIONE (ITALIA, UN-
GHERIA E UE)

%carico i dati
load DatiUE

%Definisco l'orizzonte temporale e il vettore e1
orizzonte=150;
e1 = [1; zeros(99,1)];

%Definisco fiUE
fiUE=sum(PopFemUE)/sum(PopTotUE);

%Costruisco LF nxn
PrimaRigaLFUE = [alfaUE*fiUE]';
LFUE=[PrimaRigaLFUE; diag(PxFUE) zeros(99,1)];

%Costruisco L nxn
LUE=[PrimaRigaLFUE; diag(PxTUE) zeros(99,1)];

```



```

%Costruisco d 1x(n-1)
dUE = [zeros(1,100)];
for i=15:50
dUE(1,i)=( (1-fiUE)/fiUE)*PrimaRigaLFUE(1,i);
end

%Costruisco LM2 (n-1)xn
LM2UE=[diag(PxMUE) zeros(99,1)];

%ANDAMENTO DI TUTTA LA POPOLAZIONE COL MODELLO AD UN SESSO
AndamentoPopTotUE=[PopTotUE zeros(100,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    AndamentoPopTotUE(:,t+1) = LUE*AndamentoPopTotUE(:,t);
end

figure(1)
mesh(AndamentoPopTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%ANDAMENTO LOG DELLA POPOLAZIONE AD UN SESSO
AndamentoLogPopTotUE=log(AndamentoPopTotUE);
figure(2)
mesh(AndamentoLogPopTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Classi di età')
zlabel('Numerosità')

%sezione di superficie per la 20esima classe
figure (3)
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(21,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 40esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(41,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 60esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(61,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')
hold on

%sezione di superficie per la 80esima classe
t=1:orizzonte;
plot(t,AndamentoLogPopTotUE(81,t))
xlabel('Iterazioni')
ylabel('Numerosità')

```

```

hold on

legend('ventenni','quarantenni', 'sessantenni', 'ottantenni','location','northeast')

%Costruisco il vettore della popolazione totale 2nx2n
xUE = [PopFemUE; PopMasUE];

%costruisco LAMBDA 2nx2n
LAMBDAUE = [LFUE zeros(100); dUE zeros(1,100); zeros(99,100) LM2UE];

%Equazione di evoluzione della popolazione X
XUE=[xUE zeros(200,orizzonte)];
for t = 1:orizzonte
    XUE(:,t+1) = LAMBDAUE*XUE(:,t);
end

%disegno la superficie dell'evoluzione della X (3D)
figure(4)
mesh(XUE)
xlabel('iterazioni')
ylabel('età')
zlabel('Numerosità')

%disegno l'evoluzione della popolazione femmine (2D)
XFUE = XUE(1:100, :);
ForecastFUE = [sum(XFUE)];
figure(5)
plot(ForecastFUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione femminile')

%disegno l'evoluzione della popolazione maschi (2D)
XMUE=[PopMasUE zeros(100,orizzonte)];
LM2bisUE=[zeros(1,100); LM2UE]; %mi manca la prima riga di zeri e la
aggiungo
for t = 1:orizzonte
    XMUE(:,t+1) = LM2bisUE * XMUE(:,t) + ((1-fiUE)/fiUE) * e1 .* (LFUE
* XFUE(:,t));
end
ForecastMUE = [sum(XMUE)];
figure(6)
plot(ForecastMUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione maschile')

%disegno l'evoluzione della popolazione totale (2D)
ForecastTotUE = ForecastFUE + ForecastMUE;
figure(7)
plot(ForecastTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Popolazione totale')

%costruisco LF50, matrice della femmine tagliata a 50 anni
PrimaRigaLF50UE = [alfaUE(1:51)*fiUE]';
LF50UE = [PrimaRigaLF50UE; diag(PxFUE(1:50)) zeros(50,1)];

```

```

%calcolo autovalore e autovettore di LF50
[Autovet,Autoval] = eigs(LF50UE);
    lambda0LF50UE = Autoval(1,1)
    AutovettorediLF50UE = Autovet(:,1);
    AutovettorediLF50UE= abs(AutovettorediLF50UE);

%calcolo autovalore e autovettore di LAMBDA
[Autovet,Autoval] = eigs(LAMBDAUE);
    lambda0UE = Autoval(1,1);
    AutovettorediLAMBDAUE = Autovet(:,1);
    AutovettorediLAMBDAUE= abs(AutovettorediLAMBDAUE);

%ANDAMENTO RAPPORTO ATTIVI PENSIONATI
AttiviUE=sum(XUE(17:65,1))+sum(XUE(117:165,1));
PensionatiUE=sum(XUE(66:100,1))+sum(XUE(166:200,1));
RapportoAttPensUE=AttiviUE/PensionatiUE

AndamentoRapportoAttPensUE=zeros(1,orizzonte);
for t = 1:orizzonte
    AndamentoRapportoAttPensUE(1,t) =
    (sum(XUE(17:65,t))+sum(XUE(117:165,t)))/(sum(XUE(66:100,t))+sum(XUE(166:200,t)));
end

figure(8)
plot(AndamentoRapportoAttPensUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Rapporto attivi pensionati')

%CONFRONTO EVOLUZIONE DELLA POPOLAZIONE MODELLO 1 SESSO E MODELLO 2
SESSI
ForecastTot1SexUE=sum(AndamentoPopTotUE);
figure(9)
plot(ForecastTot1SexUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold on

plot(ForecastTotUE)
xlabel('Tempo')
ylabel('Numerosità Popolazione')
hold off

legend('Modello ad un sesso','Modello a due sessi','location','northeast')

```

Appendice B

Dati utilizzati per l'Italia

I dati utilizzati per la popolazione italiana sono stati presi dal sito internet dell'ISTAT e si riferiscono al primo gennaio 2015.

<i>Età</i>	<i>Maschi</i>	ω^M	<i>Femmine</i>	ω^M	α_i	<i>Totale</i>	ω^T
0	255.201	0,99970	241.426	0,99974	0	496.627	0,99972
1	262.950	0,99981	248.844	0,99982	0	511.794	0,99981
2	275.239	0,99985	260.467	0,99987	0	535.706	0,99986
3	281.239	0,99988	265.671	0,99990	0	546.910	0,99989
4	289.249	0,99990	272.559	0,99992	0	561.808	0,99991
5	293.628	0,99991	277.093	0,99993	0	570.721	0,99992
6	296.227	0,99991	280.699	0,99993	0	576.926	0,99992
7	295.438	0,99991	278.773	0,99994	0	574.211	0,99993
8	295.982	0,99992	278.233	0,99994	0	574.215	0,99993
9	294.227	0,99992	275.852	0,99994	0	570.079	0,99993
10	295.734	0,99992	279.578	0,99994	0	575.312	0,99993
11	293.373	0,99991	276.852	0,99993	0	570.225	0,99992
12	291.089	0,99990	275.257	0,99993	0	566.346	0,99991
13	294.257	0,99987	277.250	0,99992	0	571.507	0,99989
14	299.617	0,99983	281.118	0,99991	0,00004	580.735	0,99987
15	293.550	0,99978	276.887	0,99990	0,00018	570.437	0,99984
16	295.050	0,99973	276.597	0,99988	0,00206	571.647	0,99980
17	294.871	0,99968	276.088	0,99987	0,004	570.959	0,99977
18	297.208	0,99964	277.181	0,99986	0,00714	574.389	0,99974
19	299.079	0,99961	277.427	0,99985	0,01229	576.506	0,99972
20	302.573	0,99959	283.343	0,99984	0,01776	585.916	0,99971
21	308.854	0,99957	291.898	0,99984	0,02192	600.752	0,99970
22	321.276	0,99956	305.266	0,99984	0,02771	626.542	0,99969
23	321.732	0,99954	306.839	0,99983	0,03417	628.571	0,99968
24	327.003	0,99953	313.850	0,99982	0,04095	640.853	0,99967
25	326.285	0,99952	316.413	0,99981	0,04953	642.698	0,99966
26	334.577	0,99953	325.254	0,99981	0,05812	659.831	0,99967
27	328.084	0,99953	321.104	0,99981	0,06806	649.188	0,99967
28	330.177	0,99952	324.206	0,99980	0,07677	654.383	0,99966
29	339.922	0,99949	336.391	0,99979	0,08339	676.313	0,99964
30	347.512	0,99946	343.049	0,99977	0,0908	690.561	0,99961
31	354.530	0,99944	349.708	0,99976	0,09458	704.238	0,99959
32	365.813	0,99941	363.075	0,99974	0,09404	728.888	0,99957
33	368.227	0,99938	366.609	0,99972	0,09221	734.836	0,99954
34	378.764	0,99933	374.608	0,99968	0,08698	753.372	0,99950

35	389.873	0,99929	388.394	0,99963	0,08015	778.267	0,99946
36	411.079	0,99925	409.124	0,99958	0,07151	820.203	0,99941
37	423.116	0,99920	422.880	0,99953	0,06008	845.996	0,99936
38	442.278	0,99915	441.836	0,99948	0,05033	884.114	0,99931
39	462.200	0,99909	463.028	0,99944	0,0394	925.228	0,99926
40	480.876	0,99902	482.171	0,99940	0,03008	963.047	0,99920
41	476.881	0,99892	480.230	0,99935	0,02085	957.111	0,99913
42	482.020	0,99880	484.998	0,99928	0,01367	967.018	0,99904
43	484.682	0,99866	491.408	0,99920	0,00814	976.090	0,99893
44	481.576	0,99852	486.943	0,99911	0,00463	968.519	0,99881
45	493.481	0,99836	500.978	0,99902	0,0026	994.459	0,99868
46	489.469	0,99818	498.083	0,99891	0,0015	987.552	0,99854
47	489.846	0,99798	501.601	0,99878	0,00094	991.447	0,99837
48	495.829	0,99775	504.570	0,99863	0,0004	1.000.399	0,99818
49	494.214	0,99750	503.781	0,99848	0,00033	997.995	0,99798
50	499.897	0,99724	511.320	0,99834	0,0006	1.011.217	0,99778
51	466.402	0,99697	482.580	0,99821	0	948.982	0,99758
52	449.360	0,99667	467.759	0,99805	0	917.119	0,99735
53	439.208	0,99636	459.258	0,99787	0	898.466	0,99710
54	424.635	0,99598	445.375	0,99763	0	870.010	0,99680
55	413.864	0,99554	435.109	0,99740	0	848.973	0,99645
56	393.429	0,99511	417.302	0,99716	0	810.731	0,99612
57	389.476	0,99461	413.197	0,99687	0	802.673	0,99573
58	380.815	0,99401	405.127	0,99657	0	785.942	0,99527
59	372.837	0,99339	397.886	0,99628	0	770.723	0,99482
60	365.694	0,99270	392.555	0,99596	0	758.249	0,99432
61	349.391	0,99182	373.310	0,99560	0	722.701	0,99370
62	341.925	0,99093	368.404	0,99520	0	710.329	0,99306
63	340.019	0,99003	367.108	0,99465	0	707.127	0,99233
64	351.647	0,98902	380.202	0,99408	0	731.849	0,99155
65	352.853	0,98789	382.095	0,99351	0	734.948	0,99071
66	365.954	0,98686	399.179	0,99305	0	765.133	0,98997
67	356.513	0,98586	389.678	0,99262	0	746.191	0,98927
68	353.361	0,98465	389.879	0,99194	0	743.240	0,98834
69	270.307	0,98305	301.552	0,99092	0	571.859	0,98705
70	274.863	0,98108	310.249	0,98972	0	585.112	0,98548
71	273.229	0,97859	314.221	0,98828	0	587.450	0,98355
72	268.116	0,97591	312.121	0,98677	0	580.237	0,98150
73	265.241	0,97340	313.651	0,98539	0	578.892	0,97961
74	286..729	0,97080	343.854	0,98385	0	630.583	0,97760
75	276.855	0,96827	336.575	0,98204	0	613.430	0,97549
76	261.618	0,96516	325.618	0,97976	0	587.236	0,97287

77	235.246	0,96080	299.512	0,97670	0	534.758	0,96925
78	212.123	0,95543	279.944	0,97285	0	492.067	0,96477
79	208.580	0,94930	281.909	0,96847	0	490.489	0,95967
80	192.218	0,94253	269.213	0,96358	0	461.431	0,95402
81	176.730	0,93481	256.103	0,95754	0	432.833	0,94735
82	159.050	0,92585	241.732	0,95059	0	400.782	0,93965
83	147.569	0,91641	233.681	0,94341	0	381.250	0,93166
84	138.878	0,90594	231.880	0,93522	0	370.758	0,92269
85	114.858	0,89393	200.554	0,92575	0	315.412	0,91239
86	99.208	0,88061	185.681	0,91477	0	284.889	0,90074
87	85.348	0,86538	169.006	0,90132	0	254.354	0,88689
88	70.169	0,84833	150.037	0,88597	0	220.206	0,87123
89	57.690	0,83131	131.488	0,87013	0	189.178	0,85534
90	46.820	0,81317	113.155	0,85275	0	159.975	0,83810
91	37.851	0,79265	96.782	0,83360	0	134.633	0,81890
92	28.613	0,77404	79.532	0,81659	0	108.145	0,80182
93	21.721	0,76024	64.623	0,80374	0	86.344	0,78917
94	16.055	0,74591	50.340	0,79159	0	66.395	0,77687
95	7.693	0,72486	25.752	0,77369	0	33.445	0,75860
96	4.132	0,69696	14.936	0,74329	0	19.068	0,72960
97	3.078	0,66179	11.913	0,70368	0	14.991	0,69183
98	2.552	0,62596	10.412	0,66544	0	12.964	0,65476
99	2.112	0,59504	9.189	0,63265	0	11.301	0,62292
Totale	29.498.489		31.278.028			60.776.517	

Dati utilizzati per l'Ungheria

I dati per la popolazione ungherese sono stati presi dal sito internet dell'EUROSTAT e si riferiscono al primo gennaio 2015.

<i>Classi di età</i>	<i>Maschi</i>	<i>Morti</i>	<i>Femmine</i>	<i>Morti</i>	<i>Nati</i>	<i>Totale</i>	<i>Morti</i>
0	47.610	215	45.245	168	0	92.855	383
1	46.053	18	43.623	19	0	89.676	37
2	46.992	8	43.979	13	0	90.971	21
3	45.351	10	42.917	10	0	88.268	20
4	46.184	12	44.211	2	0	90.395	14
5	49.830	6	47.301	2	0	97.131	8
6	51.055	4	48.746	2	0	99.801	6
7	50.133	9	47.744	5	0	97.877	14
8	52.010	9	49.523	7	0	101.533	16
9	50.692	9	47.517	8	0	98.209	17
10	48.658	5	46.025	1	0	94.683	6
11	48.380	6	45.872	3	0	94.252	9
12	49.580	3	47.095	5	0	96.675	8
13	49.878	6	47.101	3	0	96.979	9
14	50.351	11	47.530	6	0	97.881	17
15	48.780	12	46.065	4	276	94.845	16
16	50.014	14	47.744	5	649	97.758	19
17	52.637	18	49.211	8	1.135	101.848	26
18	56.741	26	53.699	10	1.622	110.440	36
19	60.119	37	57.087	12	2.000	117.206	49
20	61.563	45	58.769	13	2.221	120.332	58
21	62.421	33	59.526	12	2.443	121.947	45
22	64.621	32	60.838	8	2.518	125.459	40
23	66.814	37	62.893	15	2.813	129.707	52
24	65.421	39	62.145	26	3.368	127.566	65
25	63.793	35	59.827	17	3.511	123.620	52
26	63.088	44	59.113	14	3.964	122.201	58
27	62.687	52	58.915	21	4.659	121.602	73
28	62.719	55	59.784	21	5.256	122.503	76
29	63.262	58	60.154	23	5.714	123.416	81
30	60.112	55	58.344	19	5.807	118.456	74
31	60.797	46	59.336	14	5.663	120.133	60
32	64.522	54	62.261	20	5.650	126.783	74
33	68.285	69	67.327	31	5.441	135.612	100
34	71.599	97	70.514	32	5.176	142.113	129
35	76.850	95	75.384	44	4.840	152.234	139

36	80.395	102	78.730	50	4.175	159.125	152
37	84.614	117	82.527	47	3.810	167.141	164
38	88.480	135	85.772	77	2.959	174.252	212
39	92.180	166	89.754	73	2.352	181.934	239
40	87.851	179	85.989	78	1.791	173.840	257
41	74.163	182	72.732	89	1.023	146.895	271
42	73.089	163	71.685	84	613	144.774	247
43	71.868	199	70.559	108	329	142.427	307
44	72.699	224	71.639	120	143	144.338	344
45	73.040	257	71.853	133	84	144.893	390
46	72.433	322	72.479	148	29	144.912	470
47	68.896	375	69.384	181	10	138.280	556
48	62.722	354	63.069	169	2	125.791	523
49	59.950	453	60.896	194	4	120.846	647
50	58.758	459	60.191	242	6	118.949	701
51	57.490	545	59.692	259	0	117.182	804
52	55.138	569	58.285	273	0	113.423	842
53	57.926	598	62.090	344	0	120.016	942
54	59.896	740	64.932	371	0	124.828	1.111
55	59.098	832	65.717	378	0	124.815	1.210
56	61.250	924	68.438	473	0	129.688	1.397
57	62.453	1.084	70.554	540	0	133.007	1.624
58	69.234	1.195	79.890	623	0	149.124	1.818
59	73.747	1.396	85.575	714	0	159.322	2.110
60	75.537	1.610	88.602	860	0	164.139	2.470
61	67.632	1.634	80.967	874	0	148.599	2.508
62	59.225	1.487	72.719	884	0	131.944	2.371
63	58.228	1.565	73.643	893	0	131.871	2.458
64	58.465	1.676	73.552	907	0	132.017	2.583
65	54.674	1.745	70.016	982	0	124.690	2.727
66	52.125	1.647	68.403	966	0	120.528	2.613
67	48.983	1.610	65.082	1.092	0	114.065	2.702
68	41.954	1.575	56.656	1.061	0	98.610	2.636
69	39.086	1.391	54.939	969	0	94.025	2.360
70	43.154	1.610	61.480	1.148	0	104.634	2.758
71	38.307	1.762	55.830	1.311	0	94.137	3.073
72	37.296	1.683	56.629	1.311	0	93.925	2.994
73	33.196	1.651	51.696	1.398	0	84.892	3.049
74	31.414	1.661	52.148	1.504	0	83.562	3.165
75	27.614	1.656	47.456	1.641	0	75.070	3.297
76	25.474	1.662	46.003	1.755	0	71.477	3.417
77	22.760	1.720	43.432	1.806	0	66.192	3.526

78	20.472	1.625	41.026	1.950	0	61.498	3.575
79	19.645	1.648	38.987	2.047	0	58.632	3.695
80	18.235	1.722	36.657	2.279	0	54.892	4.001
81	16.957	1.764	35.050	2.482	0	52.007	4.246
82	15.017	1.606	32.926	2.565	0	47.943	4.171
83	13.274	1.669	29.487	2.781	0	42.761	4.450
84	12.146	1.582	28.171	2.892	0	40.317	4.474
85	10.089	1.456	23.721	2.870	0	33.810	4.326
86	8.161	1.394	21.172	2.781	0	29.333	4.175
87	6.569	1.207	17.605	2.606	0	24.174	3.813
88	5.494	1.076	15.767	2.579	0	21.261	3.655
89	4.483	978	13.431	2.371	0	17.914	3.349
90	3.372	766	9.982	2.115	0	13.354	2.881
91	2.789	703	8.611	1.881	0	11.400	2.584
92	2.123	587	7.080	1.654	0	9.203	2.241
93	1.642	475	5.317	1.395	0	6.959	1.870
94	1.136	342	3.817	1.053	0	4.953	1.395
95	802	295	2.440	824	0	3.242	1.119
96	309	132	970	382	0	1.279	514
97	230	65	622	235	0	852	300
98	158	47	471	185	0	629	232
99	129	39	435	111	0	564	150
Totale	4.695.779		5.158.795			9.854.123	

Dati utilizzati per l'Unione Europea

I dati per la popolazione europea sono stati presi dal sito internet dell'EUROSTAT e si riferiscono al primo gennaio 2015.

<i>Classi di età</i>	<i>Maschi</i>	<i>Morti</i>	<i>Femmine</i>	<i>Morte</i>	<i>Nati</i>	<i>Totale</i>	<i>Morti</i>
0	2.598.556	10.321	2.469.410	8.063	0	5.067.966	18.384
1	2.610.009	756	2.476.594	644	0	5.086.603	1.400
2	2.681.143	467	2.540.391	373	0	5.221.534	840
3	2.710.102	378	2.575.121	287	0	5.285.223	665
4	2.776.413	317	2.642.476	233	0	5.418.889	550
5	2.796.182	284	2.654.897	184	0	5.451.079	468
6	2.825.397	269	2.683.381	201	0	5.508.778	470
7	2.770.926	250	2.631.839	201	0	5.402.765	451
8	2.749.014	243	2.608.780	199	0	5.357.794	442
9	2.709.007	241	2.572.804	212	0	5.281.811	453
10	2.692.236	239	2.556.911	183	0	5.249.147	422
11	2.665.508	283	2.534.451	195	0	5.199.959	478
12	2.655.916	281	2.522.630	213	0	5.178.546	494
13	2.683.760	340	2.549.066	237	0	5.232.826	577
14	2.754.829	390	2.611.827	308	0	5.366.656	698
15	2.730.665	591	2.591.873	365	5.535	5.322.538	956
16	2.751.506	746	2.606.028	408	13.040	5.357.534	1.154
17	2.778.888	918	2.632.940	372	24.239	5.411.828	1.290
18	2.811.756	1.273	2.659.137	505	38.903	5.470.893	1.778
19	2.826.786	1.442	2.676.691	560	59.729	5.503.477	2.002
20	2.885.288	1.568	2.748.768	547	79.327	5.634.056	2.115
21	2.953.767	1.714	2.822.462	562	98.837	5.776.229	2.276
22	3.044.450	1.666	2.919.248	527	121.080	5.963.698	2.193
23	3.120.102	1.767	3.001.470	641	147.866	6.121.572	2.408
24	3.213.203	1.962	3.099.222	649	181.522	6.312.425	2.611
25	3.211.913	2.080	3.117.745	683	220.699	6.329.658	2.763
26	3.258.943	2.161	3.173.623	733	256.963	6.432.566	2.894
27	3.236.029	2.168	3.166.841	799	293.043	6.402.870	2.967
28	3.253.672	2.244	3.199.125	843	322.345	6.452.797	3.087
29	3.277.299	2.376	3.219.327	960	342.168	6.496.626	3.336
30	3.300.879	2.436	3.250.067	1.005	356.558	6.550.946	3.441
31	3.313.545	2.748	3.273.664	1.058	356.482	6.587.209	3.806
32	3.398.033	2.894	3.360.533	1.172	346.625	6.758.566	4.066
33	3.425.805	3.057	3.400.902	1.267	328.218	6.826.707	4.324
34	3.499.457	3.387	3.468.853	1.402	304.428	6.968.310	4.789

35	3.482.089	3.634	3.449.130	1.564	273.797	6.931.219	5.198
36	3.482.649	3.842	3.449.116	1.807	231.589	6.931.765	5.649
37	3.505.284	4.109	3.457.468	1.857	190.348	6.962.752	5.966
38	3.524.145	4.313	3.485.684	2.088	152.874	7.009.829	6.401
39	3.547.488	4.758	3.512.026	2.320	118.637	7.059.514	7.078
40	3.597.516	5.235	3.569.238	2.701	87.673	7.166.754	7.936
41	3.566.984	5.816	3.545.076	2.830	59.155	7.112.060	8.646
42	3.639.973	6.353	3.616.895	3.281	37.524	7.256.868	9.634
43	3.698.000	7.221	3.681.610	3.738	22.268	7.379.610	10.959
44	3.704.013	7.959	3.689.386	4.086	12.505	7.393.399	12.045
45	3.756.628	9.072	3.744.530	4.607	6.782	7.501.158	13.679
46	3.789.440	10.135	3.787.880	5.172	3.529	7.577.320	15.307
47	3.806.815	11.593	3.811.964	5.951	1.947	7.618.779	17.544
48	3.741.480	11.915	3.748.467	6.425	1.049	7.489.947	18.340
49	3.746.930	13.195	3.760.529	6.866	778	7.507.459	20.061
50	3.782.227	14.922	3.811.699	7.880	1.164	7.593.926	22.802
51	3.697.179	16.167	3.741.064	8.622	0	7.438.243	24.789
52	3.596.063	17.619	3.655.995	9.096	0	7.252.058	26.715
53	3.561.074	19.341	3.639.936	10.13	0	7.201.010	29.472
				1			
54	3.513.011	21.381	3.605.772	11.02	0	7.118.783	32.407
				6			
55	3.457.106	23.466	3.565.949	12.05	0	7.023.055	35.516
				0			
56	3.376.152	25.386	3.503.934	13.06	0	6.880.086	38.446
				0			
57	3.331.348	27.931	3.478.896	14.04	0	6.810.244	41.979
				8			
58	3.265.423	29.700	3.431.882	15.04	0	6.697.305	44.745
				5			
59	3.196.173	31.973	3.389.880	16.55	0	6.586.053	48.524
				1			
60	3.107.815	34.638	3.323.470	17.91	0	6.431.285	52.553
				5			
61	3.019.406	35.961	3.244.123	18.68	0	6.263.529	54.646
				5			
62	2.981.530	38.260	3.225.245	20.01	0	6.206.775	58.279
				9			
63	2.896.898	40.651	3.159.018	21.64	0	6.055.916	62.296
				5			
64	2.905.524	43.319	3.182.886	22.95	0	6.088.410	66.271
				2			
65	2.863.190	45.662	3.159.160	24.92	0	6.022.350	70.587
				5			
66	2.814.998	47.989	3.116.691	26.78	0	5.931.689	74.775
				6			

67	2.722.213	49.653	3.036.862	28.36 9	0	5.759.075	78.022
68	2.545.718	51.838	2.869.472	30.20 5	0	5.415.190	82.043
69	2.118.678	48.123	2.429.843	28.67 1	0	4.548.521	76.794
70	2.185.285	49.404	2.527.678	30.12 5	0	4.712.963	79.529
71	2.105.921	53.871	2.463.710	34.38 3	0	4.569.631	88.254
72	1.960.398	54.467	2.330.123	35.26 3	0	4.290.521	89.730
73	1.937.035	57.207	2.349.349	38.62 4	0	4.286.384	95.831
74	1.979.108	62.739	2.451.842	42.88 9	0	4.430.950	105.62 8
75	1.863.592	68.576	2.365.051	49.36 0	0	4.228.643	117.93 6
76	1.763.857	70.690	2.283.712	54.06 2	0	4.047.569	124.75 2
77	1.645.773	73.471	2.186.521	57.86 2	0	3.832.294	131.33 3
78	1.552.616	76.213	2.127.834	63.68 5	0	3.680.450	139.89 8
79	1.448.329	79.771	2.034.297	70.34 0	0	3.482.626	150.11 1
80	1.329.965	83.600	1.928.214	78.02 3	0	3.258.179	161.62 3
81	1.180.076	83.456	1.768.530	83.26 3	0	2.948.606	166.71 9
82	1.098.934	84.489	1.715.782	89.35 2	0	2.814.716	173.84 1
83	997.076	87.543	1.609.704	97.77 3	0	2.606.780	185.31 6
84	914.081	89.750	1.552.328	106.7 89	0	2.466.409	196.53 9
85	776.393	88.457	1.372.501	111.8 40	0	2.148.894	200.29 7
86	671.586	84.867	1.253.888	115.3 40	0	1.925.474	200.20 7
87	556.180	79.552	1.099.017	116.9 50	0	1.655.197	196.50 2
88	463.849	74.351	989.031	118.5 38	0	1.452.880	192.88 9
89	379.171	67.419	864.957	118.6 23	0	1.244.128	186.04 2
90	298.084	59.640	727.371	115.0 13	0	1.025.455	174.65 3
91	236.203	52.105	610.040	107.4 57	0	846.243	159.56 2

92	182.149	44.029	503.428	98.87 2	0	685.577	142.90 1
93	138.963	37.653	406.474	90.77 4	0	545.437	128.42 7
94	99.182	29.512	309.921	77.41 1	0	409.103	106.92 3
95	55.809	21.617	181.555	60.84 5	0	237.364	82.462
96	31.357	11.016	109.505	33.61 2	0	140.862	44.628
97	21.221	7.643	79.687	25.81 7	0	100.908	33.460
98	14.922	5.710	58.924	20.38 9	0	73.846	26.099
99	11.034	4.151	46.825	16.40 0	0	57.859	20.551
<i>Totale</i>	248.210.29 3		260.207.67 2,0			508.417.9 65	

APPENDICE C

Autovalori ed autovettori

Data A , matrice quadrata di ordine n , si dice che $\lambda \in \mathbf{R}$ (scalare) è un autovalore di A

se $\exists \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \bar{x} \neq 0$ tale che $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$

Quindi rappresentiamo i passaggi da seguire per la ricerca degli autovalori di A .

λ autovalore di A

1. se e solo se $\exists \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \bar{x} \neq 0$ tale che $A\bar{x} - \lambda\bar{x} = \bar{0}$
2. se e solo se $\exists \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \bar{x} \neq 0$ tale che $A\bar{x} - \lambda I_n \bar{x} = \bar{0}$

Dove $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, matrice unità.

e quindi $\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$, matrice diagonale i cui elementi non nulli sono tutti uguali a λ .

3. se e solo se $\exists \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \bar{x} \neq 0$ tale che $(A - \lambda I_n)\bar{x} = \bar{0}$

Riepilogando: λ è autovalore di A se e solo se $\exists \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \bar{x} \neq 0$ soluzione del sistema omogeneo

$$(A - \lambda I_n)\bar{x} = \bar{0}$$

con $(A - \lambda I_n)$ come matrice dei coefficienti.

Il $\det(A - \lambda I_n) = 0$ è la condizione che garantisce che il sistema ammette altre soluzioni oltre quella banale. Se invece fosse $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ sarebbe stato un sistema di Cramer con una sola soluzione e, dato che il sistema è omogeneo, sarebbe la sola soluzione banale.

Esempio in $\mathbf{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

λ è autovalore di A se e solo se $\det(A - \lambda I_2) = 0$

$$(A - \lambda I_2) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$$

$$P(\lambda) = \text{polinomio caratteristico di } A = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 4$$

$$\text{equazione caratteristica di } A: P(\lambda) = 0 \text{ e quindi } \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 4 = 0$$

$$\text{Da cui } \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{1} = 2 \pm \sqrt{5}$$

queste due radici sono gli autovalori di A .

Ora, $\forall_i$ i vettori $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, $\bar{x} \neq 0$ che risolvono $(A - \lambda I_n)\bar{x} = \bar{0}$ si dicono autovettori di λ_i .

In conclusione, $\lambda \in \mathbf{R}$ è autovalore di A se e solo se λ è radice dell'equazione caratteristica di A :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

per il teorema fondamentale dell'algebra ogni polinomio di grado n ammette sempre n radici, non necessariamente distinte e/o reali.

Sia λ autovalore di A , allora ogni vettore $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, $\bar{x} \neq 0$ tale che $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ prende il nome di autovettore associato a λ .

APPENDICE D

Conoscenze propedeutiche al teorema di Perron-Frobenius

Prima di fare ciò verranno fornite un insieme di conoscenze, teoremi e definizioni, propedeutiche alla comprensione.

Definizione (grafo)

Un grafo è una struttura matematica che permette di mettere in relazione elementi di un insieme.

Sia V un insieme di elementi, detti nodi o vertici del grafo.

Siano dati due elementi $v, w \in V$.

Se questi sono in relazione allora si dice che esiste un arco da v a w .

Si definisce grafo orientato G una coppia (V, E) dove V è un insieme e $E \subseteq V \times V$.

Gli elementi di V sono detti nodi o vertici e quelli di E sono detti archi.

Una n -upla di vertici $(v_0, \dots, v_m)$ si dice percorso da v_0 a v_m se $\forall i = 1, 2, \dots, m \exists (v_{i-1}, v_i) \in E$.

Data una matrice non negativa $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ ($A \geq 0$), il grafo orientato $\Gamma(A)$, associato alla matrice A , è definito così: $V := \{1, 2, \dots, n\}$, e $(i, j) \in E$ se e solo se $a_{ij} > 0$.

Definizione (grafo fortemente connesso)

Un grafo orientato si dice fortemente connesso se per ogni coppia $v, w \in V$ esiste un percorso da v a w .

Esempio 1

Sia

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix},$$

allora il grafo associato è

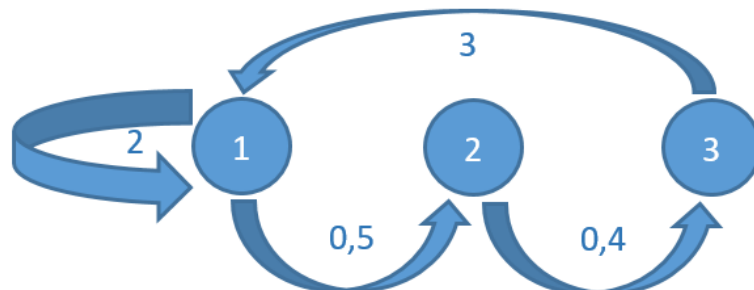


Figura 50: esempio di grafo per una matrice di Leslie

Vediamo che dalla classe 1 c'è una freccia che va verso la classe 2 questa rappresenta la probabilità con cui un individuo della classe 1 raggiunge la classe successiva; la freccia invece che dalla

classe 1 ritorna alla classe 1 rappresenta i nuovi individui della classe 1 generati dagli individui già esistenti nella classe, non significa che alcuni individui esistenti rimangono nella stessa classe perché questi invecchiano necessariamente e, in questo caso, con una probabilità di 0,5 sopravvivono alla classe 1. Dalla classe 2 arriviamo alla classe 3 con probabilità 0,4 e infine gli individui della classe 3, ormai giunti all'età estrema, decedono ma producono 3 nuovi individui della classe 1.

Esempio 2

Sia

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

allora il grafo associato è

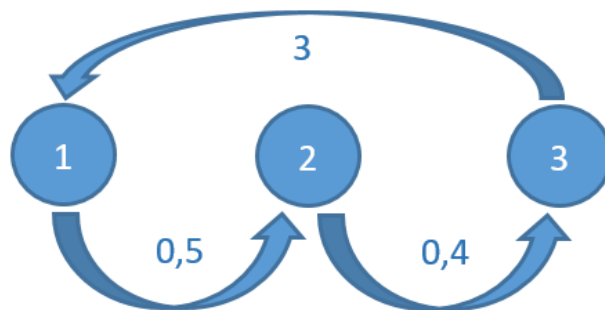


Figura 51: esempio di grafo per una matrice di Leslie

Vediamo che dalla classe 1 c'è una freccia che va verso la classe 2, questa rappresenta la probabilità con cui un individuo della classe 1 raggiunge la classe successiva. Dalla classe 2 arriviamo alla classe 3 con probabilità 0,4 e infine gli individui della classe 3, ormai giunti all'età estrema, decedono ma, prima di farlo, producono 3 nuovi individui della classe 1.

Esempio 3

Sia

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix},$$

allora il grafo associato è

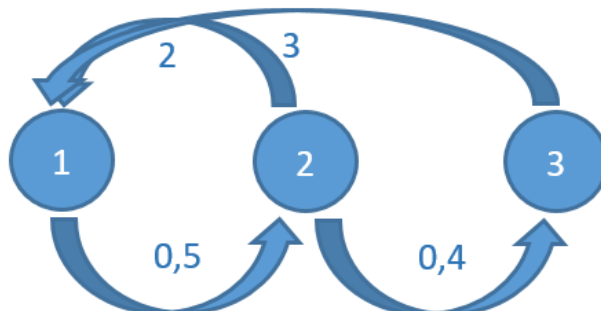


Figura 52: esempio di grafo per una matrice di Leslie

Vediamo che dalla classe 1 si arriva alla classe 2 con una probabilità di 0,5. Dalla classe 2 arriviamo alla classe 3 con probabilità 0,4 e gli individui della classe 2 generano due individui della classe 1, per questo c'è una freccia con scritto 2 che va da 2 a 1. Infine gli individui della classe 3, ormai giunti all'età estrema, decedono ma producono 3 nuovi individui della classe 1.

Infine possiamo mostrare il grafo per la matrice di transizione del modello di Leslie con n classi di età.

La matrice è quella della sezione 3.1 (3.1.1) ed ha il seguente grafo

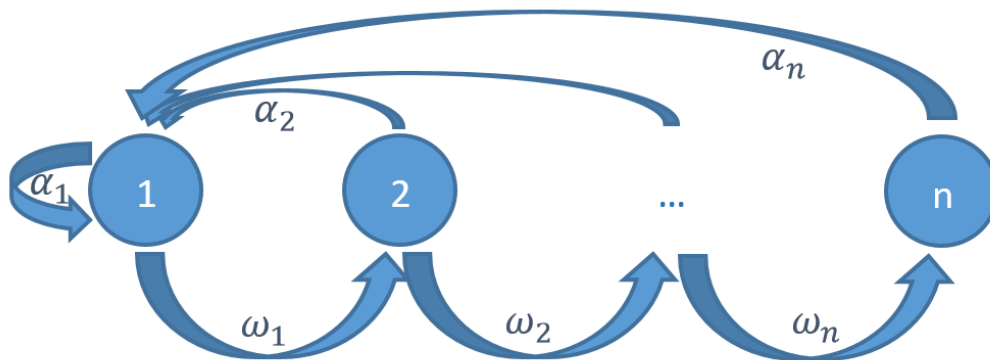


Figura 53: grafo per una matrice di Leslie ad n classi di età

I tassi di fertilità nella declinazione pratica del modello non saranno tutti positivi ma dipendenti dai momenti fertili dell'individuo e, successivamente nel modello strutturato per sesso, verrà anche distinto tra individui fertili e non fertili.

È d'uopo notare che risulta estremamente importante che α_n sia positivo, affinché la matrice sia strettamente connessa.

Avere α_n positivo di fatto permette il ritorno alla classe 1 e quindi, permette il raggiungimento di qualsiasi classe j partendo da una classe i , fissata arbitrariamente.

Dalla forte connessione del grafo possiamo introdurre un ulteriore concetto.

Definizione (matrice irriducibile)

Una matrice A quadrata si dice irriducibile se il grafo $\Gamma(A)$ è fortemente connesso.

Cioè se tutti i suoi stati comunicano tra loro; quindi, per ogni coppia di nodi (i, j) con $i, j = 1, 2, \dots, n$ esiste un percorso che conduce da i a j .

Indice delle figure

Tutte le figure, ad eccezione della 32 e 48, sono state elaborate personalmente.

Figura 1: Nati per anno di nascita	12
Figura 2: Onda demografica della popolazione residente in Italia	13
Figura 3: Struttura per età della popolazione 1861-2011.....	14
Figura 4: superstiti maschi per classi di età 1899-2014	14
Figura 5: esempio 1 della condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità del modello di Bernadelli	21
Figura 6: esempio 2 sulla condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità del modello di Bernadelli	21
Figura 7: esempio negativo sulla condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità del modello di Bernadelli	22
Figura 9: esempio di equilibrio del modello di Bernadelli	28
Figura 8 “rappresentazione grafica della funzione $q(\lambda)$ in $\mathbf{R}^3$ ”	29
Figura 10: rappresentazione grafica del $\ln x_i(t)$	31
Figura 11: rappresentazione dell’equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 2.132$	32
Figura 12: rappresentazione dell’equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 0.843$	33
Figura 13: rappresentazione dell’equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 1.221$	35
Figura 14: rappresentazione dell’equilibrio demografico in forma semilogaritmica per $\lambda_0 = 0,300$	36
Figura 15: intuizioni sulla convergenza all’equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_1	38
Figura 16: intuizioni sulla convergenza all’equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_2	39
Figura 17: intuizioni sulla convergenza all’equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_3	39
Figura 18: intuizioni sulla convergenza all’equilibrio in funzione dei parametri α per la matrice L_4	40
Figura 19: condizione necessaria e sufficiente: se $\lambda_0 > 1$ allora $q(1) > 1$	48
Figura 20: condizione necessaria e sufficiente: se $\lambda_0 < 1$ allora $q(1) < 1$	48
Figura 21: valutazione di uno spostamento verso nord est di $q(\lambda_0)$	49
Figura 22: rappresentazione dell’evoluzione della popolazione italiana con dati ISTAT riferiti al 2015.....	55
Figura 23: rappresentazione dell’evoluzione semilogaritmica della popolazione italiana con dati ISTAT riferiti al 2015	55
Figura 24: rappresentazione dell’evoluzione semilogaritmica di quattro diverse classi di età con dati ISTAT riferiti al 2015	56
Figura 25: stima dell'evoluzione della popolazione italiana mediante il modello di Leslie distinto per sesso.....	73
Figura 26: stima dell'evoluzione della popolazione femminile italiana mediante il modello di Leslie distinto per sesso	73

Figura 27: stima dell'evoluzione della popolazione maschile italiana mediante modello di Leslie distinto per sesso	74
Figura 28: stima dell'evoluzione della popolazione totale italiana mediante modello di Leslie distinto per sesso	74
Figura 29: Scenario 1: incremento dei tassi di fertilità del 45% e quindi con $\lambda_0 = 1.0000$	76
Figura 30: Scenario 2: incremento dei tassi di fertilità del 90% e quindi con $\lambda_0 = 1.0085$	76
Figura 31: confronto del numero medio di figli per donna in Italia, in Ungheria ed in Europa ..	78
Figura 32: spesa per tipo di sostegno alle famiglie in percentuale del PIL (2013) aggiornato al 2017.....	79
Figura 33: confronto tra l'evoluzione della popolazione totale italiana col modello di Leslie ad un sesso e modello di Leslie a due sessi.....	81
Figura 33bis: confronto tra l'evoluzione della popolazione totale italiana col modello di Leslie ad un sesso e modello di Leslie a due sessi.....	812
Figura 34: sezioni della superficie dell'andamento demografico logaritmico della popolazione italiana per il modello di Leslie non distinto per sesso	812
Figura 34bis: Andamento del rapporto attivi pensionati in Italia	83
Figura 35: confronto tra il rapporto attivi pensionati del modello a due sessi e ad un sesso	84
Figura 36: andamento della popolazione totale ungherese stimato col modello di Leslie distinto per sesso.....	85
Figura 37: andamento del rapporto attivi pensionati in Ungheria stimato col modello di Leslie distinto per sesso	86
Figura 38: Superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione ungherese per il modello di Leslie non distinto per sesso	86
Figura 39: sezioni della superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione ungherese per il modello di Leslie non distinto per sesso	87
Figura 40: superficie dell'andamento demografico della popolazione ungherese per il modello di Leslie distinto per sesso	87
Figura 41: confronto dell'andamento della popolazione totale ungherese stimato col modello di Leslie distinto e non distinto per sesso	88
Figura 42: andamento della popolazione totale europea stimato col modello di Leslie distinto per sesso.....	89
Figura 43: andamento del rapporto attivi pensionati europeo stimato col modello di Leslie distinto per sesso	89
Figura 44: superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione europea per il modello di Leslie non distinto per sesso	90
Figura 45: sezioni della superficie dell'andamento demografico semilogaritmico della popolazione europea per il modello di Leslie non distinto per sesso.....	90
Figura 46: superficie dell'andamento demografico della popolazione europea per il modello di Leslie distinto per sesso	91
Figura 47: confronto dell'andamento del rapporto attivi pensionati europeo, italiano ed ungherese stimato col modello di Leslie distinto per sesso	92
Figura 48: aspettative di vita alla nascita nel 2017	93
Figura 49: confronto dell'andamento della popolazione totale europea, italiana ed ungherese stimato col modello di Leslie distinto per sesso	94
Figura 50: esempio di grafo per una matrice di Leslie	128
Figura 51: esempio di grafo per una matrice di Leslie	129

Figura 52: esempio di grafo per una matrice di Leslie	129
Figura 53: grafo per una matrice di Leslie ad n classi di età	130

Indice delle tabelle

Tutte le tabelle sono state elaborate personalmente.

Tabella 1: equilibrio ed equilibrio della distribuzione per età	24
Tabella 2: andamento della numerosità della popolazione in funzione di λ_0	37
Tabella 3: dati indicativi degli incentivi alla famiglia in Ungheria ed in Italia	80

Bibliografia

1. A. Attias, M. F. Arezzo, A. Pianese, Z. Varga, *A comparison of two legislative approaches to the pay-as-you-go pension system in terms of adequacy*. The Italian case. Insurance: Mathematics and Economics. Volume 68, May 2016, pp. 203–211.
2. A. Pianese, A. Attias and Z. Varga, *Dynamic immigration control improving inverse old-age dependency ratio in a pay-as-you-go pension system*. Decision Support Systems, Volume 64, August 2014, pp. 109–117.
3. F. R. Gantmacher, *the theory of matrices, volume one*, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.
4. G. Frobenius, *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, ETH-Bibliothek Zürich, Berlino, 1912, pp. 456–477.
5. H. Bernadelli, *Population waves*. J. Burma Res. Soc., 31, No 1, 1941, pp. 1-18.
6. H. Caswell, *Matrix population models: construction analysis and interpretation*. Sinauer Ass. Inc. Publ. Sunderland Massachusetts, 1989.
7. ISTAT, *il futuro demografico del paese, previsioni regionali della popolazione residente al 2065*, 26 aprile 2017.
8. ISTAT, *natalità e fecondità della popolazione residente*, 28 novembre 2016.
9. M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Dinamiche demografiche e stabilità dei sistemi pensionistici a ripartizione: un approccio metodologico mediante il modello di Leslie*. XXVIII Convegno AMASES. Modena, Italia, 8 - 12 settembre, 2004. Abstracts pp. 64-65.
10. M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Demographic dynamics for the pay-as-you-go pension system*. Pure Mathematics and Applications 15 (4), 2004, pp. 357-374.
11. M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Dynamic analysis of the effect of immigration on the demographic background of the pay-as-you-go pension system*. MAF 2010 - Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance, Ravello, Italy, 7 - 9 April 2010, Abstracts, pp. 6 – 7.
12. M. Angrisani, A. Attias, S. Bianchi, Z. Varga, *Sustainability of a Pay-As-You-Go Pension System by Dynamic Immigration Control*. Applied Mathematics and Computation, 219, 2012, pp. 2442–2452.
13. M. Angrisani, C. Di Palo, R. Fantaccione, A.M. Palazzo, *The Leslie model population stability: an application*, REASER, Vol 6, N. 2, 2013.
14. M. Angrisani, C. Di Palo, *The Leslie model modified for fertility and immigration: the inefficiency of immigration-based population stabilization*, Current politics and economics of Europe, Vol 27, N. 1, 2016
15. M. Angrisani, C. Di Paolo, *Controlling a demographic wave in defined contribution pension system*. In PURE MATHEMATICS AND APPLICATIONS – ISSN:1788-800X vol. 25 (1), Pp. 1-18, (2015).
16. O. Perron, *Zur Theorie der Matrizen*, Mathematische Annalen, Volume 64, 1907, pp. 248–263.
17. P. H. Leslie, *On the use of matrices in certain population mathematics*, Biometrika, 33, No 3, 1945, pp. 183-212.
18. P. H. Leslie, *Some further notes on the use of matrices in certain population mathematics*, Biometrika, 35, No 3-4, 1948, pp. 213-245.
19. R. Kuczynski, *the measurement of population Growth*, London, 1935;
20. R. Lenzi, *una specificazione del tasso lordo (o netto) di riproduzione per ordine di nascita*, Genus, Vol. 36, No. 3/4 (LUGLIO-DICEMBRE 1980), pp. 141-152

Sitografia

1. http://www.logicaprevidenziale.it/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=76:sostenibilita-del-sistema-pensionistico-italiano-e-in-arrivo-londa-demografica&catid=34:editoriali-novembre-2011&Itemid=2
2. https://www.corriere.it/economia/17_novembre_26/pensioni-squilibrio-italiano-88-miliardi-b9a8e64c-d2e5-11e7-913f-5fffae015d00.shtml
3. http://www.logicaprevidenziale.it/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=76:sostenibilita-del-sistema-pensionistico-italiano-e-in-arrivo-londa-demografica&catid=34:editoriali-novembre-2011&Itemid=2
4. <http://www.oecd.org/els/family/database.htm>
5. <https://www.lifesitenews.com/news/hungary-sees-abortion-numbers-plunge-with-rise-of-pro-family-policies>
6. <https://data.oecd.org/healthstat/life-expectancy-at-birth.htm>
7. http://algebra.math.ust.hk/eigen/05_multiplicity/lecture3.shtml
8. https://www.termometropolitico.it/1208792_2015_speranza_di_vita.html
9. https://www.ksh.hu/docs/eng/xstadat/xstadat_annual/i_wnt001b.html