



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE, AZIENDALI, MATEMATICHE E
STATISTICHE "BRUNO DE FINETTI"

Corso di Laurea Magistrale in Scienze statistiche e attuariali

**La stabilità finanziaria dei sistemi pensionistici a
contributi nozionalmente definiti: risultati teorici e
un'applicazione al sistema italiano**

Candidato:
Michele Moser

Relatore:
Prof. ssa Liviana Picech

Correlatore:
Prof. Renato Pelessoni

Indice

1	Concetti di base dei Fondi Pensione	5
1.1	I fondi pensione	5
1.2	Il metodo di calcolo contributivo	8
1.3	Parametri di calcolo	10
1.3.1	Il tasso di rendimento nozionale	10
1.3.2	Il coefficiente di conversione in rendita	13
1.3.3	Il tasso di rivalutazione delle pensioni	14
1.3.4	Aliquota contributiva	15
1.3.5	Requisiti per il pensionamento	15
2	Modelli multistato per i fondi pensione	17
2.1	I modelli multistato	17
2.2	Catene di Markov non omogenee	20
2.3	Valori attuariali	24
2.3.1	Pagamenti associati a transizioni	28
2.3.2	Modelli selezionati	29
2.3.3	Valori attuariali e Probabilità imprecise	31
2.4	Modelli a tempo continuo	35
2.5	Valori attuariali nel continuo	39
2.6	Valutazione di un fondo pensioni	41
2.6.1	Valori attuariali di contributi e oneri	45
2.6.2	Valori approssimati	46
3	Stazionarietà ed equilibrio dei sistemi NDC	49
3.1	Popolazione attiva e beneficiaria	49
3.2	Valor medio di oneri e contributi	53
3.3	Equilibrio in uno stato stazionario	56
3.4	Non equilibrio a breve termine: un esempio	61
3.5	Stabilità in un contesto reale	63

4	Gli ABM: un problema di ottimizzazione	67
4.1	Meccanismi di bilanciamento automatico	67
4.2	Formulazione come problema di ottimizzazione	69
4.2.1	Funzione obiettivo	70
4.2.2	Vincoli	71
4.2.3	Problema di ottimizzazione	72
4.3	Applicazione al sistema italiano	73
4.3.1	Dati e assunzioni	74
4.4	Risultati nello scenario base	79
4.4.1	Doppio aggiustamento	84
4.5	Sensibilità allo scenario economico-demografico	85
4.6	Sensibilità ai fattori della funzione di perdita	89
5	Conclusioni e aspetti critici	93
A		95

Introduzione

I sistemi pensionistici, almeno come li conosciamo oggi, sono un fenomeno piuttosto recente, nato nella seconda metà dell'Ottocento con l'obiettivo di combattere la povertà fra gli operai anziani divenuti ormai inabili al lavoro in fabbrica. La natura dei primi sistemi pensionistici era ben diversa da quella dei sistemi attuali: la prima cassa di previdenza obbligatoria, introdotta nel 1889 in Germania per alcune fasce di lavoratori dal reddito sotto una certa soglia, garantiva una pensione - seppur modesta - agli ultra settantenni solo a patto che la loro capacità lavorativa fosse ridotta a meno di un terzo del normale. Dunque il carattere era prevalentemente assicurativo e non "di risparmio".

Il vero salto di qualità degli schemi pensionistici avvenne nel secondo Dopoguerra, negli anni del boom economico. La rapida crescita demografica rese particolarmente convenienti gli schemi a ripartizione, in cui le pensioni sono finanziate in modo diretto dai contributi dei lavoratori, mentre vennero progressivamente abbandonati gli schemi a capitalizzazione. La crescita allo stesso tempo dei salari e della forza lavoro rese possibile un sensibile aumento dei benefici e della platea dei beneficiari, con la diminuzione dell'età pensionabile. Gli schemi previdenziali persero il loro carattere di assicurazione contro il rischio di inabilità al lavoro, diventando una forma di risparmio: si affermò il concetto - totalmente nuovo - che tutti i lavoratori potessero ritirarsi in pensione dopo una certa età o semplicemente dopo un certo numero di anni di lavoro.

Quando nacque, questo concetto di sistema pensionistico "di massa" aveva un costo limitato: una piccola quota dello stipendio dei lavoratori finanziava l'intero sistema. Nel giro di pochi decenni, alla fine degli anni Ottanta, "esplose" il costo del sistema e la stabilità finanziaria del sistema venne messa presto a dura prova dalla concomitanza di più fattori: l'aumento dell'aspettativa di vita, il rallentamento dell'economia e il crollo delle nascite.

Per questo motivo negli ultimi venti-trent'anni tutti i paesi europei hanno varato riforme dei loro sistemi pensionistici e l'Italia non fa eccezione.

In particolare l'Italia ha scelto di adottare con la riforma Dini del 1995 il metodo di calcolo contributivo (anche detto a contributi nozionalmente definiti - NDC) come soluzione definitiva per la stabilità del sistema pensionistico pubblico. A venticinque anni dalla riforma Dini, questa tesi cerca di rispondere ad alcune domande: si tratta veramente di una soluzione definitiva per la stabilità finanziaria? Le pensioni, così calcolate, saranno adeguate agli standard di vita futuri? Quali correttivi potrebbero essere posti per conciliare l'esigenza di stabilità finanziaria e di adeguatezza sociale?

Nel primo capitolo inquadreremo il problema, richiamando alcuni concetti fondamentali di Tecnica attuariale dei Fondi pensione, focalizzandoci sulla regola di calcolo delle pensioni in Italia.

Nel secondo capitolo parleremo dei modelli multistato, come strumento per la creazione di basi tecniche per i fondi pensione, che saranno di grande aiuto nei due capitoli seguenti.

Nel terzo capitolo troveremo delle condizioni sufficienti per la stabilità finanziaria di un fondo pensioni a contributi nozionalmente definiti. Mostreremo, tuttavia, che si tratta di condizioni spesso irrealistiche.

Nell'ultimo capitolo proporremo un possibile correttivo, un meccanismo di bilanciamento automatico, che attraverso l'adeguamento dei parametri di calcolo delle pensioni garantisca da un lato la sostenibilità finanziaria del sistema, dall'altro rate di pensione adeguate.

Capitolo 1

Concetti di base dei Fondi Pensione

In questo capitolo introdurremo formalmente i fondi pensione, in particolare esamineremo i parametri utilizzati per determinare l'ammontare della rata di pensione in un sistema a contributi nozionalmente definiti, focalizzando l'attenzione sulla regola di calcolo italiana. Esamineremo, inoltre, gli effetti che comporta la modifica di tali parametri.

Per la redazione di questo capitolo sono stati consultati principalmente gli appunti del corso di Tecnica attuariale dei fondi pensione, tenuto dalla prof.ssa Liviana Picech, il sito dell'Inps e il sito *www.pensioniooggi.it*.

1.1 I fondi pensione

Consideriamo una collettività di lavoratori per i quali sussista l'obbligo di adesione a un fondo pensioni, ovvero a un'istituzione finanziaria che raccoglie e amministra contributi versati dai lavoratori (o a loro favore dal datore di lavoro) al fine di fornire ai partecipanti un reddito al momento in cui cessano l'attività lavorativa per invalidità, vecchiaia o altra causa. In base al regolamento del fondo possono essere erogate prestazioni anche ai familiari superstiti degli attivi e dei pensionati deceduti. In questi casi si parla, rispettivamente, di pensione indiretta e di reversibilità.

Nel seguito chiameremo gruppo degli attivi (o assicurati) gli iscritti al fondo pensione. Nei casi più comuni si tratta dell'insieme dei lavoratori dipendenti di un'azienda o di un certo settore, di una categoria professionale oppure di tutti i lavoratori dipendenti di un certo paese (Assicurazione Generale Obbligatoria).

Un fondo pensioni svolge, dunque, un'attività di intermediazione tecnica

e finanziaria tra coloro che pagano i contributi (assicurati e/o datori di lavoro) e i beneficiari delle prestazioni (pensionati).

I contributi sono generalmente calcolati proporzionalmente allo stipendio, in base a un'aliquota detta premio. Nel seguito supporremo che i contributi siano pagati annualmente e anticipatamente, all'inizio di ogni anno. Denotando con $P(t)$ il premio in vigore l'anno t e con $s(t)$ il salario di un attivo, i contributi dovuti per l'epoca t sono pari a

$$c(t) = P(t)s(t)$$

Generalmente si richiede che un fondo pensioni soddisfi la condizione di equilibrio attuariale, ovvero che all'inizio della gestione il valore attuale medio delle prestazioni che saranno erogate dal fondo sia uguale al valore attuale medio dei contributi che verranno versati.

La condizione di equilibrio attuariale può essere posta a livello individuale, secondo il meccanismo classico delle assicurazioni private sulla durata di vita. In questo caso ogni assicurato versa i contributi in modo da coprire il valore attuariale della propria pensione (e dell'eventuale nucleo superstite), grazie a un meccanismo di mutualità tra assicurati omogenei per profilo di rischio. Tuttavia nell'ambito dei fondi pensione si adotta spesso una condizione di equilibrio a livello collettivo. Si tratta di una condizione più debole e implicata dalla precedente. In questo caso si introduce un meccanismo di solidarietà tra gli assicurati di diverse classi di rischio, che sussiste grazie all'obbligatorietà dell'adesione al fondo.

Al fine di soddisfare l'equilibrio attuariale risulta fondamentale stabilire:

- la regola di calcolo delle pensioni
- il sistema finanziario di gestione, ovvero la modalità con cui vengono calcolati e impiegati i contributi in modo da garantire la condizione di equilibrio attuariale

I sistemi finanziari di gestione sono distinti in sistemi a capitalizzazione e a ripartizione. Nel primo caso i contributi degli attivi vengono man mano investiti e accumulati a riserva. Le prestazioni in favore dei pensionati saranno poi pagate, attingendo alla riserva.

Nei sistemi a ripartizione, invece, i contributi versati in ogni esercizio sono direttamente impiegati per pagare gli oneri relativi allo stesso anno, senza formazione di riserva. E' questo il sistema generalmente adottato nell'ambito della previdenza obbligatoria.

In particolare, nell'ipotesi che venga applicata la stessa aliquota contributiva $P(t)$ a tutti gli assicurati, la condizione di equilibrio sottostante i sistemi a ripartizione pura è la seguente:

$$P(t)S(t) = B(t) \quad (1.1)$$

dove $S(t)$ e $B(t)$ sono rispettivamente la massa complessiva dei salari e degli oneri relativi all'anno t .

Chiameremo *premio di equilibrio* $P_{eq}(t)$ per l'anno t il premio che garantisce la condizione di equilibrio (1.1), ovvero

$$P_{eq}(t) = \frac{B(t)}{S(t)} \quad (1.2)$$

I premi di equilibrio garantiscono l'equilibrio attuariale: se $P(t) = P_{eq}(t)$ per ogni t , allora

$$\sum_{t=0}^n P(t)S(t)v^t - B(t)v^t = \sum_{t=0}^n (P(t)S(t) - B(t))v^t = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Dove n sono gli anni di gestione del fondo considerati nella valutazione.

Ponendo per il generico anno t

$b(t)$ la rata media di pensione,

$s(t)$ lo stipendio medio individuale,

$N^1(t)$ il numero di attivi,

$N^2(t)$ il numero di pensionati, si ottiene:

$$P_{eq}(t) = \frac{b(t)}{s(t)} \frac{N^2(t)}{N^1(t)} \quad (1.3)$$

quindi il premio di equilibrio può essere visto come il prodotto di due termini: $r(t) := \frac{b(t)}{s(t)}$ - tasso medio di sostituzione tra pensione e stipendio - e $D(t) = \frac{N^2(t)}{N^1(t)}$ - rapporto pensionati su attivi o tasso di dipendenza. In situazioni reali questi due fattori variano nel tempo e, di conseguenza, anche il premio di equilibrio. Tuttavia, nella pratica il premio non viene aggiustato anno per anno¹, sicché vengono a crearsi situazioni di deficit o surplus. In particolare definiamo il deficit all'anno t come

$$Def(t) = P(t)S(t) - B(t) = (P(t) - P_{eq}(t))S(t) \quad (1.4)$$

¹per i lavoratori dipendenti in Italia è pari al 33% dal 1996 (cfr. [14] - Inps, Circolare n. 81 del 13/5/2004, Allegato 1)

Perciò, fissato $P(t) = P$, si ha un deficit se $P_{eq}(t) > P$ e un surplus se $P_{eq}(t) < P$. Pensando al sistema previdenziale pubblico, è immediato notare la stretta relazione che corre tra equilibrio del sistema e scenario economico-demografico: una bassa crescita dei salari e della popolazione attiva influiscono negativamente sul premio di equilibrio per mezzo del tasso medio di sostituzione e del rapporto pensionati su attivi. Queste variazioni possono essere degli *shock* improvvisi, come il calo brusco di $N^1(t)$ in situazioni di crisi economica e aumento della disoccupazione, oppure manifestarsi su un orizzonte temporale più ampio, come è avvenuto e sta avvenendo nel Vecchio continente negli ultimi decenni, segnati congiuntamente dall'aumento della longevità, scarsa fertilità e tasso di occupazione non particolarmente elevato. Ricordiamo a titolo di esempio che se nel 1951, quando il 90% degli italiani aveva meno di 64 anni, le pensioni erogate erano 3,7 milioni (78 ogni mille abitanti)², nel 2015 erano 22 milioni, versate in favore di circa 15 milioni di pensionati³.

Considerando ancora l'equazione (1.4), precisiamo che agire sul premio non è l'unica via per riportare all'equilibrio tra entrate e uscite il fondo, in caso di deficit: le riforme pensionistiche adottate in Europa hanno cercato di abbassare il rapporto pensionati su attivi (aumentando l'età pensionabile) e di ridurre i benefici. Si precisa che mentre è molto complicato ridurre il tasso di dipendenza, è più facile agire sul tasso di sostituzione, modificando la regola di calcolo delle pensioni.

1.2 Il metodo di calcolo contributivo

Altro concetto fondamentale per un fondo pensioni è la regola di calcolo delle indennità, erogate generalmente sotto forma di rendita vitalizia. Si parla di metodo contributivo, o più generalmente metodi a contributi definiti (DC), quando la rata di pensione è calcolata come funzione dei contributi versati durante la carriera lavorativa.

Va ricordato che può non si ha necessariamente un legame diretto tra regola di calcolo della pensione e sistema finanziario di gestione. Nonostante la formula del metodo contributivo sia nata nell'ambito della capitalizzazione, anche alcuni sistemi previdenziali a ripartizione, come quello italiano, hanno adottato una formula che ne "imita" la forma. Nel

²cfr. [4]

³il totale delle pensioni erogate è maggiore di quello dei pensionati, dato che alcuni pensionati sono beneficiari di più prestazioni di diversa natura, ad esempio di una pensione diretta e di una di reversibilità

caso della capitalizzazione i contributi investiti vanno a formare il montante che al momento del pensionamento viene convertito in rendita. Negli schemi a ripartizione i contributi non sono realmente capitalizzati, quindi non si ha neppure un montante dei contributi. In questo caso si introduce il concetto di *montante nozionale* o *convenzionale* e di *tasso di rendimento nozionale* che imitano gli analoghi concetti di montante e tasso di rendimento dei fondi a capitalizzazione.

Ogni anno gli attivi incrementano il proprio montante nozionale per mezzo dei contributi versati. Inoltre, ogni anno il fondo pensioni riconosce rendimento pari al tasso nozionale a tutti i montanti contributivi. Si parla in questo caso di sistemi a contributi nozionalmente definiti (*Notional Defined Contribution* - NDC), in cui le rate di pensione sono calcolate in funzione dei contributi versati, ma in cui i parametri di calcolo (tassi di rendimento, coefficienti di conversione in rendita, ...) sono frutto di una convenzione.

Ponendo con

T il numero di anni di anzianità lavorativa

c_1, c_2, \dots, c_T i contributi versati

$k_1^c, k_2^c, \dots, k_T^c$ i fattori di capitalizzazione/di rivalutazione nel caso NDC

$\ddot{a}(x, T)$ il valore attuariale di una rendita vitalizia unitaria anticipata all'età x di pensionamento all'epoca T ,

il montante dei contributi⁴

$$M = \sum_{t=1}^T c_t k_t^c \quad (1.5)$$

viene convertito in rendita vitalizia, ottenendo una rata pari a $b(x, T) = \frac{M}{\ddot{a}(x, T)}$

Si distinguono, invece, i metodi a prestazione definita (DB, *Defined Benefit*), in cui la logica è quasi opposta: se nei metodi a contributi definiti le pensioni sono calcolate in funzione dei contributi versati e sono note solo al momento del pensionamento, nei metodi a prestazione definita vengono stabiliti prima i benefici e - in funzione di essi - vengono opportunamente calcolati i contributi necessari.

⁴reale o nozionale, a seconda del sistema finanziario di gestione adottato

La rata di pensione è, dunque, slegata - almeno parzialmente - dai contributi versati. In particolare, si parla di metodo retributivo, se la pensione è commisurata alle retribuzioni percepite negli ultimi m anni di contribuzione o, eventualmente, durante tutta la carriera lavorativa. Una formula tipica è la seguente:

$$R = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_j^r s_j \quad (1.6)$$

è detta retribuzione pensionabile, dove m è il numero dei periodi di lavoro considerati nel calcolo, s_1, s_2, \dots, s_m i salari percepiti negli m periodi, $k_1^r, k_2^r, \dots, k_m^r$ i coefficienti di rivalutazione dei salari.

La rata annua di pensione è poi ottenuta moltiplicando la retribuzione pensionabile per un'aliquota di rendimento e per il numero di anni di anzianità contributiva.

Si noti che le due famiglie di metodi non sono completamente disgiunte: se il premio viene mantenuto costante e i coefficienti di rivalutazione dei contributi e degli stipendi coincidono, sussiste una relazione di proporzionalità diretta tra montante dei contributi e retribuzione pensionabile.

Considereremo più in dettaglio la struttura di un sistema a contributi nozionalmente definiti, passando in rassegna i parametri che ne costituiscono l'ossatura.

1.3 Parametri di calcolo

Affinché lo schema NDC sia definito, è necessario specificare come vengono rivalutati i contributi versati, ovvero definire il tasso di rendimento nozionale, il coefficiente di conversione in rendita e il tasso di rivalutazione delle pensioni. Mentre la scelta dei parametri in uno schema a contributi definiti a capitalizzazione è abbastanza naturale e collegata al rendimento degli investimenti, risulta più problematica negli schemi NDC.

1.3.1 Il tasso di rendimento nozionale

In un fondo pensioni DC a capitalizzazione il tasso di rendimento accreditato è commisurato a quello realizzato dagli investimenti effettuati dal fondo. Quale tasso utilizzare nel caso NDC?

Generalmente si pone il tasso di rendimento accreditato al montante nozionale all'epoca t , $g(t)$, pari alla variazione relativa di una variabile macroeconomica $X(t)$, ovvero $1 + g(t) = \frac{X(t+1)}{X(t)}$. Le scelte più comuni per $X(t)$ sono il Prodotto interno lordo (Italia), l'ammontare complessivo dei salari $S(t)$ (Polonia e Lettonia) o il salario medio annuo individuale $s(t)$ (Svezia).

Dimostreremo nella Proposizione 3.1 che la scelta di porre $g(t) = \frac{S(t+1)}{S(t)}$ garantisce sotto opportune condizioni l'equilibrio automatico tra entrate e uscite. Per questa ragione è detto *tasso canonico*. Dunque, in un'ottica di stabilità del sistema pensionistico questa scelta è adeguata. Tuttavia, mettendoci nei panni degli assicurati, un tasso così costruito non sarà sempre desiderabile: se da un lato il rendimento riconosciuto è consistente in situazioni di crescita del tasso di occupazione e dei salari, può risultare, invece, fortemente negativo in contesti di crisi economica o demografica. Ad esempio, se il sistema italiano prevedesse l'utilizzo del tasso canonico, il rendimento nozionale riconosciuto (ex post) per il 2019 sarebbe inferiore al -7%, a seguito della crisi indotta dalla pandemia⁵. Dunque, chi andasse in pensione oggi, si ritroverebbe fortemente decurtato il montante contributivo e - di conseguenza - la propria pensione. Appare evidente fin da ora come il tasso canonico non possa essere implementato senza introdurre dei correttivi per limitare le oscillazioni dovute alla volatilità della massa collettiva dei salari.

Un ulteriore problema è, invece, dovuto al calcolo di $S(t)$: solitamente i dati sulla massa dei salari dell'anno t sono noti nei primi mesi dell'anno $t + 1$, dunque $g(t) = \frac{S(t+1)}{S(t)} - 1$ non è noto in $t + 1$. Dunque al momento del pensionamento (e del calcolo del montante dei contributi) non è noto il tasso da applicare per l'anno precedente il pensionamento. Una scelta frequente è non riconoscere nessun rendimento per l'ultimo anno, quindi - con riferimento all'equazione (1.5) i coefficienti k_j^c per il calcolo del montante al pensionamento nell'anno T saranno pari a:

$$k_j^c = \prod_{t=j}^{T-1} (1 + g(t)) \quad (1.7)$$

Scelta non troppo difforme dal tasso canonico è quella di porre $g(t)$ pari al tasso di crescita nominale *ex post* del PIL, come avviene in Italia. Ci sarà un disallineamento rispetto al metodo precedente determinato dalla variazione dell'incidenza dei redditi da lavoro sul totale del PIL.

⁵fonte: Eurostat

Il Tasso di Capitalizzazione delle Pensioni							
Decorrenza Pensione	Montante al Capitalizzazione	Coefficiente di Capitalizzazione	Tasso di Capitalizzazione	Decorrenza Pensione	Montante al Capitalizzazione	Coefficiente di Capitalizzazione	Tasso di Capitalizzazione
1963	31.12.1961	0.081432	1.081432	1993	31.12.1991	0.09775	1.09775
1964	31.12.1962	0.09136	1.09136	1994	31.12.1992	0.088611	1.088611
1965	31.12.1963	0.105468	1.105468	1995	31.12.1993	0.07299	1.07299
1966	31.12.1964	0.111816	1.111816	1996	31.12.1994	0.065726	1.065726
1967	31.12.1965	0.110107	1.110107	1997	31.12.1995	0.062054	1.062054
1968	31.12.1966	0.104326	1.104326	1998	31.12.1996	0.055871	1.055871
1969	31.12.1967	0.099969	1.099969	1999	31.12.1997	0.053597	1.053597
1970	31.12.1968	0.087896	1.087896	2000	31.12.1998	0.056503	1.056503
1971	31.12.1969	0.089733	1.089733	2001	31.12.1999	0.051781	1.051781
1972	31.12.1970	0.099558	1.099558	2002	31.12.2000	0.047781	1.047781
1973	31.12.1971	0.100769	1.100769	2003	31.12.2001	0.043698	1.043698
1974	31.12.1972	0.099769	1.099769	2004	31.12.2002	0.041614	1.041614
1975	31.12.1973	0.12137	1.12137	2005	31.12.2003	0.039272	1.039272
1976	31.12.1974	0.146567	1.146567	2006	31.12.2004	0.040506	1.040506
1977	31.12.1975	0.156004	1.156004	2007	31.12.2005	0.035386	1.035386
1978	31.12.1976	0.190509	1.190509	2008	31.12.2006	0.033937	1.033937
1979	31.12.1977	0.216775	1.216775	2009	31.12.2007	0.034625	1.034625
1980	31.12.1978	0.210426	1.210426	2010	31.12.2008	0.033201	1.033201
1981	31.12.1979	0.203363	1.203363	2011	31.12.2009	0.017935	1.017935
1982	31.12.1980	0.226929	1.226929	2012	31.12.2010	0.016165	1.016165
1983	31.12.1981	0.214364	1.214364	2013	31.12.2011	0.011344	1.011344
1984	31.12.1982	0.205767	1.205767	2014	31.12.2012	0.001643	1.001643
1985	31.12.1983	0.202694	1.202694	2015*	31.12.2013	0	1
1986	31.12.1984	0.186164	1.186164	2016	31.12.2014	0.005058	1.005058
1987	31.12.1985	0.160219	1.160219	2017	31.12.2015	0.004684	1.004684
1988	31.12.1986	0.142703	1.142703	2018	31.12.2016	0.005205	1.005205
1989	31.12.1987	0.126341	1.126341	2019	31.12.2017	0.013478	1.013478
1990	31.12.1988	0.115314	1.115314	2020	31.12.2018	0.018254	1.018254
1991	31.12.1989	0.105217	1.105217	2021	31.12.2019	0.019199	1.019199
1992	31.12.1990	0.101013	1.101013				
PENSIONI OGLIT							
* Effetto del Decreto Legge 65/2015							

Figura 1.1: Tassi di rendimento nozionali riconosciuti dall'INPS (fonte: www.pensionioggi.it)

Analogamente al tasso canonico, si ripresenta il problema della potenziale volatilità di $g(t)$: occorre una perequazione dei tassi di crescita del PIL nominale. Consideriamo quella attuata in Italia, dove il tasso di rendimento nozionale è pari alla variazione media (geometrica) del PIL avvenuta nel quinquennio precedente l'anno da rivalutare, ovvero

$$g(t-1) = \left(\frac{PIL_{t-1}}{PIL_{t-6}} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (1.8)$$

dove si utilizzano i dati più recenti disponibili: il PIL dell'anno t è noto soltanto in $t+1$, pertanto in t è noto $g(t-1)$, ma non $g(t)$.

Nonostante ci sia una perequazione del tasso di crescita del PIL, g_t può risultare negativo in situazioni di recessione prolungata o non seguita immediatamente da un periodo di crescita. Nella terza colonna di Figura 1.1 sono riportati i tassi di rendimento nozionale fino al 2019. Per la prima volta nel 2015 la formula 1.8 ha restituito un tasso negativo. Si è deciso, tuttavia, di porre $g(2013) = 0$. La possibilità che il tasso di rivalutazione sia negativo rischia di alimentare la sfiducia nel sistema pensionistico, oltre a rendere le pensioni future magre.

Un'ultima possibile scelta che consideriamo per $g(t)$ è quella adottata dalla Svezia, dove è posto pari al tasso di crescita del salario medio

individuale $s(t)$:

$$1 + g(t) = \frac{s(t+1)}{s(t)} \quad (1.9)$$

Questa scelta è analoga a quella spesso attuata nei fondi a benefici definiti per determinare i coefficienti di rivalutazione dei salari k_j^r (si veda 1.6)). Dato che $s(t) = \frac{S(t)}{N^1(t)}$, con $N^1(t)$ numero degli attivi, otteniamo:

$$1 + g(t) = \frac{N^1(t)}{N^1(t+1)} \frac{S^{(t+1)}}{S^{(t)}} = \frac{N^1(t)}{N^1(t+1)} [1 + g(t)^{(\text{canonico})}] \quad (1.10)$$

Perciò il tasso di rendimento riconosciuto è minore di quello canonico in condizioni di crescita del numero degli attivi, mentre è maggiore in caso di calo demografico.

1.3.2 Il coefficiente di conversione in rendita

In un fondo pensioni DC a capitalizzazione, il montante verrebbe tipicamente convertito in rendita vitalizia. Il coefficiente di conversione in rendita dipenderebbe dalla tavola di mortalità adottata e dal rendimento degli attivi a copertura degli impegni, secondo il valore attuariale dei benefici futuri, calcolabile con la classica formula della rendita vitalizia in assenza di benefici ai superstiti.

Per quanto riguarda la scelta delle basi tecniche demografiche, è possibile adottare lo stesso approccio anche in uno schema NDC, mentre per le basi finanziarie si ripresenta il problema di come scegliere il tasso di attualizzazione, dato che non c'è una disponibilità di capitale investito. Inoltre, se il sistema prevede l'indicizzazione delle pensioni, bisogna tenerne conto *ex-ante*⁶. Si ottiene, per ogni età di pensionamento x e ogni epoca t

$$\ddot{a}(x, t) = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_h p_x(t) \prod_{k=t}^{t+h} \frac{1 + \lambda(k)}{1 + g(k)} \quad (1.11)$$

Dove $\lambda(k)$ è il tasso atteso *ex-ante* di indicizzazione e $g(k)$ il tasso di attualizzazione nozionale *ex ante*. E' conveniente riscrivere l'equazione

⁶Nell'ambito delle assicurazioni private o dei fondi a capitalizzazione, la rata di una rendita vitalizia potrebbe essere rivalutata *ex post* con la formula "dei tre tassi" se l'assicuratore/il gestore del fondo rivaluta la riserva matematica dell'assicurato, ad esempio grazie a profitti da extrarendimenti sugli attivi a copertura della riserva. In un fondo NDC non è possibile questa situazione. Tuttavia nell'ambito della previdenza pubblica, potrebbe essere proprio lo Stato a farsi carico di una rivalutazione *ex post* delle pensioni.

come funzione di un tasso di sconto "netto" $j(k) = \frac{1+\lambda(k)}{1+g(k)} - 1$, che sintetizzi l'indicizzazione e l'attualizzazione. In Italia $j(k)$ è posto pari all'1,5%, coerentemente con il trend a lungo termine della crescita annuale del Pil nominale. In altri sistemi pensionistici NDC (Polonia e Lettonia) i coefficienti di trasformazione in rendita dipendono, invece, soltanto dalle aspettative di vita. D'altronde l'incertezza nella valutazione di $j(k)$ è marcata, essendo forte l'incertezza sull'andamento futuro delle variabili macroeconomiche a cui è agganciato.

In Italia i coefficienti di trasformazione sono aggiornati ogni due anni alle nuove probabilità di sopravvivenza, dunque si crea un meccanismo di adeguamento all'aumento della longevità. Tuttavia, i nuovi coefficienti di trasformazione vengono applicati solo alle nuove generazioni di pensionati, mentre chi è andato in pensione prima dell'ultimo adeguamento dei coefficienti $\ddot{a}(x, t)$, continua a ricevere la rata calcolata in base ai vecchi coefficienti.

1.3.3 Il tasso di rivalutazione delle pensioni

In Italia l'adeguamento delle pensioni avviene in base all'indice dei prezzi al consumo, tuttavia la normativa delle indicizzazioni è stata più volte modificata negli ultimi anni⁷. In generale le rate di pensione aumenteranno di un tasso:

$$\lambda(t) = \phi \cdot \left(\frac{IPC_{t+1}}{IPC_t} - 1 \right) \quad (1.12)$$

dove IPC_t è l'indice dei prezzi al consumo dell'anno t e $0 \leq \phi \leq 1$ è un'aliquota che dipende dall'entità della rata. In particolare oggi $\phi = 1$ per rate di importo fino a quattro volte la pensione minima.⁸

Anche negli altri paesi europei che hanno adottato il sistema NDC il tasso di adeguamento $\lambda(t)$ dipende dal tasso di inflazione: lo scopo è, infatti, proteggere il potere d'acquisto dei pensionati.

In Svezia, però, l'indicizzazione avviene solo per la quota annua di inflazione maggiore dell'1,6%, per cui $\lambda(t) = \frac{IPC_{t+1}}{IPC_t} - 1,016$. In Polonia, invece, dipende anche dal tasso di aumento del salario medio individuale. In questo caso la logica sottostante è di tenere sotto controllo il tasso medio di sostituzione.

⁷Per alcuni anni è stato congelato l'adeguamento delle pensioni sopra una certa soglia, dichiarato in seguito incostituzionale. Non ci soffermeremo su questo tema, essendo oggetto di ritocchi normativi frequenti

⁸cfr. Legge 160/2019

Nessun paese ha, invece, fatto dipendere $\lambda(t)$ da cambiamenti nelle speranze di vita o dall'esperienza di mortalità fra i pensionati.

1.3.4 Aliquota contributiva

In uno schema pensionistico NDC l'aliquota contributiva è mantenuta di norma costante, sicché $P(t) = P \forall t$, tuttavia nulla vieta - da un punto di vista sia formale che tecnico - di modificare il premio: introdurremo in seguito schemi che potremmo definire *Quasi-NDC*, in cui anche il premio potrà variare.

Occorre precisare che la variazione del premio in un sistema NDC, a differenza dei sistemi DB, ha un doppio effetto. Avevamo osservato nell'equazione (1.3) che in uno schema a ripartizione pura l'equilibrio fra contributi e oneri può essere garantito, agendo anno per anno sul premio. Tuttavia, in presenza di sistemi NDC, l'aumento (l'abbassamento) del premio comporta anche un aumento (una riduzione) dei benefici futuri: un assicurato che paga contributi in base a un premio più elevato, ottiene un montante contributivo più alto e - di conseguenza - una rata di pensione più consistente.

Considerando un fondo pensioni NDC in cui il saldo tra entrate e uscite sia negativo, si potrebbe pensare di ripristinare l'equilibrio di bilancio agendo sul premio. L'aumento del premio sanerà temporaneamente il saldo tra entrate e uscite del fondo, ma a prezzo di un aumento degli oneri futuri. Senza ulteriori ipotesi, in generale non possiamo dire nulla sull'effetto che ha l'aumento del premio sul bilancio attuariale.

Possiamo concludere che l'effetto della variazione del premio nel ripristinare l'equilibrio finanziario di un fondo pensioni NDC è piuttosto limitato, mentre ha l'importante merito di incrementare l'adeguatezza dei benefici futuri.

Precisiamo che la modifica del premio comporta di fatto la modifica del salario netto individuale e dunque ha un impatto economico tutt'altro che trascurabile, la cui analisi va, però, oltre lo scopo di questa tesi.

1.3.5 Requisiti per il pensionamento

Generalmente, un sistema pensionistico prevede che si possa andare in pensione al raggiungimento di una certa età (di vecchiaia). Spesso sono, però, previste deroghe a questo principio, che consentono di ritirarsi anticipatamente, dopo un certo numero di anni di lavoro. Sono poi possibili formule miste, che prevedono sia un requisito di età che di anzianità

lavorativa: è questo il caso della *Quota 100*.

Pressoché tutti i paesi europei hanno attuato negli ultimi anni riforme con l'obiettivo di ripristinare la sostenibilità dei sistemi previdenziali pubblici. Queste riforme sono state definite spesso "parametriche", riguardando i parametri di calcolo della pensione e i requisiti per il pensionamento. In particolare, hanno comportato spesso l'aumento dell'età pensionabile, in modo da abbassare il rapporto pensionati su attivi (vedi (1.3)), che è andato via via aumentando con l'invertirsi della piramide demografica. Ad esempio, in Italia l'età per la pensione di vecchiaia è periodicamente aggiornata alla speranza di vita⁹.

L'effetto sulla sostenibilità del sistema è evidente in uno schema a benefici definiti, mentre è più contenuto negli schemi NDC: l'incremento dell'età pensionabile comporta da un lato un periodo di contribuzione più lungo e dunque un montante più elevato, dall'altro un coefficiente di conversione in rendita più favorevole al pensionato. Dunque le pensioni saranno complessivamente di importo più consistente.

Si è spesso osservato come in un sistema DB sia generalmente conveniente andare in pensione non appena se ne hanno i requisiti: in molti casi continuare a lavorare non ha l'effetto di incrementare i benefici futuri. Un sistema DC o NDC ha, invece, il pregio di stimolare gli assicurati a rimandare il pensionamento, dato che in questo modo otterranno una rata più consistente.

⁹La riforma Fornero del 2011 prevede l'aumento di 3 mesi ogni due anni. L'ultimo innalzamento è scattato il 1 gennaio 2019 (67 anni), mentre nel 2021 non è avvenuto l'aumento previsto a 67 anni e 3 mesi, poiché l'aumento della speranza di vita non è stato giudicato significativo. Tuttavia il "congelamento" dell'età pensionabile non ha riguardato in parallelo i coefficienti di trasformazione in rendita, ritoccati al ribasso.

Capitolo 2

Modelli multistato per i fondi pensione

Valutare la sostenibilità di un fondo pensioni richiede l'assunzione di ipotesi sull'evoluzione demografica della collettività in esame. Tradizionalmente si considera una popolazione suddivisa in gruppi (degli attivi, dei pensionati per le varie cause, dei superstiti...) da cui gli individui sono eliminati per più cause: morte, pensionamento per invalidità, pensionamento per vecchiaia... Il modello probabilistico viene costruito assegnando le probabilità o le intensità di eliminazione.

Un approccio più generale è offerto dai modelli multistato, che - oltre a comprendere il modello tradizionale - permettono di rappresentare situazioni più generali, in cui un individuo può ritornare in un gruppo da cui era stato eliminato in precedenza. Non sarà difficile riscrivere il modello tradizionale come modello multistato, visto il forte parallelismo tra gruppi e stati

Per la redazione di questo capitolo abbiamo consultato principalmente le dispense del corso di Tecnica Attuariale delle assicurazioni di persone del prof. Pitacco, la dispensa [2] di J.W. Daniel per le applicazioni attuariali delle catene di Markov non omogenee e la nota [5] dei prof. Pelesoni e Zecchin per l'applicazione ai fondi pensione nel paragrafo conclusivo del capitolo.

2.1 I modelli multistato

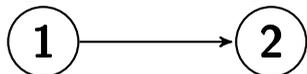
Nella costruzione delle basi tecniche attuariali per determinare la tariffa di una polizza assicurativa sulla vita o sulla salute o per la redazione del bilancio tecnico di un fondo pensioni è fondamentale calcolare la proba-

bilità di eventi legati alla storia di vita di una persona: la probabilità che un individuo sia sano o ammalato fra un certo numero di anni, che deceda entro una certa data, che sia andato in pensione entro la fine di un determinato anno. In tutti questi casi si considerano le possibili situazioni in cui può trovarsi l'individuo ad una certa data. Nel caso più semplice ci sono solo due situazioni: vivo o morto, ma in base alle necessità (e ai dati disponibili) si possono considerare modelli più complessi. Inoltre si definiscono le regole in base a cui può cambiare la situazione dell'individuo: l'individuo vivo può morire con una certa probabilità, mentre l'individuo morto non può tornare in vita. Così facendo, abbiamo specificato un modello multistato: un modello (probabilistico) che descrive i movimenti aleatori di un soggetto fra varie situazioni dette stati. Nelle applicazioni che considereremo, il soggetto sarà sempre il generico individuo e gli stati saranno definiti dalla sua storia di vita, ma nulla vieta di considerare altri soggetti, come una linea di produzione (che può essere attiva o in manutenzione) o un prestito, rispettivamente pagato o insoluto.

Formalizzando, ad ogni possibile "situazione" si associa uno stato, a cui diamo per nome un numero naturale. In particolare, un modello multistato è definito assegnando un insieme finito o numerabile $I = \{1, 2, \dots\}$ ¹ di stati in cui può transitare l'individuo e le regole di transizione da uno stato all'altro. Indicato con $\{X_t\}_{t=0,1,\dots}$ (o $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, se consideriamo modelli a parametro continuo) lo stato in cui si trova l'individuo al tempo t , si considera X_t ($X(t)$) come un processo stocastico a tempo discreto (continuo), adottando opportune ipotesi probabilistiche.

L'esempio più semplice è dato dal modello a due stati $I = \{1, 2\}$, che possono rappresentare le situazioni "l'individuo è in vita"/"l'individuo è morto" nello studio della sopravvivenza, oppure "l'individuo è sano"/"è ammalato" in un'assicurazione sulla malattia.

E' comodo rappresentare gli stati e le possibili transizioni tramite un grafo, in cui ogni freccia corrisponde a una possibile transizione: di seguito è riportato il grafo di un modello di sopravvivenza a due stati (modello di sopravvivenza semplice).



Lo stato 1 rappresenta la situazione "l'individuo è in vita", lo stato 2 "l'individuo è morto". La freccia rappresenta l'unico passaggio di stato

¹Talvolta numereremo gli stati a partire dallo 0 per semplicità di scrittura

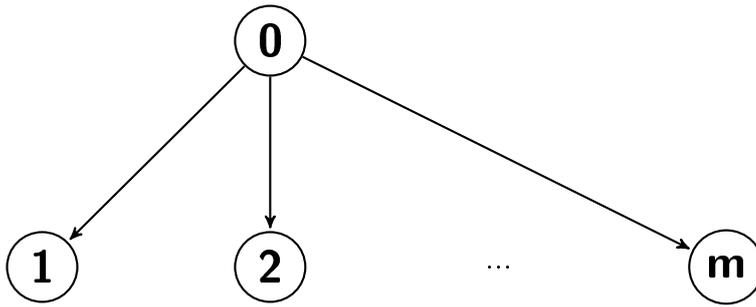
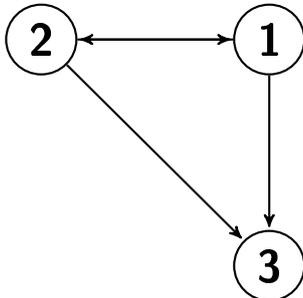


Figura 2.1: Modello a n cause di eliminazione

ammesso, quello dallo stato 1 allo stato 2.

Possiamo considerare il modello a m cause di eliminazione come un particolare modello multistato, a $m + 1$ stati ($I = \{0, 1, \dots, m\}$). Ad esempio, l'individuo sarà nello stato 0 se è rimasto nella collettività, in 1 se eliminato per la prima causa, in 2 se eliminato per la seconda causa e così via.

Questi modelli prevedono che una volta lasciato uno stato, non si possa farvi ritorno, come mostrato dal grafo di figura 2.1. In molte applicazioni può, però, essere necessario considerare modelli in cui sia possibile uscire e tornare in uno stato, come nel seguente modello a tre stati:



Questo modello può essere utilizzato nella costruzione di basi tecniche per assicurazioni contro il rischio di malattia o di invalidità. Ad esempio, gli stati possono rappresentare rispettivamente:

- 1 attivo
- 2 invalido
- 3 deceduto.

La doppia freccia fra 1 e 2 indica che fra i due stati sono possibili le transizioni in entrambi i versi. Al contrario, a partire dallo stato 3 non è possibile nessuna transizione verso altri stati. Gli stati con questa proprietà sono detti *assorbenti* e sono spesso presenti nelle applicazioni

attuariali, un esempio tipico è rappresentato dal decesso dell'individuo.

2.2 Catene di Markov non omogenee

Inizialmente ci limitiamo a considerare modelli multistato a parametro discreto e spazio degli stati finito, scelta tutt'altro che limitante per i nostri fini.

Una volta definiti gli stati e le possibili transizioni tra di essi, si pongono ipotesi probabilistiche sull'evoluzione del processo stocastico X_t ($X(t)$) dello stato occupato dall'individuo al tempo t . Nelle applicazioni di interesse, non ha senso considerare stocasticamente indipendenti le variabili aleatorie che compongono il processo X_1, X_2, \dots . Ad esempio, nel modello di sopravvivenza a due stati (1=vivo, 2=morto), conoscere la storia del processo fino a una certa data t modifica la valutazione probabilistica per i periodi successivi. In una situazione non banale, $\mathbb{P}(X_2 = 1) > 0$, mentre $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0) = 0$: sapendo che all'epoca 1 l'individuo è già morto, la probabilità condizionata che sia vivo all'epoca successiva è nulla.

Dunque, bisogna introdurre una forma di dipendenza stocastica fra le variabili aleatorie che compongono il processo. Una forma semplice di dipendenza stocastica è data dalla proprietà di Markov:

Definizione 2.1 (Catena di Markov discreta). *Una Catena di Markov $\{X_t\}_{t=0,1,\dots}$ è un processo stocastico a tempo discreto, a valori nello spazio degli stati discreto $I = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N} \cup +\infty$, tale che valga la proprietà di Markov, ovvero:*

$$P(X_t = j | X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = P(X_t = j | X_{t_n} = i_n)$$

per ogni $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$.

Le catene di Markov sono anche dette processi *a memoria corta*, dato che la conoscenza della storia del processo fino a una certa epoca influisce sulla valutazione probabilistica solo attraverso la conoscenza dello stato occupato più recentemente.

Sono allora di interesse le probabilità che l'individuo passi da uno stato a un altro condizionatamente allo stato occupato inizialmente:

Definizione 2.2 (Probabilità condizionate di transizione). *Indicheremo con:*

$${}_n p^{ij}(t) = \mathbb{P}\{X_{t+n} = j | X_t = i\} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.1)$$

la probabilità che un individuo nello stato i all'epoca t sia nel gruppo j all'epoca $t + n$. Omettiamo il pedice n , quando $n = 1$.

Se le probabilità di transizione non dipendono dal tempo (${}_n p^{ij}(t) = {}_n p^{ij} \forall t$), la catena di Markov è detta omogenea o stazionaria.

La proprietà di Markov permette diverse semplificazioni: transizioni successive sono eventi indipendenti, per cui la probabilità di passare da i a j e successivamente da j a k è il prodotto delle due probabilità, infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+m+n} = k, X_{t+m} = j | X_t = i) &= \mathbb{P}(X_{t+m+n} = k | X_t = i, X_{t+m} = j) \mathbb{P}(X_{t+m} = j | X_t = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{t+m+n} = k | X_{t+m} = j) \mathbb{P}(X_{t+m} = j | X_t = i) = \\ &= {}_m p^{jk}(t) \cdot {}_n p^{ij}(t+m) \end{aligned} \tag{2.2}$$

In particolare segue che la probabilità che venga seguita una certa traiettoria, ovvero che $X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n$, è data dal prodotto delle probabilità monoperiali di transizione:

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) \cdot p^{i_0 i_1}(0) \cdot p^{i_1 i_2}(1) \cdot \dots \cdot p^{i_{n-1} i_n}(n-1) \tag{2.3}$$

Talvolta potremmo essere interessati a probabilità non condizionate, ad esempio la probabilità che $X_3 = i$. Si tratta di quantità che possono essere calcolate, se è nota - ad esempio - la distribuzione di probabilità iniziale, eventualmente concentrata sullo stato iniziale. Distribuzione che indichiamo con il vettore $\lambda_0 = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \dots, \mathbb{P}(X_0 = m))$. Indichiamo, invece, con λ_t la distribuzione di probabilità di X_t .

Sempre dalla proprietà di Markov segue un'importante (e nota) proprietà:

Equazione di Chapman-Kolmogorov

$${}_{m+n} p^{ik}(t) = \sum_{j \in I} {}_m p^{ij}(t) {}_n p^{jk}(t+m) \tag{2.4}$$

Infatti, per il teorema della probabilità totale:

$${}_{m+n} p^{ik}(t) = \mathbb{P}(X_{t+m+n} = k | X_t = i) = \sum_{j \in I} \mathbb{P}(X_{t+m+n} = k, X_{t+m} = j | X_t = i)$$

Quindi, per (2.2),

$$= \sum_{j \in I} {}_m p^{ij}(t) {}_n p^{jk}(t+m) \tag{2.5}$$

Risulta comodo scrivere in modo compatto le probabilità di transizione. Per ogni t costruiamo la matrice $P(t)$, che contiene tutte le probabilità condizionate di transizione monoperiodali: l'elemento di posto (i, j) è la probabilità $p^{ij}(t)$.

$$P(t) = \begin{pmatrix} p^{11}(t) & p^{12}(t) & \dots & p^{1m}(t) \\ p^{21}(t) & p^{22}(t) & \dots & p^{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{m1}(t) & p^{m2}(t) & \dots & p^{mm}(t) \end{pmatrix}$$

$P(t)$ è detta matrice stocastica di transizione al tempo t . E' una matrice quadrata $m \times m$, con m pari al numero di stati del modello. Ogni elemento è compreso tra 0 e 1, trattandosi di probabilità. In particolare la riga i -esima rappresenta la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $X_{t+1}|X_t = i$, quindi ogni riga ha somma 1. In generale, non si può dire lo stesso per le colonne.

Nel caso delle catene di Markov omogenee si ha una sola matrice di transizione, dato che le probabilità di transizione sono costanti nel tempo.

Esempio La matrice di transizione del modello di sopravvivenza a due stati per un individuo di età x all'epoca t è la seguente:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_x(t) & q_x(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dove con $p_x(t)$ e $q_x(t)$ abbiamo indicato rispettivamente la probabilità monoannuale di sopravvivenza e di morte, secondo la notazione classica della matematica attuariale.

La matrice stocastica $P(t)$ rappresenta le probabilità di transizione in un periodo. Possiamo definire in maniera analoga la matrice stocastica di transizione in n periodi, che indichiamo con ${}_n P(t)$. Il generico elemento di posizione (i, j) è dato ora da ${}_n p^{ij}(t)$. Dall'equazione di Chapman-Kolmogorov segue che

$${}_n P(t) = P(t)P(t+1) \cdots P(t+n-1)$$

Infatti, per $n = 2$, si considera il generico elemento di ${}_2 P(t)$, ${}_2 p^{ij}(t) = \sum_{h=1}^m p^{ih}(t)p^{hj}(t+1)$, è quindi uguale al prodotto della i -esima riga di $P(t)$ per la j -esima colonna di $P(t+1)$. Per induzione su n si prova la formula per ${}_n P(t)$.

Conoscendo la distribuzione iniziale λ_0 di X_0 e la matrice stocastica per ogni t , si determina la distribuzione λ_t di X_t come

$$\lambda_t^\top = \lambda_0^\top {}_n P(0) = \lambda_0^\top P(t)P(t+1) \cdots P(t+n-1) \quad (2.6)$$

Nel caso delle catene di Markov omogenee la matrice $P(t)$ è costante rispetto a t . Di conseguenza anche la matrice di transizione in n passi è costante nel tempo e può essere ottenuta tramite elevamento a potenza:

$${}_n P(t) = PP \cdots P = P^n$$

Esempio Consideriamo il modello a tre stati del paragrafo (2.1), relativo a un'assicurazione di invalidità. Supponiamo che le probabilità di passaggio da uno stato all'altro siano costanti rispetto al tempo e descritte dalla seguente matrice stocastica²:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se siamo interessati a calcolare la probabilità che un individuo invalido al tempo 0, lo sia anche dopo 3 periodi, basta considerare l'elemento di posizione (2, 2) della matrice P^3 :

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,592 & 0,116 & 0,292 \\ 0,464 & 0,128 & 0,408 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque è pari al 12,8%. Mentre la probabilità di permanenza nello stato 2 è data da $\mathbb{P}(X_3 = 2, X_2 = 2, X_1 = 2 | X_0 = 2) = (p^{22})^3 = 0,064$.

Concludiamo con un'osservazione relativa alla matrice stocastica dell'esempio precedente. L'ultima riga di P ha un elemento (p^{33}) pari ad 1. Questo significa che una volta raggiunto lo stato 3, non è possibile uscirne (con probabilità non nulla), dunque si tratta di uno stato assorbente.

Spesso la letteratura sulle catene di Markov si concentra sulla ricerca di condizioni sufficienti per l'esistenza di distribuzioni stazionarie, ovvero di distribuzioni costanti rispetto al tempo (tali per cui $\lambda_t = \lambda_0$ per ogni t). Si può provare che se una catena di Markov contiene un certo numero di stati assorbenti, raggiungibili con probabilità non nulla da tutti gli stati non assorbenti, allora le uniche distribuzioni stazionarie sono concentrate sugli stati assorbenti.

Sotto queste ipotesi la dimostrazione è immediata: consideriamo una catena di Markov avente per spazio degli stati l'insieme $I = (1, \dots, n, n+1, \dots, m)$, dove gli stati $n+1, \dots, m$ sono assorbenti, mentre i rimanenti

²i valori sono scelti a scopo puramente illustrativo

non lo sono.

Una distribuzione $\boldsymbol{\lambda} = (l_1, \dots, l_m)$ è stazionaria solo se $\boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{\lambda}^\top P$. In particolare, se i è uno stato assorbente ($i \in \{n+1, \dots, m\}$), deve valere:

$$l_i = l_1 \cdot p^{1i} + \dots + l_n \cdot p^{ni} + l_i \quad (2.7)$$

(i è assorbente, dunque $p^{ii} = 1$. Se j è assorbente, $p^{ji} = 0$).

Per cui $l_i = A + l_i$, dove A è una quantità positiva o nulla. Ma A deve valere proprio zero, altrimenti nella (2.7) risulterebbe $l_i > l_i$. Dato che i è raggiungibile con probabilità non nulla da ogni stato non assorbente, allora $p^{1i}, \dots, p^{ni} > 0$. Dunque A è nullo solo se $l_1, \dots, l_n = 0$, ovvero se la distribuzione $\boldsymbol{\lambda}$ è concentrata sugli stati $n+1, \dots, m$.

Nell'esempio precedente (modello a tre stati) l'unica distribuzione stazionaria ammessa è quella concentrata nello stato 3 di deceduto. Infatti una distribuzione $\boldsymbol{\lambda}$ è stazionaria se e solo se vale:

$$\boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{\lambda}^\top P$$

ovvero, se $\boldsymbol{\lambda} = (l_1 \quad l_2 \quad l_3)$ è soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} l_1 = 0, 8l_1 + 0, 4l_2 \\ l_2 = 0, 1l_1 + 0, 4l_2 \\ l_3 = 0, 1l_1 + 0, 2l_2 + l_3 \end{cases} \quad (2.8)$$

L'unica soluzione³ è $l = (0 \quad 0 \quad 1)$, quindi l'unica distribuzione stazionaria è concentrata in 3, lo stato assorbente.

In questa breve presentazione delle applicazioni delle catene di Markov ometteremo di trattare il problema delle condizioni di esistenza di distribuzioni stazionarie, dato che nelle applicazioni di interesse ci saranno sempre stati assorbenti.

2.3 Valori attuariali

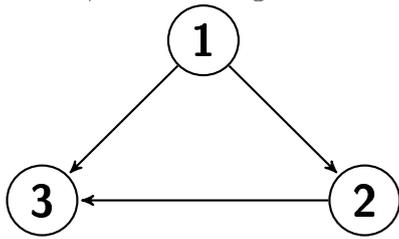
La rappresentazione mediante modelli multistato non è fine a se stessa: ci consentirà di ottenere delle formule generali per il calcolo dei valori attuali attesi dei flussi di cassa associati - ad esempio - a un contratto assicurativo o a un fondo pensionistico.

³Infatti, se l_1 o l_2 fossero strettamente positivi, nella terza equazione del sistema otterremmo a sinistra l_3 e al membro di destra una quantità strettamente maggiore di l_3

Supponiamo che a ogni periodo trascorso in uno stato sia associato un flusso di cassa (positivo o negativo). Ad esempio, in un fondo pensioni, associamo ad ogni attivo un flusso di cassa in favore del fondo, pari ai contributi pensionistici. Viceversa, associamo ad ogni pensionato un flusso a carico del fondo, pari alla rata di pensione.

Indichiamo con $C_t^{(j)}$ il flusso di cassa ricevuto (flusso positivo) o pagato (flusso negativo) dall'individuo nello stato j al tempo t . Invertendo il segno, si adotta il punto di vista dell'assicuratore o del gestore del fondo.

Esempio Consideriamo un modello per valutare una rendita vitalizia di b euro all'anno differita di vent'anni e che verrà erogata fino al decesso dell'assicurato, a fronte del pagamento di un premio annuo costante π a partire da oggi per vent'anni. Non è prevista la possibilità di recesso. Costruiamo un modello a 3 stati per rappresentare la situazione: l'assicurato è nello stato 1 se attivo (è vivo e paga il premio), nello stato 2 se è percettore di rendita, nello stato 3 se è deceduto. Consideriamo possibili le transizioni da attivo a pensionato, da attivo a deceduto e da pensionato a deceduto. Non sono possibili passaggi da pensionato ad attivo, secondo il grafo che segue:



I flussi di cassa (per l'assicurato) sono $C_t^{(1)} = -\pi$, $C_t^{(2)} = b$ e $C_t^{(3)} = 0$, costanti rispetto al tempo.

Scriviamo ora la formula generale per il valore attuale atteso $VAA_{i,t}(C^{(j)})$ dei flussi di cassa associati alla permanenza nello stato j , per l'individuo che si trova nello stato i all'epoca di valutazione t . Indichiamo genericamente con ${}_k v_t$ il fattore di attualizzazione degli importi dall'epoca $t+k$ in t . Scriviamo i valori attuariali come somma sugli anni futuri del prodotto di tre fattori: probabilità che l'individuo sia nello stato j a una certa epoca, flusso di cassa associato e fattore di attualizzazione. Se all'epoca di valutazione t l'individuo è nello stato i , il valore attuale atteso è quindi:

$$VAA_{i,t}(C^{(j)}) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} [X_{t+k} = j | X_t = i] \cdot C_{t+k}^{(j)} \cdot {}_k v_t \right] \quad (2.9)$$

dove $[X_{t+k} = j | X_t = i]$ è l'indicatore dell'evento "l'individuo presente nello stato i al tempo t è nello stato j all'epoca $t+k$ ". L'individuo riceve un flusso $C_{t+k}^{(j)}$ in $t+k$, se e solo se l'indicatore di tale evento vale 1. Se il numero di addendi non nulli è finito, possiamo sfruttare l'additività del valore atteso. Nel caso generale occorre prima verificare la convergenza della serie. Inoltre, dato che il valore atteso di un evento è la probabilità che questo si verifichi, si ottiene:

$$VAA_{i,t}(C^{(j)}) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p^{ij}(t) \cdot C_{t+k}^{(j)} \cdot {}_k v_t \quad (2.10)$$

Le probabilità ${}_k p^{ij}(t)$ sono l'elemento di posto (i, j) della matrice ${}_k P(t) = P(t)P(t+1) \cdots P(t+k-1)$. In realtà non è necessario calcolare tutti i prodotti di matrici. Conviene procedere iterativamente:

- ${}_1 p^{ij}(t)$ è l'elemento di posizione (i, j) di $P(t)$
- ${}_2 p^{ij}(t) = \sum_{h \in I} {}_1 p^{ih}(t) {}_1 p^{hj}(t+1)$
- ...
- ${}_k p^{ij}(t) = \sum_{h \in I} {}_{k-1} p^{ih}(t) {}_{k-1} p^{hj}(t+k-1)$

Il valore attuariale di tutti i flussi futuri per un individuo nello stato i al tempo t è ottenuto per somma come $VAA_{i,t} = \sum_{j \in I} VAA_{i,t}(C^{(j)})$. In particolare, un contratto assicurativo è equo, se e solo se il valore attuale atteso dei flussi da esso derivanti, calcolato alla stipula è nullo, ovvero se $VAA_{i,0} = \sum_{j \in I} VAA_{i,0}(C^{(j)}) = 0$.

Possiamo riconsiderare l'esempio precedente, relativo a una rendita vitalizia differita. I flussi di cassa associati sono $C_t^{(1)} = -\pi$, $C_t^{(2)} = b$, $C_t^{(3)} = 0$, costanti rispetto a t . Il premio equo può essere ottenuto come soluzione dell'equazione

$$VAA_{1,0}(C^{(1)}) + VAA_{1,0}(C^{(2)}) = 0 \quad (2.11)$$

Ovvero:

$$-\sum_{k=0}^{19} {}_k p^{11}(0) \cdot \pi \cdot {}_k v_0 + \sum_{k=20}^{\omega-1} {}_k p^{12}(0) \cdot b \cdot {}_k v_0 = 0,$$

La formula 2.10 non fornisce solo uno strumento per calcolare il premio equo, più in generale, possiamo calcolare la riserva matematica per l'assicurato nello stato i in t come:

$$V_{i,t} = VAA_{i,t}(C^{(1)}) + VAA_{i,t}(C^{(2)}) + \cdots + VAA_{i,t}(C^{(m)}). \quad (2.12)$$

Infatti, se il flusso di cassa $C_t^{(i)}$ è preso negativo per gli stati in cui l'assicurato paga un premio e positivo se riceve un beneficio, l'espressione sopra è proprio pari alla differenza tra il valore attuariale dei futuri benefici ($C^{(2)}$) e dei futuri premi ($-C^{(1)}$).

La riserva matematica dipende dallo stato di valutazione, oltre che dal tempo: ad esempio per un'assicurazione di invalidità si considera la riserva matematica degli attivi e la riserva degli invalidi. In generale, per un modello a m stati, si ottengono m riserve matematiche, una per ogni stato. Se interessati alla valutazione della riserva matematica per tutti gli m stati, può essere comodo scriverle nella forma compatta

$$V_t = \sum_{k \geq 0} {}_kP(t) C_{t+k} \cdot {}_k v_t, \quad (2.13)$$

dove $V_t = (V_{1,t}, \dots, V_{m,t})$ è il vettore delle riserve matematiche e $C_t = (C_t^{(1)}, \dots, C_t^{(m)})^\top$ il vettore dei flussi di cassa associati agli m stati.

Esempio *Riserva matematica degli attivi e degli invalidi*

Consideriamo una polizza assicurativa temporanea contro il rischio di invalidità, di durata T anni. Ad ogni anniversario di polizza l'assicurato riceve una somma pari a b_t se invalido, mentre paga un premio π_t se attivo.

Rappresentiamo lo stato dell'assicurato mediante una catena di Markov non omogenea a tre stati: attivo (1), invalido (2) e deceduto (3) in cui è ammessa la transizione da invalido ad attivo (riattivazione). La matrice di transizione al tempo t è data da:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p^{11}(t) & p^{12}(t) & p^{13}(t) \\ p^{21}(t) & p^{22}(t) & p^{23}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indichiamo con $t = 0$ l'anno di inizio della copertura assicurativa per l'assicurato di età x .

La riserva matematica prospettiva degli attivi e degli invalidi sono rispettivamente:

$$V_{1,t} = \sum_{k=0}^{T-t} {}_k p^{11}(t) \cdot (-P_t) \cdot {}_k v_t + \sum_{k=0}^{T-t} {}_k p^{12}(t) \cdot b_t \cdot {}_k v_t$$

$$V_{2,t} = \sum_{k=0}^{T-t} {}_k p^{21}(t) \cdot (-P_t) \cdot {}_k v_t + \sum_{k=0}^{T-t} {}_k p^{22}(t) \cdot b_t \cdot {}_k v_t$$

Le formule che abbiamo presentato sono senza dubbio di grande utilità e molto generali. Un aspetto delicato nella pratica è legato al calcolo delle probabilità di transizione ${}_k p^{ij}(t)$. I dati disponibili potrebbero essere pochi, per questo sono da preferire modelli multistato semplici, con non troppi stati.

2.3.1 Pagamenti associati a transizioni

La formula trovata nella sezione precedente permette di calcolare valori attuariali in situazioni molto generali: il valore attuariale di una sequenza di premi, di una rendita vitalizia, di una rendita di invalidità, ovvero di tutte quelle situazioni in cui si hanno una serie di flussi di cassa che dipendono dallo stato occupato al momento del pagamento. Tuttavia la formula 2.10 non cattura situazioni in cui il pagamento avviene una tantum al passaggio fra uno stato e l'altro. Ad esempio in una polizza temporanea caso morte l'assicuratore paga un capitale (solo) al verificarsi del passaggio dell'assicurato dallo stato "vivo" allo stato "deceduto". Indichiamo con $C_t^{(ij)}$ il flusso di cassa associato alla transizione tra lo stato i e lo stato j al tempo t , ovvero la somma che l'assicurato riceve in t se e solo se $X_{t-1} = i$ e $X_t = j$.

Analogamente alla formula precedente, otteniamo il valore attuale medio dei flussi di cassa associati alle transizioni da i a j , come somma sulle possibili epoche di transizione del prodotto di tre fattori:

- probabilità che la transizione avvenga a una certa epoca
- flusso di cassa associato $C_{t+k}^{(ij)}$
- fattore di attualizzazione ${}_k v_t$.

La probabilità che la transizione avvenga tra $t+k$ e $t+k+1$, condizionata allo stato occupato in t è:

$$\mathbb{P}(X_{t+k} = i, X_{t+k+1} = j | X_t = s) = {}_k p^{si}(t) p^{ij}(t+k)$$

grazie alla conseguenza (2.2) della proprietà di Markov.

Quindi vale:

$$VAA_{s,t}(C^{(ij)}) = \sum_{k \geq 0} {}_k p^{si}(t) p^{ij}(t+k) \cdot C_{t+k+1}^{(ij)} \cdot {}_{k+1} v_t \quad (2.14)$$

Esempio Consideriamo il modello di sopravvivenza a due stati (1=vivo, 2=morto), utilizzato per modellare il rischio di un assicurato di età x al momento ($t = 0$) della stipula di una polizza temporanea caso morte della durata di 10 anni. Il flusso di cassa associato al contratto è un capitale C , erogato (per semplicità) all'anniversario di polizza successivo

all'eventuale decesso dell'assicurato. Le probabilità di transizione sono ottenute da un'opportuna tavola di mortalità, quindi $p^{12}(t) = q_{x+t}$ e $p^{11}(t) = p_{x+t}$.

Per determinare il premio equo unico, cioè il valore iniziale del contratto, calcoliamo il valore attuale atteso dei flussi associati:

$$\pi = VAA_{1,0}(C^{(12)}) = \sum_{k=0}^9 {}_k p_x q_{x+k} \cdot C \cdot {}_{k+1} v_0$$

In generale, una serie di flussi di cassa potrebbe contenere sia flussi legati alla permanenza in uno stato ($C_t^{(i)}$) sia alla transizione tra stati (C_t^{ij}). Per una valutazione complessiva sarà necessario sommare i valori attesi ottenuti rispettivamente con la formula 2.10 e con la 2.14.

Se nell'esempio precedente (temporanea caso morte) avessimo voluto calcolare il premio periodico livellato, avremmo avuto:

$$C_t^{(1)} = -\pi \text{ per ogni } t = 0, 1, \dots, 9$$

$$C_t^{(12)} = C \text{ per } t = 1, 2, \dots, 10.$$

Con π soluzione dell'equazione

$$VAA_{1,0}(C^{(1)}) + VAA_{1,0}(C^{(12)}) = 0$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^9 {}_k p^{11}(0) \cdot (-P) \cdot {}_k v_0 + \sum_{k=0}^9 {}_k p_x q_{x+k} \cdot C \cdot {}_{k+1} v_0 = 0$$

2.3.2 Modelli selezionati

La proprietà di Markov permette di semplificare il calcolo delle probabilità congiunte e delle probabilità multiperiodali di transizione. Tuttavia, vi sono diversi casi in cui non può essere accettata, in particolare se si ritiene che la probabilità di passaggio fra uno stato e l'altro dipenda dall'antidurata di permanenza nello stato iniziale: è ragionevole supporre la probabilità di riattivazione di un invalido più alta nel periodo post-invalidazione e tendenzialmente decrescente successivamente. Analogamente, la probabilità di un guasto al motore di una macchina sarà bassa, se il veicolo è nuovo, e crescente in seguito.

Sia ${}_k p_{[n]}^{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{t+k} = j | X_t = i, X_{t-1} = i, \dots, X_{t-n} = i, X_{t-n-1} \neq i)$ la probabilità di transizione in k periodi dallo stato i allo stato j per un individuo che si trova nello stato i da n periodi. Chiaramente, se ${}_k p_{[m]}^{ij}(t) \neq {}_k p_{[n]}^{ij}(t)$ con $m \neq n$, si sta negando la proprietà di Markov.

Da un punto di vista puramente formale, è in realtà possibile ricomprendere nell'ambito dei modelli di Markov anche queste situazioni, a patto di ridefinire in modo adeguato gli stati.

Consideriamo il modello a parametro discreto rappresentato dal processo stocastico X_t a valori nello spazio degli stati $I = \{1, 2, \dots, m\}$, con probabilità di transizione fra gli stati di I che dipendono dall'antidurata di permanenza, con n la massima antidurata considerata. Costruiamo un nuovo modello, rappresentato dal processo stocastico X'_t , a valori nello spazio degli stati I' , definito in modo che:

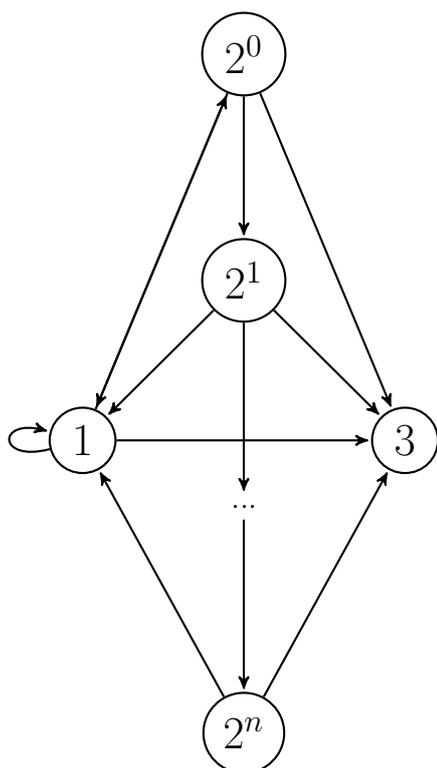
- $X'_t = i^{(0)}$ se $X_t = i$, con un'antidurata pari a 0,
- $X'_t = i^{(1)}$ se $X_t = i$, con un'antidurata pari a 1,
- ...
- $X'_t = i^{(n)}$ se $X_t = i$.

Le probabilità di permanenza nel generico stato $i^{(k)}$ sono sempre nulle (tranne per $i^{(n)}$, le uniche transizioni ammesse sono da $i^{(k)}$ a $i^{(k+1)}$ e da $i^{(k)}$ a uno stato con antidurata nulla $j^{(0)}$.

In realtà, il vantaggio ottenuto con l'introduzione del nuovo modello è soltanto formale: si potrebbe obiettare che abbiamo eliminato la dipendenza dalla traiettoria di X_t , eliminando le possibili traiettorie: affinché $X'_t = 1^{(2)}$, l'individuo deve essere necessariamente transitato per gli stati 1^0 e 1^1 . Dunque gli eventi $X_2 = i^{(2)}$ e $X_0 = i^{(0)}, X_1 = i^{(1)}, X_2 = i^{(2)}$ sono equivalenti.

Esempio (Modello olandese) Consideriamo un modello multistato per la costruzione di basi tecniche per un'assicurazione di invalidità. Un individuo potrà transitare tra gli stati di attivo, invalido e deceduto. Supponiamo che le probabilità di transizione per gli attivi non dipendano dall'antidurata, a differenza delle probabilità di riattivazione e di decesso degli invalidi. Costruiamo i seguenti stati:

- 1 attivo
- 2^0 invalido da 0 periodi
- 2^1 invalido da 1 periodo
- ...
- 2^n invalido da n o più periodi
- 3 deceduto



La matrice di transizione avrà la seguente forma:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p^{11}(t) & p^{12^0}(t) & 0 & \dots & 0 & p^{13}(t) \\ p^{2^01}(t) & 0 & p^{2^02^1}(t) & \dots & 0 & p^{2^03}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{2^n1}(t) & 0 & 0 & \dots & p^{2^n2^n}(t) & p^{2^n3}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dove la prima colonna rappresenta le probabilità di riattivazione, l'ultima colonna le probabilità di morte. Le colonne centrali formano la matrice diagonale delle probabilità di permanenza negli invalidi.

2.3.3 Valori attuariali e Probabilità imprecise

Nel corso della redazione di questa tesi, abbiamo provato a estendere il calcolo dei valori attuali attesi nell'ambito della teoria delle Probabilità imprecise.

In tutti gli esempi riportati finora abbiamo supposto di conoscere con certezza tutte le probabilità di transizione. Tuttavia, in diverse situazioni potremmo non conoscerle con certezza: potremmo, per esempio, conoscere un insieme di matrici di transizione a cui appartiene la vera

matrice di transizione del modello.

Se non conosciamo con esattezza le probabilità di transizione, non possiamo calcolare esattamente il valore attuale atteso di una serie di flussi di cassa. Questo, però, non vuol dire che il valore attuariale possa assumere qualsiasi valore: utilizzando regole di coerenza è possibile trovare un insieme in cui si trovi il vero valore attuariale.

Assumiamo le seguenti ipotesi:

- Sia X_t una catena di Markov non omogenea, con spazio degli stati l'insieme $I = \{1, 2, \dots, m\}$
- Sia $C_t^{(i)}$ il flusso di cassa associato alla permanenza nello stato i all'epoca t
- Siano noti i fattori di attualizzazione ${}_k v_t$
- Supponiamo che per ogni t esista la matrice di transizione $P(t)$, ma che non sia nota.
- Per ogni t siano note le matrici:

$$\underline{P}(t) = \begin{pmatrix} \underline{p}^{11}(t) & \underline{p}^{12}(t) & \dots & \underline{p}^{1m}(t) \\ \underline{p}^{21}(t) & \underline{p}^{22}(t) & \dots & \underline{p}^{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{p}^{m1}(t) & \underline{p}^{m2}(t) & \dots & \underline{p}^{mm}(t) \end{pmatrix} \text{ (matrice di transizione inferiore)}$$

e

$$\overline{P}(t) = \begin{pmatrix} \overline{p}^{11}(t) & \overline{p}^{12}(t) & \dots & \overline{p}^{1m}(t) \\ \overline{p}^{21}(t) & \overline{p}^{22}(t) & \dots & \overline{p}^{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{p}^{m1}(t) & \overline{p}^{m2}(t) & \dots & \overline{p}^{mm}(t) \end{pmatrix} \text{ (matrice di transizione superiore)}$$

tali che il generico elemento $p^{ij}(t)$ di $P(t)$ sia compreso tra il corrispondente elemento di $\underline{P}(t)$ e quello di $\overline{P}(t)$, ovvero $p^{ij}(t) \in [\underline{p}^{ij}(t), \overline{p}^{ij}(t)]$.

Per ogni t la vera matrice di transizione $P(t)$, che esiste ma non è nota, soddisferà le regole di coerenza delle matrici stocastiche, dunque

$$\sum_{j=1}^m p^{ij}(t) = 1 \quad \forall i \in I \quad (2.15)$$

In queste ipotesi siamo interessati a studiare il comportamento del valore attuale atteso di una serie di flussi di cassa $C_t^{(j)}$. Vale ancora la formula (2.10), per cui:

$$VAA_{i,t}(C^{(j)}) = \sum_{k=0}^T {}_k p^{ij}(t) \cdot C_{t+k}^{(i)} \cdot {}_k v_t \quad (2.16)$$

Dove, però, le ${}_k p^{ij}(t)$ non sono note. Dato che ${}_k p^{ij}(t) = [P(t)P(t+1) \cdot \dots \cdot P(t+k-1)]_{i,j}$, possiamo vedere $VAA_{i,t}(C^{(j)})$ come un polinomio in funzione delle probabilità monoannuali di transizione.

In particolare, $VAA_{i,t}(C^{(j)})$ è una funzione a valori reali definita sull'insieme S . S è un sottoinsieme del plurintervallo chiuso ottenuto tramite prodotto cartesiano di tutti gli intervalli $[\underline{p}^{hk}(\tau), \bar{p}^{hk}(\tau)]$ $h, k \in I$, $\tau \in [t, T)$. In particolare, S è il sottoinsieme del plurintervallo tale che valga la regola di coerenza (2.15).

Dunque, l'insieme S è un insieme chiuso, dato che è l'intersezione tra il plurintervallo chiuso e un altro insieme chiuso (l'insieme definito dalla (2.15)). Quindi $VAA_{i,t}(C^{(j)})$ è una funzione continua (in quanto polinomio) definita su un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^{T-t} e a valori in \mathbb{R} . Dunque l'insieme immagine, che comprende tutti i valori coerenti per $VAA_{i,t}(C^{(j)})$ è un intervallo chiuso di \mathbb{R} . In particolare, ha un massimo e un minimo. Quindi, possiamo definire il valore attuale atteso minimo, $\underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)})$, e il valore attuale atteso massimo $\overline{VAA}_{i,t}(C^{(j)})$, con $VAA_{i,t}(C^{(j)}) \in [\underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)}), \overline{VAA}_{i,t}(C^{(j)})]$.

Nel Paragrafo precedente avevamo, inoltre, considerato il valore attuale atteso di tutti i flussi di cassa, definito come:

$$VAA_{i,t} = \sum_{j=1}^m VAA_{i,t}(C^{(j)}) \quad (2.17)$$

In questo nuovo contesto, vorremmo studiare il comportamento di $VAA_{i,t}$, conoscendo i valori attuariali minimi $\underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)})$. In particolare, vorremmo ottenere una limitazione inferiore $\underline{VAA}_{i,t}$.

Mentre il valore vero di $VAA_{i,t}$ è somma di tutti i veri valori attuali attesi (non noti) $VAA_{i,t}(C^{(j)})$, non vale lo stesso per i valori attuali attesi

minimi. In generale, non vale l'uguaglianza

$$\underline{VAA}_{i,t} = \sum_{j=1}^m \underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)}) \quad (2.18)$$

A questo proposito, consideriamo il seguente esempio.

Esempio Sia X_t una catena di Markov a due stati, $I = \{1, 2\}$. Consideriamo le seguenti limitazioni inferiori e superiori per le probabilità di transizione:

$$\underline{P}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall t$$

Consideriamo i flussi di cassa associati: $C_1^{(1)} = C_1^{(2)} = 1$, $C_t^{(1)} = C_t^{(2)} = 0$ per $t \geq 2$.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{VAA}_{i,0}(C^{(1)}) &= 0 \\ \underline{VAA}_{i,0}(C^{(2)}) &= 0 \end{aligned}$$

Invece, il valore attuale atteso di tutti flussi di cassa è

$$VAA_{i,0} = {}_1v_0$$

Infatti, l'individuo riceverà sicuramente un flusso di cassa di importo 1 all'epoca 1, sia che si trovi nello stato 1, che nello stato 2.

Dato che è noto (con certezza) che $VAA_{i,0} = {}_1v_0$, l'unica limitazione inferiore coerente $\underline{VAA}_{i,0}$ per $VAA_{i,0}$ è proprio il valore stesso ${}_1v_0$. Di conseguenza, $\underline{VAA}_{i,0} = {}_1v_0 > 0 = \underline{VAA}_{i,0}(C^{(1)}) + \underline{VAA}_{i,0}(C^{(2)})$.

Si dimostra, invece, che vale, in generale:

$$\underline{VAA}_{i,t} \geq \sum_{j=1}^m \underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)}) \quad (2.19)$$

La dimostrazione è immediata e segue dalle proprietà dell'estremo inferiore. Infatti,

$$\underline{VAA}_{i,t} = \inf \left(\sum_{j=1}^m \underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)}) \right) \geq \sum_{j=1}^m \inf \underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)}) = \sum_{j=1}^m \underline{VAA}_{i,t}(C^{(j)}) \quad (2.20)$$

2.4 Modelli a tempo continuo

Spesso si preferisce definire modelli a tempo continuo, più "eleganti" dal punto di vista formale, ricorrendo poi ad approssimazioni nel discreto per i calcoli. I modelli continuo facilitano lo studio delle relazioni matematiche fra le variabili di interesse, mentre quelli discreti sono gli unici utilizzabili nella pratica per i calcoli. Ad esempio, nella matematica attuariale tradizionale, nonostante nella pratica si utilizzino tavole di mortalità, il modello di sopravvivenza sottostante è continuo. La tavola di mortalità è una tabulazione sugli interi della funzione di ripartizione del modello continuo sottostante.

Consideriamo ancora un insieme finito o numerabile di stati $I = \{1, 2, \dots\}$. Il processo stocastico $X(t)$ rappresenta lo stato occupato al tempo t per $t \in [0, T]$.

Formuliamo la proprietà di Markov a tempo continuo: il processo $X(t)$ è markoviano se, scelti arbitrariamente $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, vale

$$\mathbb{P}(X(t) = j | X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) = \mathbb{P}(X(t) = j | X(t_n) = i_n), \quad t > t_n. \quad (2.21)$$

Nel caso discreto avevamo definito il processo tramite le probabilità monoperiodali di transizione. Le probabilità di transizione su periodi più lunghi venivano poi ottenute come prodotto delle probabilità monoperiodali. Nel continuo i periodi possono essere arbitrariamente brevi, quindi non esiste un periodo di ampiezza minima su cui definire le probabilità di transizione e da cui far derivare tutte le altre. Possiamo ancora definire le probabilità condizionate di transizione su un periodo di durata h :

$${}_h p^{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t+h) = j | X(t) = i)$$

per ogni t, h, i, j . Dal punto di vista operativo è difficile specificare il processo tramite tutte le ${}_h p^{ij}(t)$, che dovranno soddisfare opportune regole di coerenza.

Si definiscono, invece, le intensità di transizione:

Definizione 2.3. *Per un processo markoviano a tempo continuo e spazio degli stati I , definiamo le intensità di transizione fra lo stato i e lo stato j come:*

$$\mu^{ij}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{{}_h p^{ij}(t)}{h}$$

Equivalentemente, $\mu^{ij}(t)$ è tale che ${}_h p^{ij}(t) = \mu^{ij}(t) \cdot h + o(h)$ per $h \rightarrow 0^+$.

Supponiamo che le ${}_h p^{ij}(t)$ siano tali per cui i limiti della Definizione 2.3 esistano. Supponiamo, inoltre, che le intensità siano continue a tratti. Se le intensità di transizione sono costanti rispetto al tempo, il processo è detto omogeneo o stazionario.

Definiamo l'intensità di uscita dallo stato i , come

$$\mu^i(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - {}_h p^{ii}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \sum_{j \neq i} {}_h p^{ij}(t))}{h} = \sum_{j \neq i} \mu^{ij}(t) \quad (2.22)$$

Equivalentemente, μ^i è tale che ${}_h p^{ii}(t) = 1 - \mu^i(t) \cdot h + o(h)$ per $h \rightarrow 0^+$.

Infatti, ${}_h p^{ii}(t) = 1 - \sum_{j \neq i} {}_h p^{ij}(t) = 1 - \sum_{j \neq i} \mu^{ij}(t) \cdot h + o(\Delta h) = 1 - \mu^i(t) \cdot h + o(h)$.

Dalla proprietà di Markov a tempo continuo segue la versione continua della condizione di Chapman-Kolmogorov:

$${}_{h_1+h_2} p^{ik}(t) = \sum_{j \in I} {}_{h_1} p^{ij}(t) {}_{h_2} p^{jk}(t+h_1) \quad \forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}^+ \quad (2.23)$$

Tramite le intensità, possiamo ricavare tutte le probabilità di transizione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_h p^{ij}(t)}{\partial h} &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{{}_{h+\Delta h} p^{ij}(t) - {}_h p^{ij}(t)}{\Delta h} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\sum_k {}_h p^{ik}(t) \cdot \Delta_h p^{kj}(t+h) - {}_h p^{ij}(t)}{\Delta h} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k \neq j} {}_h p^{ik}(t) \cdot \Delta_h p^{kj}(t+h) + {}_h p^{ij}(t) \Delta_h p^{jj}(t+h) - {}_h p^{ij}(t)}{\Delta h} \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove abbiamo applicato la condizione di Chapman-Kolmogorov a ${}_{h+\Delta h} p^{ij}(t)$.

Utilizziamo ora il fatto che $\Delta_h p^{kj}(t+h) = \mu^{kj}(t+h) \Delta h + o(\Delta h)$, se

$k \neq j$. Invece, ${}_{\Delta h}p^{jj}(t+h) = 1 - \mu^j(t+h)\Delta h + o(\Delta h)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_h p^{ij}(t)}{\partial h} &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta h} \left(\sum_{k \neq j} {}_h p^{ik}(t) \mu^{kj}(t+h) \Delta h + {}_h p^{ij}(t) (1 - \mu^j(t+h)\Delta h) - {}_h p^{ij}(t) + o(\Delta h) \right) \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\sum_{k \neq j} {}_h p^{ik}(t) \mu^{kj}(t+h) - {}_h p^{ij}(t) \mu^j(t+h) + \frac{o(\Delta h)}{h} \right) \\ &= \sum_{k \neq j} {}_h p^{ik}(t) \mu^{kj}(t+h) - {}_h p^{ij}(t) \mu^j(t+h) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Abbiamo ottenuto così il sistema delle equazioni differenziali prospettive di Kolmogorov. Tutte le probabilità di transizione ${}_h p^{ij}(t)$ sono ottenute risolvendo il sistema differenziale, ponendo come condizione iniziale ${}_0 p^{ii}(t) = 1, {}_0 p^{ij}(t) = 0, i \neq j$ (a patto che si riesca a risolverlo, eventualmente per via numerica).

Possiamo applicare lo stesso ragionamento alle probabilità condizionate di permanenza in uno stato, ovvero a

$${}_h \bar{p}^{ii}(t) = \mathbb{P}(X(\tau) = i, t < \tau \leq t+h | X(t) = i) \quad (2.26)$$

Si ha che:

$${}_{h+\Delta h} \bar{p}^{ii}(t) = {}_h \bar{p}^{ii}(t) {}_{\Delta h} \bar{p}^{ii}(t+h) = {}_h \bar{p}^{ii}(t) (1 - \mu^i(t+h)\Delta h + o(\Delta h))$$

Quindi

$$\frac{\partial {}_h \bar{p}^{ii}(t)}{\partial h} = -{}_h \bar{p}^{ii}(t) \mu^i(t+h)$$

Allora

$${}_h \bar{p}^{ii}(t) = e^{-\int_0^h \mu^i(t+u) du} \quad (2.27)$$

Quindi, se conosciamo le intensità di uscita da uno stato, possiamo determinare le probabilità condizionate di permanenza e viceversa.

Esempio (Modello di sopravvivenza semplice) Consideriamo il modello di sopravvivenza semplice per descrivere la durata aleatoria di vita di un individuo di età x all'istante $t = 0$. Varrà $X(t) = 1$ se l'individuo è in vita al tempo t , altrimenti $X(t) = 2$.

Le probabilità di permanenza/transizione sono nella notazione attuariale ${}_h p^{11}(t) = {}_h p_{x+t}$ e ${}_h p^{12}(t) = {}_h q_{x+t}$. Dato che lo stato 2 è assorbente, ${}_h p^{11}(t) = {}_h \bar{p}^{11}(t)$.

L'unica intensità di transizione non banale è $\mu^{12} = \mu^1$, grazie a cui si ottiene per 2.27:

$${}_h p^{11}(t) = e^{-\int_0^h \mu^1(t+u) du}$$

Le ${}_h p^{12}(t)$ possono essere ottenute per differenza come $1 - e^{-\int_0^h \mu^1(t+u) du}$, oppure direttamente dal sistema di Kolmogorov, sfruttando il fatto che l'intensità di uscita dallo stato 2 è nulla:

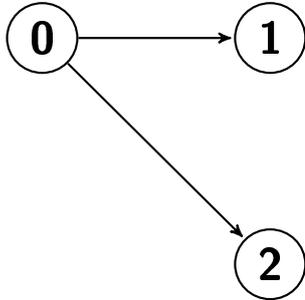
$$\frac{\partial {}_h p^{12}(t)}{\partial h} = {}_h p^{11}(t) \mu(t+h)$$

Quindi:

$${}_h p^{12}(t) = \int_0^h {}_u p^{11}(t) \mu(t+u) du$$

Da un processo markoviano a tempo continuo, possiamo ottenere una catena di Markov a tempo discreto, osservando lo stato occupato in una successione di epoche, ad esempio ogni anno: $\{X(0), X(1), \dots, X(t)\}$. Conoscendo per ogni t le intensità di transizione del processo a tempo continuo, si ottiene la matrice delle probabilità di transizione del processo a tempo discreto risolvendo il sistema di Kolmogorov. Se le intensità sono costanti, il processo discreto è stazionario.⁴

Consideriamo ad esempio il modello a più cause di eliminazione (o a decrementi multipli), limitandoci per semplicità, a 2 cause. Consideriamo gli stati 0 (presente nella collettività), 1 (uscito per la prima causa) e 2 (uscito per la seconda causa).



Gli stati 1 e 2 sono assorbenti, quindi una volta lasciato lo stato 0 non è possibile farvi ritorno. Di conseguenza è equivalente considerare le \bar{p}^{00} o le p^{00} . Dunque date $\mu^{01}(t), \mu^{02}(t)$ e $\mu^{12} = 0$, si calcola:

$p^{00}(t) = e^{-\int_0^t \mu^0(t+u) du}$, con $\mu^0(t) = \mu^{01}(t) + \mu^{02}(t)$. Inoltre,

$$p^{01}(t) = \int_0^t {}_u p^{00}(t) \mu^{01}(t+u) du = \int_0^t e^{-\int_0^1 \mu^0(t+v) dv} \mu^{01}(t+u) du$$

⁴In realtà si possono trovare condizioni più deboli rispetto alla costanza delle intensità. Ad esempio, basta che siano periodiche di periodo pari all'ampiezza degli intervalli di tempo considerati nella discretizzazione

$$p^{02}(t) = \int_0^1 {}_u p^{00}(t) \mu^{02}(t+u) du = \int_0^1 e^{-\int_0^1 \mu^0(t+v) dv} \mu^{02}(t+u) du$$

Se le intensità μ^{0i} sono costanti, allora p^{00}, p^{01}, p^{02} non dipendono da t . In realtà se consideriamo la "versione discreta" $\{X_0 = X(0), X_1 = X(1), \dots\}$ è sufficiente una condizione più debole per la stazionarietà, ad esempio se le μ^{0i} sono periodiche di periodo 1. Si ha che $\mu(0+u) = \mu(1+u) = \dots = \mu(k+u)$, quindi $p^{0i}(0) = p^{0i}(1) = \dots = p^{0i}(k)$.

2.5 Valori attuariali nel continuo

Ricaveremo ora la formula per il valore attuale medio di flussi di cassa pagati nel continuo. Il ragionamento che seguiremo è analogo a quello adottato nel caso discreto, ma - prima di procedere - occorre definire cosa intendiamo per flussi di cassa nel continuo: se tutti abbiamo ben presente il significato di una successione discreta di flussi di cassa (pagamenti/entrate a determinate date), meno chiaro è il caso continuo.

Un agente riceve un flusso di cassa continuo se, anziché ricevere pagamenti in certe date, questi sono spalmati su un intervallo di tempo continuo. Dal punto di vista interpretativo, possiamo considerare degli intervalli di tempo infinitesimali $(t, t+dt]$ e immaginare che in ognuno di essi si riceva una quantità di denaro c_t , in modo che il pagamento cumulato da 0 a t sia $C(t)$, per ogni t .

Nel caso di una rendita costante pagata nel continuo, la somma $C(t)$ viene erogata uniformemente nell'intervallo $(0, t]$, per cui $\frac{C(t)}{t} = c$ e - per ogni $t, \Delta t$ - vale $C(t+\Delta t) - C(t) = c \cdot \Delta t$. Diversamente dal caso discreto, non è possibile definire la somma pagata in t , ma solo quella ricevuta su intervalli di tempo.

Nelle rendite costanti non varia nel tempo la velocità con cui aumenta il capitale $C(t)$. Possiamo generalizzare, considerando la possibilità che $C(t)$ aumenti o diminuisca a un tasso di crescita non costante. A questo fine, definiamo il flusso (o intensità) di pagamento come segue:

Definizione 2.4. *Supponendo che il processo di pagamento $C(t)$ sia derivabile a tratti (in $\mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\}$), il flusso di pagamento in $t \neq t_1, t_2, \dots$ è dato da*

$$c_t = \frac{dC(t)}{dt} \quad (2.28)$$

Di conseguenza possiamo scrivere $C(t)$ come:

$$C(t) = \int_0^t c_u du \quad (2.29)$$

Il flusso di pagamento così definito non va assolutamente confuso con i flussi di cassa, dato che c_t è un'intensità, un tasso di variazione.

Consideriamo ora un modello di Markov a tempo continuo. Supponiamo che ad ogni istante t trascorso nello stato j sia associato un flusso di pagamento $c_t^{(j)}$. Possiamo calcolare il valore attuale atteso del pagamento continuo associato a j , per un individuo nello stato i in t , seguendo lo stesso approccio del caso discreto. Si tratta di un valore atteso, dato che per ogni τ l'individuo riceve $c_\tau^{(j)}$ se è presente in j , altrimenti il flusso in τ è nullo. Se nel discreto dovevamo sommare rispetto al tempo una successione di pagamenti, ora consideriamo l'integrale su t delle intensità (flussi) di pagamento.

Consideriamo ancora il generico fattore di attualizzazione ${}_h v_t$. Allora il valore attuale atteso sarà

$$VAA_{i,t}(C^{(j)}) = \mathbb{E} \left[\int_0^{T-t} [X(t+h) = j | X(t) = i] \cdot c_{t+h}^{(j)} \cdot {}_h v_t dh \right] \quad (2.30)$$

dove il fattore fra parentesi quadre è l'indicatore dell'evento in base al quale si ha o non si ha il pagamento del flusso di cassa. Possiamo scambiare l'ordine di integrazione tra valore atteso e integrale⁵ e che il valore atteso di un indicatore di evento è la probabilità dell'evento, otteniamo:

$$VAA_{i,t}(C^{(j)}) = \int_0^{T-t} {}_h p^{ij}(t) \cdot c_{t+h}^{(j)} \cdot {}_h v_t dh \quad (2.31)$$

Per ottenere questa formula non è, in realtà, necessario che il modello sia markoviano. In questo caso però le probabilità ${}_h p^{ij}(t)$ possono essere ottenute, risolvendo il sistema di Kolmogorov (e quindi dalle intensità di transizione).

Più in generale, consideriamo anche la possibilità di somme ricevute o pagate una tantum al passaggio da uno stato all'altro. Per loro natura non possono essere rappresentate da un flusso continuo di pagamento. In corrispondenza del passaggio al tempo $t+h$ dallo stato j in k l'individuo riceverà la somma $C^{(jk)}(t+h)$. Allora possiamo scrivere il valore attuariale delle somme che l'individuo riceverà (pagherà) per passaggi da j a

⁵La funzione integranda è misurabile e ha valore atteso finito (supporto limitato)

k come:

$$VAA_{i,t}(C^{(jk)}) = \int_0^{T-t} {}_h p^{ij}(t) \mu^{jk}(t+h) \cdot C^{(jk)}(t) \cdot {}_h v_t dh \quad (2.32)$$

Questa formula non è immediata da ricavare, ora la dimostreremo brevemente, nell'ipotesi che la transizione da j a k avvenga esattamente una volta, con differimento aleatorio $H_{i,t}$ (ovvero che avvenga all'istante $t + H_{i,t}$).

In questa ipotesi, il valore attuale delle somme che riceverà per passaggi da j a k è una variabile aleatoria che vale $C^{jk}(t+h) \cdot {}_h v_t$ con densità di probabilità pari alla densità della variabile aleatoria $H_{i,t}$. Infatti, l'assicurato riceverà in $t+h$ la somma $C^{(jk)}(t+h)$ se e solo se $H_{i,t} = h$.

Ora ci resta da dimostrare che la densità di $H_{i,t}$ è pari a:

$$f_{H_{i,t}}(h) = {}_h p^{ij}(t) \mu^{jk}(t+h) \quad (2.33)$$

Per definizione di densità, abbiamo che:

$$\begin{aligned} f_{H_{i,t}}(h) &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(h < H \leq h + \Delta h)}{\Delta h} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X(t+h+\Delta h) = k, X(t+h) = j | X(t) = i)}{\Delta h} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X(t+h+\Delta h) = k | X(t+h) = j) \cdot \mathbb{P}(X(t+h) = j | X(t) = i)}{\Delta h} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{(\mu^{jk}(t+h) \cdot \Delta h + o(\Delta h)) \cdot {}_h p^{ij}(t)}{\Delta h} \\ &= {}_h p^{ij}(t) \mu^{jk}(t+h) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Per passare dalla prima alla seconda riga, abbiamo utilizzato il fatto che l'intervallo $(h, h + \Delta h]$ è arbitrariamente piccolo e al suo interno avviene al massimo una transizione, definitivamente per $\Delta h \rightarrow 0$. Fra la seconda e la terza riga abbiamo, invece, applicato la proprietà di Markov.

2.6 Valutazione di un fondo pensioni

Concludiamo il capitolo con un'applicazione dei modelli di Markov non omogenei per valutare gli oneri di un fondo pensioni. Seguiamo l'impostazione della nota [5] dei prof. Pelessoni e Zecchin.

Consideriamo un fondo pensioni che eroghi prestazioni agli iscritti o ai loro familiari in caso di cessazione dell'attività lavorativa per invalidità (i), vecchiaia (v), altra causa (w) o morte sotto forma di rendita. Supponiamo che un generico individuo⁶ possa trovarsi nei seguenti stati, denotati con lettere per una maggiore facilità di lettura: *a* attivo

i pensionato di invalidità

v pensionato di vecchiaia

w pensionato per altra causa

sa nucleo superstite di attivo

sk nucleo superstite di pensionato nello stato $k \in \{i, v, w\}$

ea eliminato dallo stato di attivo (se l'individuo attivo decede senza lasciare nucleo superstite)

ek eliminato dallo stato di pensionato nello stato k (senza nucleo superstite)

esa eliminato dallo stato di nucleo superstite di attivo

esk eliminato dallo stato di nucleo superstite di pensionato nello stato k

Per quanto riguarda gli ultimi due stati, l'eliminazione può avvenire oltre che per morte, anche per il venir meno dei requisiti per la pensione ai superstiti.

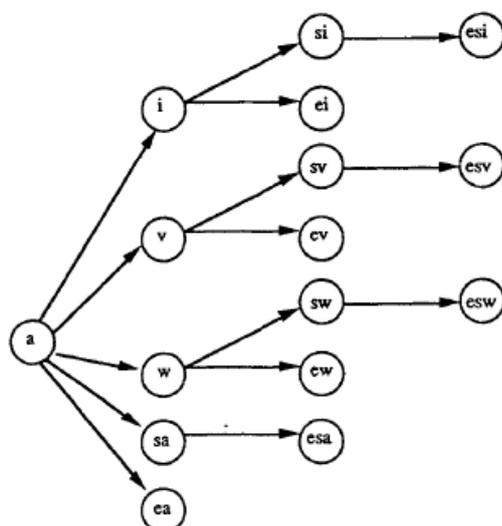
In ogni istante di tempo l'individuo si trova in uno e uno solo degli stati, che indichiamo con $S(t) = j, j \in D$.

Una volta definiti gli stati, il passo successivo è stabilire le regole di transizione. Consideriamo possibili solo le seguenti transizioni dirette (senza passare per altri stati intermedi):

- dallo stato di attivo a quello di pensionato di invalidità, vecchiaia, per altra causa o a quello di eliminato dallo stato di attivo,
- dallo stato di pensionato a quello di nucleo superstite o eliminato corrispondente,
- dallo stato di nucleo superstite a quello di eliminato corrispondente

Non sono possibili altri passaggi diretti. La situazione è molto più chiara se vista dal grafo corrispondente:

⁶Intenderemo con individuo il generico assicurato o il rispettivo nucleo superstite.



Questo modello ha otto stati assorbenti, ovvero gli otto stati di "eliminato". Inoltre vi è una sorta di gerarchia: partendo da uno stato è possibile o rimanere in quello stato, oppure passare a uno stato del livello successivo. Non è possibile tornare indietro. I livelli sono quattro e costituiscono una partizione dello spazio degli stati, chiameremo: $D_1 = \{a\}$, $D_2 = \{i, v, w, sa, ea\}$, $D_3 = \{si, ei, sv, cv, sw, cw, esa\}$ e $D_4 = \{esi, esv, esw\}$.

Supponiamo che l'evoluzione dello stato occupato dall'individuo possa essere descritto tramite un processo di Markov a parametro continuo. Finora abbiamo sempre adottato il tempo come parametro del processo stocastico, in realtà nulla vieta di parametrizzarlo tramite l'età. Fissando l'attenzione sul generico individuo, vi è una corrispondenza biunivoca fra tempo ed età: è sufficiente fissare come istante iniziale $t = 0$ la data di nascita dell'individuo.

Dunque, x rappresenta l'età dell'individuo (se in vita, altrimenti l'età convenzionale pari all'età alla morte più l'antidurata dal decesso). Dal punto di vista della notazione, le probabilità di transizione (in funzione delle età) saranno le ${}_h p_x^{ij}$ ($= {}_h p^{ij}(t)$, se $t = 0$ alla nascita). Supponiamo di conoscere tutte le intensità di transizione.

La struttura gerarchica del modello permette diverse semplificazioni: la più evidente è che - per qualsiasi $k \in D$ - ${}_h p_x^{kk} = {}_h \bar{p}_x^{kk}$. Se un individuo è in k sia all'età x che $x + k$, allora vi è rimasto per tutto l'intervallo

$[x, x + k]$. Di conseguenza:

$${}_h p_x^{kk} = e^{-\int_0^h \mu^k(x+u)du} \quad (2.35)$$

Tutte le altre probabilità sono ottenute risolvendo il sistema (prospettivo) di Kolmogorov (2.25). Per x fissata:

$$\frac{d_t p_x^{hj}}{dh} = \sum_{k \neq j} {}_t p_x^{hk} \mu^{kj}(x+h) - {}_h p_x^{hj} \mu^j(t+h) \quad (2.36)$$

Per $h = j$, il primo addendo a secondo membro è nullo: se k è in un livello inferiore nella gerarchia rispetto a h , allora ${}_t p_x^{hk} = 0$. Se è in un livello superiore, $\mu^{kh} = 0$. Dunque,

$$\frac{d_t p_x^{hh}}{dt} = -{}_h p_x^{hh} \mu^h(t+h) \quad (2.37)$$

E' un'equazione differenziale di facile risoluzione:

$${}_h p_x^{kk} = e^{-\int_0^h \mu^k(x+u)du} \quad (2.38)$$

Se $h \in D_n$ e $j \in D_{n+1}$, $n \in \{1, 2, 3\}$, e se è possibile la transizione diretta da h a j (${}_t p_x^{hj} \neq 0$),

$$\frac{d_t p_x^{hj}}{dt} = {}_t p_x^{hh} \mu^{hj}(x+t) - {}_t p_x^{hj} \mu^j(t+h) \quad (2.39)$$

Se $h \in D_n$ e $j \in D_{n+2}$, $n \in \{1, 2\}$, e ${}_t p_x^{hj} \neq 0$,

$$\frac{d_t p_x^{hj}}{dt} = {}_t p_x^{hl} \mu^{lj}(x+t) - {}_t p_x^{hj} \mu^j(t+h) \quad (2.40)$$

Dove con l abbiamo indicato lo stato dove necessariamente si transita per passare da h a j , ad esempio se $h = a$ e $j = si$, $l = i$. Per passare dallo stato di pensionato di vecchiaia a quello di eliminato da superstiti di pensionato di vecchiaia, si transita necessariamente per lo stato sv .

Infine, se $j \in D_n$, ovvero $j = es^*$,

$$\frac{d_t p_x^{ak}}{dt} = {}_t p_x^{a,s^*} \mu^{s^*,es^*}(x+t) \quad (2.41)$$

Dato che se $\mu^{k,es^*}(x+t) = 0$, se $k \neq s^*$.

Ogni equazione del sistema è un'equazione differenziale lineare del primo ordine, per cui possiamo applicare la formula risolutiva e si ottiene:

$${}_t p_x^{hj} = \int_0^t {}_u p_x^{hh} \mu^{hj}(x+u) {}_{t-u} p_{x+u}^{jj} \quad h \in D_n, k \in D_{n+1}, {}_t p_x^{hj} \neq 0 \quad (2.42)$$

$${}_t p_x^{hj} = \int_0^t {}_u p_x^{hhl} \mu^{lj}(x+u) {}_{t-u} p_{x+u}^{jj} du \quad h \in D_n, l \in D_{n+1}, k \in D_{n+2}, {}_t p_x^{hl}, {}_t p_x^{lj} \neq 0 \quad (2.43)$$

$${}_t p_x^{aj} = \int_0^t {}_u p_x^{al} \mu^{lk}(x+u) du, \quad k \in D_4, k = es^*, l = s^* \quad (2.44)$$

Note le intensità di transizione, si determinano prima le probabilità di permanenza, secondo la formula 2.38. Queste vengono sostituite nelle equazioni sopra riportate. Partendo dalla prima, si determina la soluzione e si sostituisce nell'equazione seguente e così via, determinando tutte le probabilità subordinate di transizione.

2.6.1 Valori attuariali di contributi e oneri

Sia $t = 0$ l'epoca di valutazione del valore attuale medio dei contributi e degli oneri relativi al generico individuo di età $x + h$, entrato nel gruppo degli attivi a età x . Supponiamo che i contributi e gli oneri siano pagati nel continuo, in particolare il flusso medio dei contributi versati in t è dato da:

$$c([x] + h, t) = P([x] + h, t) s([x] + h, t)$$

con $= P([x] + h, t)$ aliquota contributiva e $s([x] + h, t)$ flusso medio di salario. Secondo la notazione che abbiamo utilizzato per i modelli multistato, il flusso di cassa associato allo stato di attivo è $c^a(t) = -c([x] + h, t)$ e possiamo applicare direttamente la formula 2.31:

$$VAA_{a,0}(c^a) = \int_0^{\xi-(x+h)} {}_t p_{x+h}^{aa} c([x] + h, t) {}_t v_0 dt \quad (2.45)$$

dove ξ è l'età di vecchiaia, ossia la massima età raggiungibile da un attivo.

Per quanto riguarda gli oneri, sia $b_{x,h}^{(k)}(u, z)$ il flusso medio di pensione che riceverà l'individuo, se entrerà nello stato di pensionato per la causa k ($k \in D_2$) all'epoca u , ossia con anzianità lavorativa pari a $h + u$ e pensionato da z anni. Nella notazione dei modelli multistato, $c^{(k)}(t) = b_{x,h}^{(k)}(u, z)$. Ora non possiamo applicare direttamente la formula 2.31,

dato che il flusso di cassa $c_t^{(k)} = b_{x,h}^{(k)}(u, z)$ non è certo, ma dipende in realtà anche dall'epoca di pensionamento, oltre che dal tempo. Possiamo però generalizzare la formula, cercando di seguire la stessa logica con cui l'abbiamo ricavata.

L'individuo riceverà un flusso di pagamento $b_{x,h}^{(k)}(u, z)$ in $t = x + h + u + z$ se e solo se andrà in pensione al tempo u per la causa k e vi resterà per z anni. Consideriamo la variabile aleatoria U_k , che indica l'istante in cui l'individuo entra nello stato k .

Condizionatamente a $U_k = u$, possiamo applicare la formula 2.31:

$$VAA_{a,0}(C^{(k)}|U_k = u) = \int_0^{\omega_k - (x+h+u)} \tau - u p_{x+h+u}^{kk} b_{x,h}^{(k)}(u, \tau - u)_{u+\tau} v_0 d\tau, \quad (2.46)$$

Applicando la proprietà di disintegrabilità rispetto a $U_k = u$,

$$\begin{aligned} VAA_{a,0}(C^{(k)}) &= \int_0^{\xi - (x+h)} \mathbb{P}(U_k = u) \left(\int_0^{\omega_k - (x+h+u)} \tau - u p_{x+h+u}^{kk} r_{x,h}^{(k)}(u, \tau - u)_t v_0 d\tau \right) du \\ &= \int_0^{\xi - (x+h)} {}_u p_{x+h}^{aa} \mu^{ak}(x + h + u) \left(\int_0^{\omega_k - (x+h)} \tau - u p_{x+h+u}^{kk} r_{x,h}^{(k)}(u, t - u)_{u+\tau} v_0 d\tau \right) du \end{aligned} \quad (2.47)$$

Con lo stesso ragionamento si possono trovare gli oneri relativi ad ogni stato.

2.6.2 Valori approssimati

Dal punto di vista pratico, conviene ricorrere a espressioni approssimate degli integrali ottenuti sopra. Riconsideriamo l'espressione 2.45 per il valore attuale atteso dei contributi. Possiamo dividere l'intervallo $[0, \xi - (x + h)]$ in intervalli annuali e sfruttare la linearità dell'integrale:

$$VAA_{a,0}(c^{(a)}) = \sum_{s=0}^{\xi-x-1} \int_0^1 {}_{s+\tau} p_{x+h}^{aa} c_{x,h}(s + \tau)_{s+t} v_0 d\tau \quad (2.48)$$

Approssimando ogni integrale con la formula del punto medio ⁷, si ottiene:

$$VAA_{a,0}(c^{(a)}) = \sum_{s=0}^{\xi-x-1} {}_{s+\frac{1}{2}} p_{x+h}^{aa} c_{x,h}\left(s + \frac{1}{2}\right)_{s+\frac{1}{2}} v_0 \quad (2.49)$$

⁷ $\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b - a)$

Dal punto di vista interpretativo, otterremmo la stessa formula pensando che i contributi vengano versati alla metà di ogni anno e applicando la formula dei modelli discreti 2.10. Trascurando la differenza tra pagamenti a inizio o a metà anno, otterremmo le stesse espressioni trovate nella sezione sui modelli discreti.

Capitolo 3

Stazionarietà ed equilibrio dei sistemi NDC

Abbiamo ora tutti gli elementi per entrare nel vivo dell'analisi della stabilità finanziaria dei fondi pensione a contributi nozionalmente definiti. Nei paragrafi 3.1 e 3.2 chiariremo alcuni aspetti notazionali, introdurremo alcune ipotesi sull'evoluzione dei salari e della popolazione, in particolare, introdurremo un semplice modello a tre stati, basandoci sull'articolo [3] di Devolder, Levantesi e Menzietti.

Nei paragrafi successivi forniremo dei risultati teorici riguardo alle condizioni per l'equilibrio automatico di bilancio, dimostrati in [8] da Valdes-Prieto, riscritti nella notazione dei paragrafi 3.1 e 3.2.

3.1 Popolazione attiva e beneficiaria

Consideriamo un sistema pensionistico che paghi benefici sotto forma di rendita vitalizia agli iscritti che abbiano maturato certi requisiti. Per il momento supponiamo che questi non dipendano dall'anzianità di servizio. Possiamo rappresentare l'evoluzione della popolazione, tramite un semplice modello a tre stati.

Assumeremo che un assicurato i della popolazione si possa trovare in uno dei seguenti stati:

1 = attivo

2 = pensionato di vecchiaia

3 = deceduto

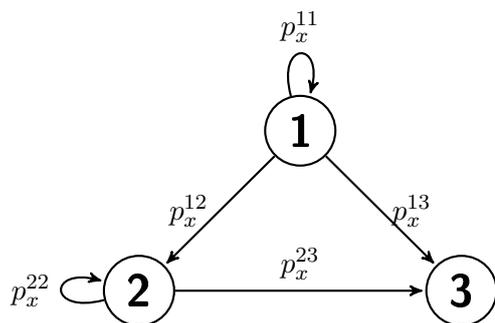


Figura 3.1: Grafo delle possibili transizioni tra gli stati

La famiglia di variabili aleatorie $\{X_t^{(i)}, t = 0, 1, 2, \dots, T\}$ rappresenta lo stato in cui si trova l'assicurato i al tempo t sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, 3\}$. Supponiamo, come si vede in figura 3.1, che i pensionati non possano tornare allo stato di attivo, dunque le uniche transizioni possibili sono: da attivo a pensionato, da attivo a deceduto, da pensionato a deceduto.

Supponiamo che le transizioni avvengano all'inizio dell'anno. Assumiamo che le probabilità di transizione dipendano dall'età e dal tempo, ma non dall'antidurata di permanenza nello stato (abbiamo supposto che i requisiti per la pensione non dipendano dall'anzianità). Dunque $X_t^{(i)}$ può essere trattato come catena di Markov non omogenea a tempo discreto, sull'orizzonte temporale finito $[0, T]$.

Si potrebbe discutere a lungo sull'accettabilità di questa ipotesi, dato che spesso i sistemi previdenziali prevedono un requisito di anzianità lavorativa, oltre a quello di età¹. In questi casi l'informazione sugli anni di anzianità di assicurazione può essere discriminante per giudicare la possibilità di transizione fra lo stato 1 e lo stato 2. Tuttavia, sarebbe computazionalmente complesso tenere conto delle antidurate di assicurazione. Per questo motivo sarà questo il modello che utilizzeremo nell'elaborazione pratica nel Capitolo 4.

Nei modelli multistato del Capitolo 2 l'attenzione era su un generico individuo, abbiamo visto come non faccia differenza considerare probabilità di transizione in termini del tempo o dell'età: è sufficiente scegliere opportunamente l'istante $t = 0$. Avendo ora a che fare con una collettività di individui, non si ha più corrispondenza biunivoca fra età, caratteristica del singolo individuo, e tempo, che è lo stesso per tutti.

¹In Italia, ad oggi, è ammesso il pensionamento anticipato, se sono stati maturati 42 anni e 10 mesi di contributi (per i maschi).

Le probabilità dipenderanno, in generale, sia dal tempo che dall'età, indicheremo con:

$${}_n p_x^{ij}(t) = \mathbb{P}\{X_{t+n} = j | X_t = i\} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.1)$$

la probabilità che un individuo di età x , presente nel gruppo i all'epoca t , sia nel gruppo j all'epoca $t+n$. Omettiamo il pedice n , quando $n = 1$. In particolare ${}_n p_x^{31}(t), {}_n p_x^{32}(t), {}_n p_x^{21}(t) = 0 \quad \forall x, t, n$ (cioè $p_x^{ij}(t) = 0$ se $j < i$)

Dunque la probabilità che un individuo nello stato i di età x sia ancora in quello stato ad età $x+n$ coincide con la probabilità di permanenza in i per n anni, dato che una volta lasciato uno stato, non è più possibile farvi ritorno. Indicheremo questa probabilità con:

$${}_n p_x^{ii}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} p_{x+k}^{ii}(t+k), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.2)$$

Consideriamo una collettività aperta a nuovi ingressi che conta $N(t)$ individui all'epoca t , ripartiti fra gli stati $\{1, 2, 3\}$. A ogni individuo è associata la rispettiva catena markoviana $\{X_t^{(i)}\}_{t=0, \dots, T}$. Denotiamo con $\tilde{N}^i(x, t)$ il numero (aleatorio) di individui di età x nello stato i all'anno t , ovvero

$$\tilde{N}^i(x, t) = \sum_{j \in J_x(t)} [X_t^{(j)} = i], \quad (3.3)$$

dove $J_x(t)$ è l'insieme degli individui di età x e gli addendi della sommatoria sono indicatori di evento.

$\tilde{Z}^i(x, t)$ sarà, invece, il numero di nuovi ingressi nello stato i di età x nell'anno t . Questi potranno provenire da altri stati j , con $j < i$, o da nuovi ingressi nella collettività, se $i = 1$.

Gli $\{\tilde{N}^i(x, t), \tilde{Z}^i(x, t)\}$ sono aleatori per $t > 0$: consideriamo i rispettivi valori attesi calcolati secondo lo stato di informazione all'epoca di valutazione 0

$$N^i(x, t) = \mathbb{E}[\tilde{N}^i(x, t)], \quad Z^i(x, t) = \tilde{Z}^i(x, t)$$

Nel seguito trascureremo il modello probabilistico sottostante, limitandoci a considerare i valori attesi $N^i(x, t), Z^i(x, t)$, anziché i relativi numeri aleatori, adottando un approccio deterministico. Consapevoli che la previsione delle determinazioni delle grandezze di interesse è tutt'altro che deterministica, mitigheremo parzialmente il problema, analizzando i risultati sotto diversi scenari.

Siano rispettivamente

$$N^i(t) = \sum_x N^i(x, t) \quad (3.4)$$

$$Z^i(t) = \sum_x Z^i(x, t) \quad (3.5)$$

il numero atteso di individui nello stato i e di nuovi ingressi nello stato i all'epoca t .

Un aspetto delicato del modello è la scelta delle ipotesi sull'evoluzione dei nuovi ingressi nello stato di attivo, ovvero di $Z^1(x, t)$, $t = 1, \dots, T$. Una scelta possibile è supporre nota l'evoluzione del totale degli attivi per età $N^1(x, t)$, basandosi su proiezioni della popolazione, ad esempio considerando le proiezioni sulla popolazione generale redatte dall'Istat e formulando opportune ipotesi sull'evoluzione del tasso di occupazione.

Un'altra via possibile è assumere noto il tasso di crescita della popolazione in età attiva $\rho(t)$ e la distribuzione delle età di ingressi negli attivi $d_z(x, t)$, dunque il numero atteso dei nuovi ingressi per ogni età è ricavato indirettamente, come segue:

$$N^1(t) = N^1(t-1)(1 + \rho(t-1)) \quad (3.6)$$

Mentre i nuovi ingressi sono:

$$\begin{aligned} Z^1(t) &= \mathbb{E}[\tilde{Z}^1(t)] = N^1(t) - \mathbb{E}\left[\sum_{h=1}^{N^1(t-1)} [X_t^{(h)} = 1 | X_{t-1}^{(h)} = 1]\right] \\ &= N^1(t) - \mathbb{E}\left[\sum_x \sum_{h=1}^{N^1(x-1, t-1)} [X_t^{(h)} = 1 | X_{t-1}^{(h)} = 1]\right] \quad (3.7) \\ &= N^1(t) - \sum_x N^1(x-1, t-1) p^{11}(x-1, t-1) \end{aligned}$$

Ottenuto così per differenza $Z^1(t)$ e nota la distribuzione $d_z(x, t)$ delle età di ingresso, si ottiene:

$$Z^1(x, t) = Z^1(t) d_z(x, t) \quad (3.8)$$

Infine si calcola la popolazione attiva di età x in t :

$$N^1(x, t) = N^1(x-1, t-1) p_{x-1}^{11}(t-1) + Z^1(x, t) \quad (3.9)$$

Iterando,

$$N^1(x, t) = N^1(x-t, 0) p_{x-t}^{11}(0) + \sum_{h=0}^{T'} Z^1(x-h, t-h) p_{x-h}^{11}(t-h) \quad (3.10)$$

dove si è posto $T' = \min(t - 1, x - \alpha)$, $x - t \geq \alpha$ con α la minima età di ingresso negli attivi.

Il primo addendo rappresenta la quota degli attivi all'istante iniziale, rimasti attivi fino all'epoca t , mentre il secondo addendo rappresenta le nuove generazioni di attivi, calcolate secondo il procedimento appena descritto.

Il numero medio di pensionati di età x all'epoca t è dato da:

$$\begin{aligned} N^2(x, t) &= N^2(x - 1, t - 1)p_{x-1}^{22}(t - 1) + Z^2(x, t) \\ &= N^2(x - 1, t - 1)p_{x-1}^{22}(t - 1) + N^1(x - 1, t - 1)p_{x-1}^{12}(t - 1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dove le probabilità di pensionamento $p_x^{12}(t)$ terranno conto sia dei requisiti che della propensione al pensionamento. Per ora non facciamo ulteriori ipotesi, ma è ragionevole considerarle nulle fino alla minima età pensionabile β e pari a 1 dopo una certa età γ .

Il numero medio di nuovi entranti nel gruppo dei pensionati è $Z^2(x, t) = N^1(x - 1, t - 1)p_{x-1}^{12}(t - 1)$, dato che gli ingressi possono avvenire solamente dal gruppo 1 degli attivi.

Ponendo $T'' = \min(t - 1, x - \beta)$, possiamo scrivere

$$N^2(x, t) = N^2(x - t, 0)_t p_{x-t}^{22}(0) + \sum_{h=0}^{T''} Z^2(x - h, t - h)_h p_{x-h}^{22}(t - h), \quad x - t \geq \beta \quad (3.12)$$

Ancora una volta il primo addendo rappresenta la proporzione di pensionati già presenti nel gruppo dei pensionati iniziali, mentre il secondo le nuove generazioni di pensionati.

Infine il numero delle persone morte ad età x all'epoca t è ottenuto come

$$Z^3(x, t) = N^1(x - 1, t - 1)p_{x-1}^{13}(t - 1) + N^2(x - 1, t - 1)p_{x-1}^{23}(t - 1). \quad (3.13)$$

Assegnando le numerosità iniziali $\{N^i(x, 0)\} \forall i, x$, il tasso di crescita degli attivi $\rho(t)$ per $t = 0, 1, \dots$ e la distribuzione degli ingressi negli attivi $d_z(x, t)$ al variare di t , il modello è completamente specificato.

3.2 Valor medio di oneri e contributi

Introduciamo ora delle ipotesi semplificatrici sulla dinamica dei salari: supponiamo che il salario individuale - pagato annualmente e anticipatamente - dipenda dall'età e dal tempo, ma non dall'anzianità lavorativa.

Supponiamo dunque che tutti gli assicurati di età x percepiscano un salario $s(x, t)$ all'inizio dell'anno t . Interpretiamo $s(x, t)$ come salario medio degli assicurati di età x .

Supponiamo, inoltre, che il tasso di crescita annuo dei salari $\xi(t)$ sia lo stesso per ogni età, ovvero

$$\frac{s(x, t+1)}{s(x, t)} = 1 + \xi(t) \quad \forall x \in [\alpha, \omega_1] \quad (3.14)$$

Si ottiene così l'ammontare dei salari degli attivi di età x in t :

$$S(x, t) = N^1(x, t)s(x, t) \quad (3.15)$$

Il valore atteso dei salari percepiti in t sarà:

$$S(t) = \sum_x S(x, t) \quad (3.16)$$

Il salario medio individuale $s(t)$ è dato dalla media ponderata dei salari individuali $s(x, t)$, dove i pesi sono le proporzioni $w_x(t)$ degli attivi di età x sulla popolazione attiva totale,

$$s(t) = \frac{S(t)}{N^1(t)} = \frac{\sum_x N^1(x, t)s(x, t)}{\sum_x N^1(x, t)} = \sum_x w_x(t)s(x, t) \quad (3.17)$$

con $w_x(t) = \frac{N^1(x, t)}{N^1(t)}$.

Definizione 3.1 (Stato demografico stazionario). *Diremo che la popolazione attiva è in uno stato stazionario, se il rapporto $w_x(t) = \frac{N^1(x, t)}{N^1(t)}$, non dipendono da t per ogni x , ovvero se la distribuzione delle età degli attivi non varia nel tempo.*

In condizioni di stazionarietà demografica degli attivi il salario medio individuale cresce allo stesso tasso $\xi(t)$ del salario per (ogni) età x :

$$\frac{s(t+1)}{s(t)} = \frac{\sum_x w_x(t+1)s(x, t+1)}{\sum_x w_x(t)s(x, t)} = \frac{[1 + \xi(t)] \sum_x w_x s(x, t)}{\sum_x w_x s(x, t)} = 1 + \xi(t) \quad (3.18)$$

Sempre in uno stato demografico stazionario, avremo

$$S(t+1) = S(t)[1 + \xi(t)][1 + \rho(t)], \quad (3.19)$$

infatti

$$\begin{aligned}
\frac{S(t+1)}{S(t)} &= \frac{\sum_x N^1(x, t+1)s(x, t+1)}{\sum_x N^1(x, t)s(x, t)} \\
&= \frac{N^1(t+1) \sum_x w_x(t+1)s(x, t+1)}{N^1(t) \sum_x w_x(t)s(x, t)} \\
&= [1 + \rho(t)] \frac{\sum_x w_x(t+1)s(x, t)[1 + \xi(t)]}{\sum_x w_x(t)s(x, t)} \\
&= [1 + \rho(t)][1 + \xi(t)]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

I contributi totali seguono la stessa dinamica, se l'aliquota contributiva $P(t) = P$ è mantenuta costante - come è usuale nei sistemi NDC.

$$C(t) = P(t)S(t) = C(t-1)[1 + \xi(t)][1 + \rho(t)] \tag{3.21}$$

Indicato con $g(t)$ il tasso di rendimento nozionale, il montante contributivo dell'individuo i , $m_i(x, t)$ evolve come segue

$$m_i(x, t) = m_i(x-1, t-1)[1 + g(t-1)] + P(t)s(x, t) \tag{3.22}$$

Il totale dei montanti nozionali degli attivi di età x in t sarà

$$M(x, t) = \sum_{i=1}^{N^1(x, t)} m_i(x, t) \tag{3.23}$$

Si osservi che

$$M(x+1, t+1) = M(x, t)p_x^{11}(t)[1 + g(t)] + C(x+1, t+1) \tag{3.24}$$

Dato $\ddot{a}(x, t)$, definito dall'equazione (1.11), si calcola la rata iniziale di pensione, pagata al nuovo pensionato i :

$$b_i(x, t) = \frac{m_i(x, t)}{\ddot{a}(x, t)} \tag{3.25}$$

L'ammontare totale degli oneri ai nuovi pensionati di età x in t :

$$B_z(x, t) = \sum_{i=1}^{Z^2(x, t)} b_i(x, t) = \frac{1}{\ddot{a}(x, t)} \sum_{i=1}^{Z^2(x, t)} m_i(x, t) \tag{3.26}$$

Indichiamo, infatti, con il pedice z le quantità che riguardano solamente i nuovi pensionati.

Ma $Z^2(x, t) = N^1(x-1, t-1)p_{x-1}^{12}$. Dunque - in modo analogo all'equazione (3.24) - si ottiene che il valore atteso del montante collettivo dei neopensionati $Z^2(x, t)$ subito prima del pensionamento è

$$M_z(x, t) = \sum_{i=1}^{Z^2(x,t)} m_i(x, t) = M(x-1, t-1) \cdot p_{x-1}^{12}(t-1) \cdot [1+g(t-1)] \quad (3.27)$$

L'ammontare totale degli oneri ai pensionati di età x in t :

$$B(x, t) = B(x-1, t-1)p^{22}(x-1, t-1)[1+\lambda(t-1)] + B_z(x, t) \quad (3.28)$$

dove con $\lambda(t-1)$ abbiamo indicato il tasso di adeguamento delle pensioni, dimodoché nell'anno t ogni pensionato riceverà una pensione pari a $1 + \lambda(t-1)$ volte quella ricevuta nell'anno $t-1$.

3.3 Equilibrio in uno stato stazionario

Quando nel Capitolo 1 abbiamo illustrato le scelte più comuni per il tasso di rendimento nozionale $g(t)$, abbiamo anticipato che è detto tasso canonico il tasso di variazione relativa della massa complessiva dei salari, ovvero $g(t)_{\text{canonico}} = \frac{S(t+1)}{S(t)} - 1$. In questo paragrafo dimostreremo che questa scelta garantisce l'equilibrio automatico di bilancio sotto opportune condizioni.

Adotteremo le seguenti ipotesi semplificatrici: i nuovi attivi entrano tutti alla stessa età α , ovvero la distribuzione delle età di ingresso $d_z(x, t)$ è concentrata in α , e ricevono la prima rata di pensione a età β . Assumiamo, inoltre, che la mortalità fra gli attivi sia nulla, dunque $p_x^{11}(t) = 1$ per $\alpha \leq x \leq \beta - 2$ e $p_{\beta-1}^{12} = 1$.

In queste ipotesi, affinché sia soddisfatta la condizione di stazionarietà demografica degli attivi (Definizione 3.1), è necessario che i nuovi ingressi negli attivi $N^1(\alpha, t)$ aumentino al tasso costante ρ (e dunque che $N^1(t)$ aumenti allo stesso tasso costante ρ).

Proposizione 3.1 (Equilibrio in uno stato stazionario). *Un fondo pensioni a contributi nozionalmente definiti e premio costante P raggiunge l'equilibrio automatico tra entrate e uscite in condizioni di crescita stazionaria degli attivi, assenza di mortalità fra gli attivi, probabilità di transizione statiche, tasso di crescita dei salari tale che valga (3.14), se il rendimento nozionale dei contributi e il tasso di indicizzazione delle pensioni sono posti pari al tasso di crescita del totale dei salari.*

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato è una semplice serie di passaggi algebrici. La riportiamo qui di seguito nelle ipotesi seplificatrici presentate all'inizio di questo paragrafo, ossia di un'unica età di ingresso rispettivamente negli attivi e nei pensionati e di assenza di mortalità negli attivi. In queste ipotesi, affinché ci sia stazionarietà, il tasso di crescita dei nuovi ingressi negli attivi deve essere costante pari a ρ .

Dunque vale:

$$N^1(\alpha, t + 1) = [1 + \rho] \cdot N^1(\alpha, t) \quad (3.29)$$

Il che implica - per l'assenza di mortalità tra gli attivi - che

$$N^1(x, t + 1) = [1 + \rho] \cdot N^1(x, t) \quad \forall x, t \quad (3.30)$$

E, analogamente:

$$N^1(x, t) = [1 + \rho] \cdot N^1(x + 1, t) \quad (3.31)$$

Infatti - per l'assenza di mortalità - $N^1(x + 1, t) = N^1(x, t - 1)$.

Sfruttiamo ora l'ipotesi che il tasso di rendimento nozionale sia quello canonico: nell'equazione (3.22) sostituiamo $\frac{S(t)}{S(t-1)}$ a $1 + g(t - 1)$.

$$m(x, t) = m(x - 1, t - 1) \cdot \frac{S(t)}{S(t - 1)} + P \cdot s(x, t) \quad (3.32)$$

dove si è omesso l'indice i , dato che in queste ipotesi il montante individuale è uguale per tutti gli attivi di età x al tempo t , essendo entrati in assicurazione alla stessa età. Iterando e ponendo $m(\alpha, t) = 0 \forall t$

$$m(x, t) = \sum_{h=0}^{x-\alpha} P s(x - h, t - h) \frac{S(t)}{S(t - h)} \quad (3.33)$$

Il montante collettivo dei nuovi pensionati in t (al momento della trasformazione in rendita) è:

$$\begin{aligned} M(\beta, t) &= PZ^2(\beta, t) \sum_{h=1}^{\beta-\alpha} s(\beta - h, t - h) \frac{N^1(t)}{N^1(t - h)} \frac{s(t)}{s(\beta - h)} \\ &= PZ^2(\beta, t) \sum_{h=0}^{x-\alpha} \frac{N^1(t)}{N^1(t - h)} s(\beta - h, t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove l'ultima uguaglianza discende dall'ipotesi (3.14) che la crescita del salario individuale sia la stessa per ogni fascia di età:

$$\frac{s(x-h, t)}{s(x-h, t-h)} = \prod_{\tau=t-h}^{t-1} [1 + \xi(\tau)] = \frac{s(t)}{s(t-h)}$$

Gli oneri totali relativi alla nuova generazione di pensionati in t sono (equazioni 3.25 e 3.26):

$$B_z(\beta, t) = \frac{M(\beta, t)}{\ddot{a}(\beta, t)} \quad (3.35)$$

E gli oneri totali ai pensionati di età x in t , sostituendo $\frac{S(t)}{S(t-1)}$ a $\lambda(t-1)$ nell'equazione (3.28):

$$B(x, t) = B(x-1, t-1) p_{x-1}^{22}(t-1) \frac{S(t)}{S(t-1)} \quad \text{per } x \geq \beta + 1 \quad (3.36)$$

Dunque,

$$\begin{aligned} B(x, t) &= B(\beta, t-x+\beta) x_{-\beta} p_{\beta}^{22}(t-x+\beta) \frac{S(t)}{S(t-x+\beta)} \\ &= \frac{M(\beta, t-x+\beta)}{\ddot{a}(\beta, t-x+\beta)} x_{-\beta} p_{\beta}^{22}(t-x+\beta) \frac{N^1(t)}{N^1(t-x+\beta)} \frac{s(t)}{s(t-x+\beta)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Calcoliamo ora l'ammontare degli oneri al tempo t , ricordando che nel nostro modello non vengono pagate indennità ai superstiti.

$$B(t) = \sum_{x=\beta}^{\omega-1} \frac{M(\beta, t-x+\beta)}{\ddot{a}(\beta, t-x+\beta)} x_{-\beta} p_{\beta}^{22}(t-x+\beta) \frac{N^1(t)}{N^1(t-x+\beta)} \frac{s(t)}{s(t-x+\beta)} \quad (3.38)$$

Calcoliamo il coefficiente di capitalizzazione di una rendita vitalizia anticipata. Il tasso atteso di indicizzazione delle pensioni coincide con il tasso di attualizzazione, entrambi posti pari a $\frac{S(t+1)}{S(t)}$, quindi - di fatto - $\ddot{a}(x, t)$ dipende solo dalle probabilità di decesso, che abbiamo supposto statiche: $p_x^{22}(t) = p_x^{22}$.

$$\ddot{a}(\beta, t) = \sum_{h=0}^{\omega-1-\beta} h p_{\beta}^{22}(t) = \sum_{h=0}^{\omega-1-\beta} h p_{\beta}^{22} = \ddot{a}(\beta) \quad (3.39)$$

Applichiamo ora il fatto che $N^1(x, t) = (1 + \rho) \cdot N^1(x+1, t) \forall x, t$. Questo implica che $N^1(t+h) = N^1(t) \cdot (1 + \rho)^h$. Dunque, $\frac{S(t+h)}{S(t)} = (1 + \rho)^h \frac{s(t+h)}{s(t)}$, dunque:

$$M(\beta, t) = PZ^2(\beta, t) \sum_{h=1}^{\beta-\alpha} (1 + \rho)^h s(\beta - h, t) \quad (3.40)$$

Ora, vogliamo esprimere il totale degli oneri $B(t)$ in funzione del montante collettivo dei nuovi pensionati $M(\beta, t)$. In particolare, vogliamo semplificare l'equazione (3.38), dove vogliamo riscrivere il generico termine $M(\beta, t - x + \beta)$. Da (3.40) otteniamo:

$$M(\beta, t - \tau) = PZ^2(\beta, t - \tau) \sum_{h=1}^{\beta-\alpha} (1 + \rho)^h s(\beta - h, t - \tau) \quad (3.41)$$

Dunque $M(\beta, t) = (1 + \rho)^\tau \frac{s(t)}{s(t-\tau)} M(\beta, t - \tau)$.

Possiamo riscrivere l'espressione degli oneri totali (3.38), utilizzando la (3.41) per $\tau = x - \beta$ e sostituendo $\ddot{a}(\beta, t)$ con la somma (3.39):

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{x=\beta}^{\omega-1} \frac{M(\beta, t) s(t - x + \beta)}{(1 + \rho)^{x-\beta} s(t)} \frac{x-\beta P_\beta^{22}}{\sum_{x=\beta}^{\omega-1} x-\beta P_\beta^{22}} (1 + \rho)^{x-\beta} \frac{s(t)}{s(t - x + \beta)} \\ &= M(\beta, t) \sum_{x=\beta}^{\omega-1} \frac{x-\beta P_\beta^{22}}{\sum_{x=\beta}^{\omega-1} x-\beta P_\beta^{22}} \\ &= M(\beta, t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Quindi ogni anno il montante collettivo della nuova generazione di pensionati è uguale al totale degli oneri in quell'anno.

Consideriamo ora i contributi totali all'epoca t :

$$\begin{aligned} C(t) = P \cdot S(t) &= P \sum_{h=1}^{\beta-\alpha} N^1(\beta - h, t) s(\beta - h, t) \\ &= P \sum_{h=1}^{\beta-\alpha} Z^2(\beta, t) (1 + \rho)^h s(\beta - h, t), \end{aligned} \quad (3.43)$$

che coincide con l'espressione del montante $M(\beta, t)$ (3.40), che - a sua volta - abbiamo dimostrato coincidere con $B(t)$. Dunque abbiamo dimostrato che in condizioni demografiche stazionarie (crescita costante degli

attivi e probabilità di morte costanti), un sistema pensionistico a contributi nozionalmente definiti è automaticamente in equilibrio tra entrate e uscite, ovvero:

$$B(t) = C(t) \quad \forall t \quad (3.44)$$

Concludiamo con la precisazione che la scelta che abbiamo utilizzato per le terne di parametri $(g(t), \lambda(t), \ddot{a}(x, t))$ non è l'unica a garantire l'equilibrio automatico di bilancio. Un altro sistema in equilibrio automatico potrebbe essere costruito, ad esempio, scegliendo di non indicizzare le pensioni, a fronte di coefficienti di trasformazione in rendita più generosi. \square

Tuttavia l'ipotesi di stazionarietà demografica è piuttosto irrealistica: stiamo assistendo in Europa e non solo al fenomeno di inversione della piramide demografica. Se normalmente in una popolazione si osserva un alto numero di bambini e giovani e via via una numerosità più bassa per le generazioni più anziane, formando una specie di piramide, oggi si osserva un'incidenza dei giovani sulla popolazione totale in calo.

Mostreremo che senza l'ipotesi di stazionarietà, un sistema NDC non è automaticamente in equilibrio.

Da notare, infine, che è stato cruciale nella dimostrazione avere adottato come fattore di rendimento nozionale il tasso di crescita del salario collettivo. Questo è il prodotto di due termini: fattore di crescita dei salari e fattore di crescita della popolazione attiva.

$$1 + g(t) = [1 + \rho(t)][1 + \xi(t)]$$

E' evidente come la crescita della popolazione garantisca un "extrarendimento" in un sistema pensionistico a ripartizione. Questo è uno dei motivi che ha reso molto conveniente questo sistema finanziario di gestione negli anni '60-'70. Tuttavia, nello scenario odierno di calo demografico questo "rendimento demografico" è - se non negativo - nullo.

Se il tasso di rendimento nozionale non è quello canonico, non si ha l'equilibrio automatico: ad esempio il sistema svedese prevede che il rendimento nozionale sia pari al tasso di crescita del salario individuale, anziché collettivo. Si può dimostrare che in questo caso l'equilibrio automatico non è raggiunto nemmeno nel caso di crescita stazionaria della Proposizione 3.1: è necessaria l'ipotesi di popolazione costante.

Questo lo si può vedere facilmente, ripercorrendo il procedimento della dimostrazione della Proposizione 3.1 e avendo cura di sostituire a g_t

$\frac{s(t+1)}{s(t)}$, anziché $\frac{S(t+1)}{S(t)}$. In questo caso il montante collettivo al momento del pensionamento risulta

$$M(\beta, t) = PZ^2(\beta, t) \sum_{h=1}^{\beta-\alpha} s(\beta - h, t) \quad (3.45)$$

Vale ancora $B(t) = M(\beta, t)$. I contributi, invece, sono:

$$C(t) = P \sum_{h=1}^{\beta-\alpha} Z^2(t)(1 + \rho)^h s(\beta - h, t) \quad (3.46)$$

Per cui se $\rho > 0$, allora $C(t) > B(t)$. Se $\rho < 0$, $C(t) < B(t)$. Crescita e decrescita demografica portano rispettivamente a un surplus o a un deficit di bilancio.

3.4 Non equilibrio a breve termine: un esempio

Mostreremo ora formalmente che in assenza di stazionarietà demografica il bilancio di un sistema NDC non è automaticamente in equilibrio.

Proposizione 3.2 (Non equilibrio a breve termine). *Un fondo pensioni a contributi nozionalmente definiti, a premio costante e rendimento nozionale pari al tasso di crescita del totale dei salari, non realizza automaticamente l'equilibrio finanziario a breve termine se la crescita demografica della popolazione attiva non è stazionaria.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'enunciato, è sufficiente fornire un controesempio. Ci poniamo nelle stesse ipotesi della dimostrazione del Proposizione 3.1 a parte quanto riguarda la crescita degli attivi. Consideriamo la seguente situazione di non stazionarietà: assumiamo che le probabilità monoannuali di decesso dei pensionati siano costanti nel tempo, mentre il tasso di crescita dei nuovi ingressi negli attivi sarà costante e pari a ρ_1 per i primi T_1 anni, pari a ρ_2 per $T \geq T_1 + 1$, ossia:

$$Z^2(\alpha, t) = \begin{cases} (1 + \rho_1)Z^2(\alpha, t - 1) & t \leq T \\ (1 + \rho_2)Z^2(\alpha, t - 1) & t \geq T + 1 \end{cases} \quad (3.47)$$

Inoltre assumiamo che tutti gli attivi percepiscano lo stesso stipendio $s(x, t) = 1$ costante nel tempo

Tabella 3.1: Esempio di non equilibrio nel caso di accelerazione della crescita demografica

Periodo	$N^1(0, t)$	$N^1(1, t)$	$C(t)$	$M(0, t)$	$M(1, t)$	$B(t)$	Saldo $C(t)$ - $B(t)$
0	100	100		40	20		
1	100	100	0	40	20	40	
2	100	100	0	40	20	40	0
3	110	100	5%	42	22	41	0
4	121	110	10%	46,2	24,2	46,2	1,1
5	133,1	121	10%	50.82	26.62	50.82	0
6	146.41	133.1	10%	55.90	29.28	55.90	0

In questo caso avremo due periodi di crescita stazionaria della popolazione: per $t \leq T_1$ varrà per tutte le generazioni di attivi $N^1(x, t) = (1 + \rho_1)N^1(x, t - 1) = (1 + \rho)N^1(x + 1, t)$. Un secondo periodo stazionario si avrà per $t \geq T_1 + \beta - \alpha$, quando ogni generazione di attivi avrà cardinalità $1 + \rho_2$ volte la generazione precedente. Fra i due periodi stazionari troveremo un periodo di transizione, in cui il tasso di crescita delle generazioni giovani sarà diverso da quello delle generazioni più anziane. Nei due periodi stazionari il tasso di crescita degli attivi è costante, nel periodo intermedio è una media ponderata tra ρ_1 e ρ_2 , raggiungendo progressivamente ρ_2 dopo $\beta - \alpha$ anni.

Trattandosi semplicemente di un controesempio, possiamo assumere $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $p_\beta^{23} = 1$, ovvero che gli attivi versino contributi al fondo per due anni e ricevano il montante contributivo in blocco al momento del pensionamento. Siano $T_1 = 2$, $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 10\%$, $N^1(0, 0) = N^1(1, 0) = 100$, $P = 20\%$

La tabella 3.1 riporta tutte le grandezze di interesse, l'esempio è quello proposto da Breyer (2004). Si osservano due periodi di stazionarietà: per $t \leq 2$, $w_0 = w_1 = \frac{1}{2}$, mentre per $t \geq 4$, $w_0 = \frac{11}{21}$ e $w_1 = \frac{10}{21}$. Il periodo di transizione è costituito soltanto da $\{T = 3\}$, dato che in questo esempio abbiamo solo due generazioni di attivi.

All'inizio e alla fine abbiamo due periodi in cui il saldo a bilancio è nullo, mentre in $t = 4$ si ha un saldo positivo di 1,1. Questo è dovuto al fatto che la generazione di nuovi pensionati $Z^2(t = 4)$ appartiene ancora alle coorti che crescevano al tasso $\rho_1 = 0$. Il beneficio è stato maturato

Tabella 3.2: Esempio di non equilibrio nel caso di una diminuzione del tasso di crescita della popolazione

t	$N^1(0, t)$	$N^1(1, t)$	$g(t - 1)$	$C(t)$	$M(0, t)$	$M(1, t)$	$B(t)$	$C(t) - B(t)$
0	100	100		40	20			
1	100	100	0	40	20	40		
2	100	100	0	40	20	40	40	0
3	90	100	-5%	38	18	39	38	0
4	81	90	-10%	34.2	16.2	34.2	35.1	-0.9
5	72.9	81	-10%	30.78	14.58	30.78	30.78	0
6	65.61	72.9	-10%	27.70	13.12	27.70	27.70	0

applicando al montante $M(0, 2)$ il tasso di crescita dei contributi totali 5%, che è più piccolo rispetto al nuovo tasso di crescita "a regime" del 10% (se fosse stato applicato un rendimento nozionale del 10%, allora $M(1, 3) = 42$ e $B(4) = 46, 1 = C(4)$).

Dunque abbiamo provato che in assenza di stazionarietà non si ha l'equilibrio automatico di bilancio, dato che in $t = 4$, $C(t) > B(t)$. \square

Un risultato analogo, ma di segno opposto, lo si ottiene nel caso di $\rho_1 > \rho_2$, riportiamo ancora l'esempio di Breyer (2004), in cui $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = -10\%$. Come mostra la tabella 3.2, anche in questo caso non si ha l'equilibrio fra entrate e uscite l'anno 4, tuttavia l'effetto è opposto, trattandosi di un deficit.

3.5 Stabilità in un contesto reale

Nella Proposizione 3.2 abbiamo dimostrato che non basta adottare un sistema NDC per garantire l'equilibrio automatico tra entrate e uscite. Equilibrio che è, invece, soddisfatto in uno scenario irrealistico di crescita stazionaria. Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo costruito una situazione particolare di non-stazionarietà dovuta al cambio della velocità di crescita dei nuovi ingressi negli attivi. In particolare abbiamo osservato che un'accelerazione negli ingressi comporta un temporaneo avanzo di bilancio, mentre un rallentamento un disavanzo.

Nella realtà possono verificarsi situazioni di non-stazionarietà per altri motivi:

- cambiamenti delle probabilità di decesso $p_x^{23}(t)$ sono bilanciati solo in parte dalla conseguente revisione del coefficiente di conversione in rendita $\ddot{a}(x, t)^{-1}$. Il nuovo coefficiente viene applicato solo alla nuova generazione di pensionati. Le vecchie generazioni continuano a ricevere la pensione calcolata con le vecchie aspettative di vita (dato che le pensioni vengono indicizzate all'inflazione, non all'aumento della speranza di vita)
- cambiamenti delle probabilità di pensionamento $p_x^{12}(t)$ modificano il tasso di dipendenza $\frac{N^2(t)}{N^1(t)}$, non immediatamente controbilanciato da una variazione del tasso medio di sostituzione $r(t) = \frac{b(t)}{s(t)}$. Ad esempio, consideriamo il caso di una riforma che aumenti di ξ anni l'età pensionabile. Di conseguenza si crea uno "scalone": per un periodo di ξ anni le persone che sarebbero andate in pensione secondo le vecchie regole, devono continuare a lavorare, aumentando il totale annuo dei contributi e riducendo gli oneri (dato che non vanno in pensione). Quindi si ha un surplus temporaneo di bilancio. Una volta che la riforma è a regime, il saldo entrate-uscite torna nullo, dato che i montanti contributivi sono più elevati.
- altre situazioni di non-stazionarietà (ad es. cambi del tasso di occupazione) sono bilanciate rivalutando i contributi e indicizzando le pensioni al tasso di rendimento canonico. Tuttavia, per i motivi enunciati al capitolo 1, non è desiderabile l'utilizzo del tasso canonico senza una forma di perequazione. In particolare se si indicizza le pensioni all'inflazione, un aumento (improvviso) del tasso di disoccupazione comporta un calo (immediato) delle entrate del fondo pensioni, non bilanciate da un calo degli oneri.

In un contesto reale possono verificarsi tutti questi casi di non-stazionarietà, quindi non si possono accettare le ipotesi della Proposizione 3.1, che ha fornito una giustificazione teorica ai sistemi a contributi nozionalmente definiti.

Il fatto che non venga raggiunto automaticamente l'equilibrio entrate-uscite non significa necessariamente che il sistema non sia sostenibile: periodi temporanei di deficit possono essere seguiti da periodi in attivo. Finora abbiamo inteso l'equilibrio (a breve) come uguaglianza tra entrate e uscite, condizione che implica l'equilibrio attuariale. Per un sistema

pensionistico pubblico, però, non è imprescindibile l'equilibrio annuale fra entrate e uscite, potendo ricorrere all'indebitamento.

Nell'ambito delle assicurazioni private è usuale parlare di solvibilità, ovvero della capacità di far fronte agli impegni nei confronti degli assicurati. Nell'ambito delle pensioni pubbliche la garanzia da parte dello Stato modifica la questione da un problema di solvibilità a un problema di sostenibilità. Quindi la questione a cui cercheremo di rispondere è la seguente: in uno scenario realistico, in cui non è possibile accogliere l'ipotesi di stazionarietà demografica, un sistema pensionistico NDC è sostenibile?

Per rispondere alla domanda occorre prima di tutto trovare una definizione di "sostenibilità". Un contributo al riguardo è quello proposto da Knell e altri:

Una politica fiscale è sostenibile se può essere continuata indefinitamente; politiche insostenibili dovranno essere modificate in futuro... mentre non c'è una chiara definizione teorica di sostenibilità, tutte le definizioni implicano che un indice di debito sempre crescente non sia sostenibile. *Knell M., Kohler Toglhofer W. e Prammer D. (2006)*²

Restringendo il campo alle pensioni pubbliche, la sostenibilità potrebbe essere intesa come "una posizione dove non c'è bisogno di aumentare l'aliquota contributiva in futuro"³. Questo dovrebbe essere la norma nei sistemi NDC, progettati per mantenere il premio costante.

Spesso si valuta la necessità di "ritocchi" al sistema pensionistico, analizzando il saldo annuale fra entrate e uscite, che è, però, soltanto un indice di liquidità. Un sistema a ripartizione potrebbe avere periodi con bilancio entrate-uscite in attivo, ma indice di solvibilità decrescente, a causa degli impegni futuri.

²Knell M., Kohler Toglhofer W. e Prammer D. (2006), *The Austrian pension system - How recent reforms have changed fiscal sustainability and pension benefits*. Monetary Policy and Economy, Q2(06), 69-93.

³Vidal Melià C., Boado Penas M. D. C., Settergren O. (2010). *Instruments for improving the equity, transparency and solvency of payg pension systems. NDCs, ABs and ABMs. (In M. Micocci, G. Gregoriou e G.B. Masala (Eds.))*, Pension fund risk management. Financial and actuarial modelling, cap. 18 (pag. 419-473). New York: Chapman and Hall.

Misuriamo la liquidità del sistema all'anno t in termini di deficit, ovvero del saldo fra oneri pagati ai pensionati e contributi versati dagli attivi:

$$Def(t) = B(t) - C(t) \quad (3.48)$$

Se $Def(t) < 0$ si ha un accumulo di riserve, se $Def(t) > 0$ si forma un debito. Consideriamo l'evoluzione del fondo di riserva/debito $F(t)$ sull'orizzonte temporale $[0, T]$:

$$F(t) = F(t-1)[1 + g(t-1)] + C(t) - B(t) \quad (3.49)$$

dove si suppone che il fondo sia remunerato al tasso $g(t)$ pari al tasso di rendimento nozionale.

Misureremo la sostenibilità finanziaria tramite il debito latente totale (DLT) sull'orizzonte temporale $[0, T]$, definito come la differenza fra il valore attuale dei futuri oneri e quello dei futuri contributi, attualizzati al tasso nozionale $g(t)$ applicato al montante nozionale.

$$DLT(0, T) = \sum_{t=1}^T B(t)v_g(0, t) - \sum_{t=1}^T C(t)v_g(0, t) = \sum_{t=1}^T Def(t)v_g(0, t) \quad (3.50)$$

dove i fattori di attualizzazione sono $v_g(0, t) = \prod_{h=0}^{t-1} (1 + g_h)^{-1}$.

In realtà questo modo di misurare la sostenibilità finanziaria è analogo a misurare la variazione tra il fondo di riserva all'inizio e alla fine, se si trascura il tasso di remunerazione del fondo di riserva:

$$F(T) = \sum_{t=1}^T [C(t) - B(t)] \frac{v_g(0, t)}{v_g(0, T)} + \frac{F(0)}{v_g(0, T)} \quad (3.51)$$

Dunque

$$F(0) - F(T)v_g(0, T) = DLT(0, T) \quad (3.52)$$

Considereremo non sostenibile il sistema pensionistico se $DLT \leq -\epsilon < 0$, con ϵ opportunamente fissato (ad esempio pari all'1% o allo 0,1% di $C(0)$). In questo caso occorrerà agire sui futuri oneri o sui futuri contributi, ad esempio introducendo dei meccanismi automatici di bilanciamento, che presenteremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

Gli ABM: un problema di ottimizzazione

Nella Proposizione 3.2 abbiamo mostrato come un sistema NDC "puro" non riesca a garantire in modo automatico l'equilibrio di bilancio in condizioni demografiche non stazionarie. In realtà, abbiamo osservato che non è necessario il pareggio di bilancio ogni anno: in presenza di cicli demografici ed economici si potrebbe pensare a un fondo in cui versare le eccedenze nei periodi di surplus e da cui attingere nei periodi di deficit. In ogni caso, bisogna verificare che sia soddisfatta una condizione di equilibrio attuariale. Se dal bilancio tecnico il sistema risulta in passivo, occorre modificare i parametri del sistema per riportarlo all'equilibrio. In questo capitolo tratteremo il sistema di modifica dei parametri proposto da Devolder, Levantesi e Menzietti [3]. Tramite un'applicazione in R cercheremo la combinazione ottimale dei parametri.

4.1 Meccanismi di bilanciamento automatico

Le varie riforme pensionistiche susseguitesi in Italia e in Europa hanno generalmente riguardato la modifica dei parametri del sistema a posteriori, solo una volta che ci si è resi conto della situazione di dissesto finanziario. Recentemente si è, invece, diffusa un'altra strada - preventiva - per affrontare il problema, mediante *Meccanismi automatici di bilanciamento* (ABM, nel seguito), ovvero una serie predeterminata di misure stabilite per legge, da applicarsi secondo una condizione di solvibilità/sostenibilità, per riportare all'equilibrio finanziario un sistema pensionistico. Lo scopo di un ABM è rendere il sistema pensionistico

"resiliente" agli shock demografici ed economici, senza la necessità di ricorrere ripetutamente all'intervento legislativo.

Le misure previste dagli ABM sono analoghe nella sostanza a quelle previste dalle riforme pensionistiche già citate. Il loro vantaggio è che hanno carattere preventivo: nel caso si verifichi una situazione di disequilibrio del fondo pensioni, gli iscritti sanno già a priori quali misure verranno prese per ristabilire l'equilibrio. Al contrario, l'introduzione di una riforma pensionistica (a posteriori) avviene spesso quando la situazione del fondo si è già deteriorata e avviene con misure che sono note solo al momento della loro approvazione. Adottando un ABM, si ha quindi una riduzione del cosiddetto "rischio politico", ossia dell'incertezza legata alle misure che verranno prese, e dei tempi di intervento.

Si tratta senza dubbio di una serie di vantaggi, tuttavia nella pratica il ripristino della sostenibilità finanziaria si traduce facilmente in misure "lacrime e sangue", che trascurano l'esigenza di equità ed adeguatezza sociale. Il rischio è che si vanifichi l'obiettivo di combattere la povertà senile, per cui è nata la previdenza sociale stessa. Inoltre, gli ABM potrebbero causare dei "salti" nelle variabili di riferimento e risultare poco desiderabili: nessun lavoratore avrebbe fiducia nel sistema pensionistico, se sapesse che dall'oggi al domani il suo montante potrebbe essere tagliato drasticamente. Un meccanismo di bilanciamento potrà essere accolto positivamente solo se garantirà pensioni accettabili e gradualità nella sua applicazione.

L'Italia ha adottato un meccanismo automatico di bilanciamento in seguito alla riforma Fornero del 2011, che ha previsto l'adeguamento automatico dell'età pensionabile alla speranza di vita. Come osservato nel primo capitolo, però, si tratta di una misura molto più efficace nei sistemi a prestazione definita che in quelli a contributi definiti. In questi ultimi è, però, efficace nell'aumentare la consistenza delle pensioni e dunque la loro adeguatezza sociale.

Infine è opportuno ricordare che una misura di bilanciamento automatico è implicita nel metodo di calcolo contributivo, dove l'importo della rata iniziale di pensione è legato al coefficiente di rendita vitalizia al momento del pensionamento. Se i coefficienti sono periodicamente adeguati alle variazioni della longevità, si ha conseguentemente un aggiustamento automatico dei benefici. Tuttavia, si tratta di una misura che riguarda solo la nuova generazione di pensionati, mentre le vecchie generazioni continuano a ricevere rate di pensione calcolate secondo i coefficienti di rendita che erano in vigore al momento del pensionamento.

Ad oggi l'unico esempio vero e proprio di ABM applicato a un sistema pensionistico a contributi nozionalmente definiti è quello adottato dalla Svezia. L'ABM svedese viene attivato quando dall'analisi del bilancio tecnico emerge una situazione di disequilibrio attuariale. In particolare si considera l'indice di solvibilità del sistema, pari al rapporto fra valore attuale medio degli attivi (asset finanziari¹ e contributi) e degli oneri:

$$SR = \frac{\text{valore attuale medio degli attivi}}{\text{valore attuale medio degli oneri}} \quad (4.1)$$

Quando l'indice di solvibilità è minore di 1, vengono rivisti al ribasso il tasso di rendimento nozionale e il tasso di rivalutazione delle pensioni, che potrebbero risultare negativi. Fatto peraltro effettivamente successo nel 2009, quando l'ABM svedese è stato applicato per la prima volta. Nella sua versione originale avrebbe comportato un taglio dei montanti e delle pensioni di oltre il 3%, poi ridotto in extremis da un intervento legislativo.² Un meccanismo di bilanciamento così costruito raggiunge l'obiettivo di garantire la sostenibilità finanziaria del sistema, ma risulta indesiderabile per il suo costo sociale: il sistema non garantisce più l'adeguatezza delle rate di pensione.

4.2 Formulazione come problema di ottimizzazione

Affinché un ABM non sia solamente efficace, ma pure desiderabile, bisogna che oltre a garantire la sostenibilità finanziaria, garantisca rate di pensione adeguate. Spesso le riforme pensionistiche vanno a colpire più duramente o gli attivi attuali o gli attuali pensionati. Un meccanismo di bilanciamento costruito in modo ottimale deve ripartire il costo dei tagli in modo equo fra le varie generazioni.³ Buone proprietà richieste a un ABM sono automaticità, trasparenza e gradualità.

Introduciamo un ABM che agisce attraverso tre leve: aggiustamento del tasso di rendimento nozionale $g(t)$, del tasso di rivalutazione delle pensioni $\lambda(t)$ e del premio $P(t)$, che potrà variare nel tempo. Un sistema

¹Il sistema svedese prevede una quota a capitalizzazione

²cfr. Boado-Penas M., Settergren O., Ekheden E., Naka P. (2019)

³Si noti che un taglio del rendimento $g(t)$ danneggia particolarmente i lavoratori anziani, che hanno un montante contributivo elevato, mentre le fasce di popolazione giovani subiscono un danno contenuto, dato che il "nuovo" tasso viene applicato a un montante più scarso

NDC con l'applicazione di questo meccanismo di bilanciamento automatico (in particolare il premio variabile), potrebbe essere chiamato *Quasi NDC*, dato che il premio non è più tenuto necessariamente costante.

Nel seguito ometteremo il problema di valutare quando l'ABM andrà attivato, focalizzeremo l'attenzione sulla traiettoria ottimale delle tre variabili di controllo, che troveremo come soluzioni di un problema di ottimizzazione vincolata. L'idea sottostante è la seguente: fra tutte le traiettorie che consentono l'equilibrio attuariale, cerchiamo la migliore in termini di adeguatezza delle pensioni e di costo per i contribuenti. Terremo conto dell'adeguatezza delle pensioni tramite la funzione obiettivo, sotto il vincolo di equilibrio attuariale su un orizzonte temporale finito. Ulteriori vincoli sono posti per tradurre in termini formali le proprietà richieste alle variabili di controllo.

Procediamo ora a definire i fattori di aggiustamento dei parametri: siano

$\gamma(t)$ il fattore di adeguamento del tasso di indicizzazione degli oneri, in modo che l'equazione (3.28) diventi

$$B(x, t) = B(x-1, t-1)p_{x-1}^{22}(t-1)[1 + \lambda(t-1)]\gamma(t) + B_z(x, t) \quad (4.2)$$

$\zeta(t)$ il fattore di adeguamento del rendimento nozionale:

$$M(x, t) = M(x-1, t-1)p^{11}(x-1, t-1)(1 + g(t-1))\zeta(t) + C(x, t) \quad (4.3)$$

$\theta(t)$ il fattore di adeguamento del premio:

$$C(x, t) = PS(x, t)\theta(t) \quad (4.4)$$

4.2.1 Funzione obiettivo

Cercheremo la traiettoria ideale delle variabili di controllo $\gamma(t)$, $\zeta(t)$, $\theta(t)$, minimizzando una funzione obiettivo che tenga conto da un lato dell'adeguatezza delle pensioni - misurata tramite il tasso medio di sostituzione - dall'altro del costo del sistema per i contribuenti - misurato dal premio.

Trascureremo nel seguito l'impatto che ha sul mercato del lavoro la modifica dell'aliquota contributiva, considerando il premio ottenuto dal problema di ottimizzazione come quel valore teorico necessario per garantire la sostenibilità del sistema. Altro capitolo è la scelta di come finanziarne il costo: in letteratura sono state proposte forme di finanziamento dei sistemi pensionistici alternative alla tassazione del lavoro.

Ad esempio, la Norvegia e altri paesi ricchi di risorse naturali finanziano parzialmente le pensioni tramite i proventi dell'attività petrolifera.

Misureremo l'adeguatezza sociale al tempo t tramite il tasso medio di sostituzione fra pensione e stipendio $r(t) := \frac{b(t)}{s(t)}$, dato che una *promessa equa e credibile riguardo alle pensioni future, dovrebbe commisurarle al futuro standard di vita della società*, come affermato da Schokkaert e altri (2018)⁴.

La funzione obiettivo si "attiva" quando il tasso medio di sostituzione scende sotto la soglia di desiderabilità r_{soglia} . Per il momento non specifichiamo quanto dovrebbe essere questa soglia. In linea generale, dipenderà - oltre che dalle preferenze del decisore - dalla presenza o meno di altre forme di previdenza.

Inoltre vogliamo che la funzione di perdita catturi l'effetto di un tasso di contribuzione maggiore di una soglia P_{soglia} di desiderabilità. Possiamo allora definire la funzione di perdita totale (*Total Penalty Function - TPF*) sull'orizzonte temporale $[0, T]$, come:

$$TPF(0, T) = \sum_{t=1}^T \left(\psi_1 \max(r_{soglia} - r(t), 0) + \psi_2 \max(P(t) - P_{soglia}, 0) \right) \quad (4.5)$$

dove ψ_1 e ψ_2 sono, rispettivamente, il peso assegnato al fattore legato all'adeguatezza sociale e quello legato alla sostenibilità del premio.

Fra i due termini del generico addendo di *TPF* si ha in parte un *trade-off*, in quanto col metodo contributivo l'aumento del premio comporta l'aumento degli oneri (futuri). Quindi per minimizzare il primo termine bisogna tendenzialmente aumentare il secondo e viceversa.

4.2.2 Vincoli

Il nostro scopo è trovare tra tutte le soluzioni che garantiscono la sostenibilità finanziaria quella che minimizza la funzione obiettivo. Traduciamo in termini formali l'idea di "garantire la sostenibilità finanziaria" tramite un vincolo sul debito latente totale, così come è stato definito nel Capitolo 3 dalla (3.50).

In una situazione ideale, vorremmo porre $DLT(0, T)$ pari a zero. Tuttavia nella realtà è difficile soddisfare esattamente l'uguaglianza, non

⁴Schokkaert E., Devolder P., Hindriks J., Vandenbroucke F. (2018). Towards an equitable and sustainable point system. A proposal for pension reform in Belgium. *Journal of Pension Economics and Finance*. <https://doi.org/10.1017/S1474747218000112>

avrebbe neanche senso impegnarsi troppo in questa direzione, vista l'incertezza nelle valutazioni. Ai fini della sostenibilità finanziaria del sistema è sufficiente che lo scostamento da zero non sia eccessivo. Traduciamo in termini formali "non eccessivo", come minore o uguale a ϵ volte una misura di volume, ad esempio i contributi totali pagati il primo anno:

$$-\epsilon \leq \frac{DLT(0, T)}{C(0)} \leq \epsilon \quad (\text{Vincolo di sostenibilità finanziaria})^5$$

In base a questo vincolo, il sistema dovrà essere in equilibrio sull'orizzonte temporale $[0, T]$, ma potranno verificarsi periodi temporanei di deficit o di surplus. E' difficile pensare che il deficit monoannuale possa essere illimitato. E' necessario adottare un ulteriore vincolo, di liquidità. Assumiamo nel seguito che possa esserci un deficit, ma che su base annuale il rapporto Deficit/Contributi non possa superare un livello massimo $u \geq 0$. Ovvero:

$$\frac{Def(t)}{C(t)} \leq u$$

Al contrario, non poniamo vincoli sull'eventuale surplus (che sarà comunque limitato da $C(t)$).

Ulteriori vincoli si rendono necessari per soddisfare la proprietà di gradualità del meccanismo di bilanciamento: per evitare aggiustamenti improvvisi, richiederemo che le variabili decisionali non possano essere aggiustate "troppo" da un anno all'altro. "Troppo" può essere tradotto nel nostro problema, inserendo un limite inferiore e superiore alla variazione relativa delle variabili decisionali:

$$g_1 \leq \frac{\gamma(t)}{\gamma(t-1)} \leq g_2, \quad z_1 \leq \frac{\zeta(t)}{\zeta(t-1)} \leq z_2, \quad t_1 \leq \frac{\theta(t)}{\theta(t-1)} \leq t_2$$

Infine poniamo un limite minimo e massimo alle variabili decisionali: non potrebbe essere accettata un'aliquota contributiva del 60%, così come un tasso di rendimento nozionale del -5%.

$$G_1 \leq \gamma(t) \leq G_2, \quad Z_1 \leq \zeta(t) \leq Z_2, \quad T_1 \leq \theta(t) \leq T_2$$

4.2.3 Problema di ottimizzazione

Tenendo conto di tutti i vincoli, troveremo la traiettoria ottimale per la terna di funzioni $(\gamma(t), \zeta(t), \theta(t))$, risolvendo il seguente problema di

ottimizzazione:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\gamma(t), \zeta(t), \theta(t)} TPF(0, T) \quad t \in \{0, 1, \dots, T\} \\
 & \quad \text{sub} \\
 & -\epsilon \leq \frac{DLT(0, T)}{C(1)} \leq \epsilon \\
 & \quad \frac{Def(t)}{C(t)} \leq u \\
 & g_1 \leq \frac{\gamma(t)}{\gamma(t-1)} \leq g_2 \\
 & z_1 \leq \frac{\zeta(t)}{\zeta(t-1)} \leq z_2 \\
 & t_1 \leq \frac{\theta(t)}{\theta(t-1)} \leq t_2 \\
 & G_1 \leq \gamma(t) \leq G_2 \\
 & Z_1 \leq \zeta(t) \leq Z_2 \\
 & T_1 \leq \theta(t) \leq T_2
 \end{aligned}$$

Si tratta di un problema di ottimizzazione vincolata non lineare nelle variabili $\gamma(t), \zeta(t), \theta(t), t = 1, 2, \dots, T$, ovvero in $3T$ variabili ($\gamma(0), \zeta(0), \theta(0)$ sono posti pari a 1).

Nell'applicazione numerica che segue (riportata in appendice) abbiamo utilizzato come algoritmo di ottimizzazione la funzione di R COBYLA (Ottimizzazione vincolata attraverso approssimazioni lineari) del pacchetto *nloptr*. Si tratta di un algoritmo di ricerca diretta locale, non basata sul gradiente della funzione obiettivo, che ammette l'introduzione di vincoli non lineari. Per questo ben si adatta alla soluzione del nostro problema. Tuttavia, la soluzione così ottenuta è un minimo locale e non abbiamo la garanzia che una soluzione esista, né che sia unica. Anzi, nei paragrafi che seguono mostreremo un esempio in cui sono ammesse più soluzioni.

Informazioni più complete possono essere trovate nella guida [9] al pacchetto *nloptr* di R.

4.3 Applicazione al sistema italiano

L'applicazione numerica si riferisce al sistema pensionistico italiano, limitatamente alla pensione di primo pilastro calcolata con il metodo contributivo. Seguendo l'articolo di Devolder, Levantesi e Menzietti [3], in una

prima parte è stato considerato uno scenario demografico ed economico base, una sorta di scenario *best estimate* costruito secondo le previsioni di medio-lungo termine della Ragioneria generale dello Stato (si veda a tal proposito [6]). Nella seconda parte si considerano due scenari alternativi: lo Scenario 1, *worst case*, caratterizzato da una decrescita della popolazione attiva e una bassa crescita dei salari, e lo Scenario 2 con condizioni demo-economiche inizialmente peggiori rispetto allo scenario base, ma in miglioramento nella seconda parte del periodo, fino a riportarsi ai livelli dello scenario base.

I risultati e i grafici riportati in questo capitolo si riferiscono all'applicazione in R, secondo il codice riportato in appendice.

4.3.1 Dati e assunzioni

Presentiamo ora i dati e le assunzioni che sono state fatte nell'applicazione, che segue in linea di principio quella degli autori. I dati provengono principalmente dagli OpenData liberamente scaricabili dal sito internet dell'Inps e si riferiscono al 2015, ultimo anno per i quali si hanno dati completi⁶. Inoltre abbiamo utilizzato la tavola di mortalità Istat relativa al 2015, mentre i montanti contributivi iniziali sono stati gentilmente forniti da Susanna Levantesi e si basano su una precedente elaborazione degli autori.

Un ruolo notevole in questa analisi è rivestito dalla scelta dell'orizzonte temporale T : in presenza di cicli demo-economici sfavorevoli alternati a periodi favorevoli, un diverso orizzonte temporale sarà determinante nella valutazione della sostenibilità finanziaria. Essendo interessati a valutare la sostenibilità nel medio-lungo termine, nella stesura del bilancio tecnico di un fondo pensioni si adotta un orizzonte temporale molto ampio, ad esempio 50 anni. Dopotutto, il costo delle pensioni erogate come rendite vitalizie emerge seguendo il ciclo di vita di una persona. In generale, le valutazioni di un sistema pensionistico devono essere fatte con un orizzonte temporale minimo pari al tempo di *turn over* generazionale, ovvero il tempo medio impiegato da un nuovo attivo a entrare nel gruppo dei pensionati, che oggi è attorno ai 30-35 anni⁷. Tuttavia l'orizzonte temporale può raggiungere i 95 anni, come avviene per il bilancio tecnico

⁶per alcuni dati di interesse sono disponibili i valori aggiornati al 2018, ma non per tutti

⁷cfr. Boado Penas M.D.C., Vidal Melià C. (2013), *The actuarial balance of the payg pension system: The Swedish NDC model versus the DB-type models*. Da Holzmann, Palmer e Robalino, *NDC pension system in a changing pension world. Gender, politics and financial stability*, Vol.2, Banca Mondiale, Washington

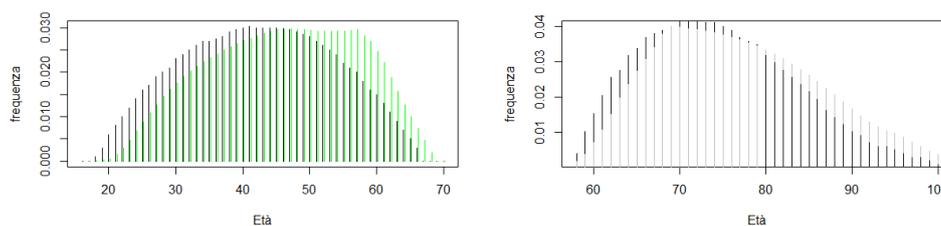


Figura 4.1: Distribuzione iniziale dell'età degli attivi (a sinistra) e dei pensionati (a destra) in $t = 0$ (barre nere) e in $t = 75$ (barre grigie)

attuariale stilato dal Ministero della Salute giapponese.

Al contrario non ha senso, invece, estendere troppo l'orizzonte temporale, dato che le previsioni sarebbero affette da un'incertezza così grande da ridurre il significato. L'analisi condotta da Devolder, Levantesi e Menzietti adotta un orizzonte di 75 anni, coerentemente con il valore considerato usualmente nelle valutazioni attuariali dei fondi pensioni. Inoltre questa scelta è legata al fatto di assumere che dopo 75 anni siano ormai trascurabili gli effetti dello shock demografico dovuto alla combinazione del *baby boom* e del successivo crollo delle nascite. Come si è visto nei controesempi a dimostrazione della Proposizione 3.2, gli effetti della non stazionarietà si fanno sentire anche dopo il ripristino della stazionarietà. In quegli esempi le generazioni di lavoratori erano soltanto due e l'effetto era limitato a un solo anno di mancato equilibrio di bilancio. Nella realtà il numero di coorti è di gran lunga maggiore, come più lungo sarà l'effetto di uno shock demografico.

Consideriamo una popolazione simulata di $N^1(0) = 1000$ maschi, suddivisi per età, secondo quanto riportato dal grafico di sinistra di Figura 4.1, coerentemente con l'articolo.

La distribuzione delle età di ingresso negli attivi $d_z(x, t)$ è presa costante nel tempo ed è riportata dalla Figura 4.2. E' stata ottenuta dagli autori osservando la distribuzione per età degli attivi iscritti all'Inps nel 2015 con meno di due anni di servizio.

La scelta di considerare una popolazione solo maschile semplifica il problema del calcolo delle probabilità di transizione, in particolare possiamo utilizzare direttamente le tavole di mortalità Istat maschili. Tuttavia nel calcolo dei salari medi e delle età di ingresso negli attivi, utilizziamo i dati relativi all'intera popolazione.

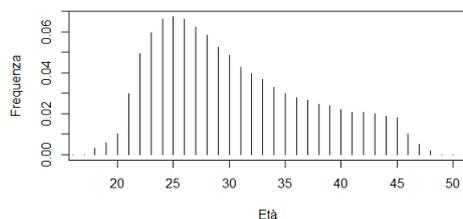


Figura 4.2: Distribuzione delle età di ingresso negli attivi

La distribuzione iniziale dei salari per età, infatti, è ottenuta dai dati INPS relativi al 2015, con un salario medio $s(0) = \text{€}29.617$

Il tasso iniziale di dipendenza (pensionati su attivi) è posto pari al rapporto pensionati INPS su contribuenti INPS nel 2015. Si tratta di un calcolo che non è facile come può sembrare a prima vista: bisogna scegliere quali pensionati e quali attivi includere. Ci sono attivi che hanno lavorato tutto l'anno e chi - soprattutto fra i giovani - ha lavorato qualche giornata soltanto; nel computo abbiamo incluso chiunque abbia contribuito per almeno una giornata. Mentre per i pensionati non è immediato separare dal totale (15,7 milioni nel 2015, Fonte: Inps) i percettori di pensione di vecchiaia/anticipata dalle altre categorie di pensionati, anche perché non si tratta di categorie ben distinte: ci sono pensionati che percepiscono più prestazioni di diversa natura, ad esempio una pensione di vecchiaia e una di reversibilità. I pensionati percettori di sola vecchiaia/anticipata erano 8,3 milioni nel 2015, con un tasso di dipendenza del 38% se rapportati a 22 milioni di attivi. Considerando nel computo anche chi percepisce oltre alla pensione di vecchiaia un'altra indennità, si ottiene il tasso di dipendenza iniziale $D(0) = 43,6\%$ (Fonte: [3]).

Coerentemente con $D(0)$, si pone la popolazione pensionata iniziale pari a $N^2(0) = 436$. La distribuzione iniziale delle età dei pensionati $N^2(x, 0)$ e delle rate di pensione per età $b(x, 0)$ è ottenuta dai dati INPS relativi al 2015. L'età media dei pensionati nel 2015 era di 73,9 anni, con una pensione annua media di €21.175 mensili.

Il tasso medio di sostituzione all'epoca di valutazione è dunque 71,5%. Si tratta di un valore molto alto⁸: la media dei paesi OCSE è del 53 %,

⁸Inoltre, se prendiamo in considerazione anche il TFR e supponiamo che venga trasformato in rendita, il tasso di sostituzione complessivo supera l'80%: un lavoratore che andasse in pensione dopo 35 anni di contributi, trasformando il TFR in rendita al 5%, riceverebbe il 13% dello stipendio

ovvero inferiore del 25%. Gli autori dell'articolo fissano la soglia di "accettabilità" del tasso di sostituzione nella funzione obiettivo proprio pari al 75% del tasso di sostituzione iniziale: $r_{soglia} = 0,75 \cdot r(0) = 53,6\%$.

Per quanto riguarda l'aliquota contributiva, è fissata pari al 30%. Il valore di riferimento è l'aliquota contributiva dell'Assicurazione Generale Obbligatoria dei lavoratori dipendenti, che in Italia è del 33%. Gli autori fissano $P = 30\%$, tenendo conto che parte del premio va a finanziare i benefici di invalidità e ai superstiti, trascurati nell'articolo.

Si tratta di un premio già molto alto e risulta difficile pensare di aumentarlo. Un premio il 5% più alto di quello attuale è scelto come soglia per il secondo termine della funzione obiettivo: $P_{soglia} = 1,05 \cdot P = 0,315$.

I due coefficienti ψ_1 e ψ_2 nella funzione obiettivo sono posti uguali e pari a 0,5, in modo da attribuire lo stesso peso all'adeguatezza delle pensioni e del premio. Nel paragrafo 4.5 esamineremo l'effetto di una modifica del peso attribuito all'una o all'altra componente.

Prima di passare alle soluzioni del problema di ottimizzazione, occorre fissare i valori dei vincoli. Per quanto riguarda il vincolo di sostenibilità finanziaria, si pone $\epsilon = 0,1\%$, dunque il valore attuariale degli oneri non potrà eccedere (o essere inferiore a) il valore attuariale dei contributi nella misura dello 0,1% dei contributi del primo anno $C(0)$. $C(0) = N^1(0)P_s(0) = 8,885$ milioni. Quindi $DLT(0,75)$ dovrà avere un valore nell'intervallo $(-8885, 8885)$.

Per il vincolo di liquidità si pone $u = 5\%$, poco al di sopra del "disavanzo relativo" al tempo iniziale (4%).

Infine si fissano i limiti minimi e massimi per le variabili di aggiustamento $\gamma(t)$, $\zeta(t)$, $\theta(t)$: si pone $G_1 = Z_1 = 0,95$, mentre $T_1 = 0,85$. Analogamente, $G_2 = Z_2 = 1,05$ e $T_2 = 1,15$. In pratica, si permette al premio di variare fra il 25,5% e il 34,5%, mentre l'intervallo a cui sono vincolati il tasso di adeguamento delle pensioni e dei montanti è più contenuto: in assenza di inflazione, se $\gamma(t) = G_1 = 0,95$, l'importo delle pensioni viene tagliato del 5%. Di conseguenza è difficile pensare di abbassare G_1 .

Per il vincolo di gradualità si pone $g_1 = z_1 = 0,99$, $t_1 = 0,95$, mentre $g_2 = z_2 = 1,01$ e $t_2 = 1,05$. Con $\theta(0) = 1$, si ottiene allora un premio all'anno 1 nell'intervallo $(-28,5\%; 31,5\%)$.

Inoltre, giudicando irrealistico un cambiamento annuale delle variabili di controllo, gli autori suppongono un aggiustamento meno frequente, ogni k anni, e pongono $k = 5$, pari alla durata ordinaria di una legislatura in

Italia. Quindi:

$$\gamma(t+1) = \gamma(t), \quad \zeta(t+1) = \zeta(t), \quad \theta(t+1) = \theta(t) \quad \text{se } t \neq k, 2k \dots$$

Quindi le dimensioni del problema si riducono sensibilmente: anziché un problema di ottimizzazione rispetto a 225 (75 x 3) variabili, diventa un problema in 45 variabili. Infatti, una volta determinate $\gamma(1), \zeta(1), \theta(1)$, sono fissate $\gamma(t), \zeta(t), \theta(t)$ per $t \leq 5$. Nota la terna per $t = 6$, sono fissate le terne di variabili per $6 \leq t \leq 10$ e così via.

Un aspetto delicato riguarda i montanti iniziali: valori diversi per $m(x, 0)$ possono fare la differenza tra un (forte) avanzo o un (forte) disavanzo nel bilancio tecnico. In particolare, agiscono sulla velocità con cui decresce nel tempo il tasso medio di sostituzione $r(t)$. Se da un lato $r(t)$ tende a calare nel lungo termine, con montanti iniziali esigui il calo è immediato, mentre con montanti iniziali più consistenti il calo è graduale. Nell'applicazione abbiamo utilizzato come montanti iniziali i dati forniti da Susanna Levantesi, ottenuti tramite una rielaborazione di dati Inps del 2015. A nostra volta abbiamo aggiustato i dati (al rialzo), in modo da tenere conto di quella fetta importante di popolazione che percepirà una pensione calcolata in parte con il metodo retributivo e che sarà generalmente più elevata.

Le probabilità iniziali di morte dei pensionati $p^{23}(x, 0)$ sono state ottenute dalla tavola di mortalità dei maschi italiani del 2015, scaricabile dal sito dell'Istat, mentre le probabilità di morte degli attivi sono trascurate e poste pari a zero, coerentemente con l'articolo [3].

Non si ha corrispondenza perfetta tra la popolazione generale, sulla cui esperienza di mortalità è stata costruita la tavola Istat, e la popolazione di nostro interesse, costruita a partire dai pensionati Inps. In ogni caso si tratta di una buona approssimazione della tavola di mortalità dei pensionati italiani.

Infine, si suppone che le probabilità monoannuali di morte diminuiscano a un tasso costante, fino a dimezzarsi dopo 75 anni.

Per quanto riguarda le probabilità di pensionamento $p^{12}(x, t)$, sono state riportate dall'articolo originale e sono state ottenute dai dati relativi ai pensionamenti nel 2015. Per tenere conto della progressiva stretta sulle pensioni anticipate e della tendenza a rimanere al lavoro più a lungo, si suppone che anche le probabilità di pensionamento anticipato si dimezzino in 75 anni, come riportato in Figura (4.3). $p^{12}(68, t)$ è, invece, tenuta costante pari a 1.

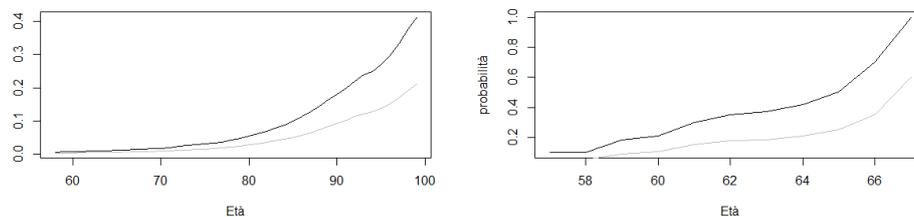


Figura 4.3: A sinistra: probabilità di morte $p^{23}(x, t)$, a destra: probabilità di pensionamento $p^{12}(x, t)$. La linea scura indica i valori per $t = 0$, quella chiara $t = 75$

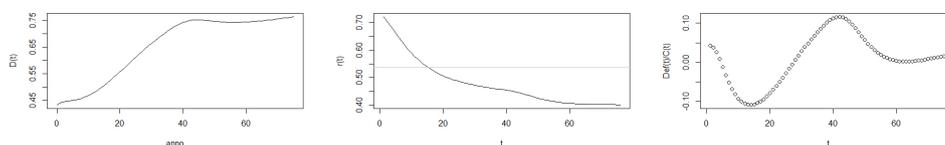


Figura 4.4: Risultati nello scenario base in assenza di ABM. Grafico di sinistra: tasso di dipendenza, in centro: tasso medio di sostituzione, a destra: rapporto annuo Deficit/Contributi

4.4 Risultati nello scenario base

Presentiamo ora i risultati dell'applicazione in R, ottenuta secondo il codice pubblicato in Appendice. Abbiamo ripercorso l'applicazione condotta da Devolder, Levantesi e Menzietti [3], ottenendo risultati analoghi, seppur con qualche lieve variazione dovuta alla non perfetta collimanza dei dati di partenza con quelli degli autori.

Il primo scenario considerato, lo scenario Base, prevede che la popolazione attiva resti costante, ossia che il tasso di crescita $\rho(t)$ sia sempre pari a 0. Questo dato è preso dalle previsioni di medio-lungo termine della Ragioneria generale dello stato ed è dovuto da un lato al progressivo calo della popolazione in età attiva, dall'altro all'aumento del tasso di occupazione.

Considerazioni analoghe portano a fissare il tasso di produttività del lavoro all'1,5%, di conseguenza anche $\xi(t)$, tasso di crescita dei salari è costante pari all'1,5%. Infine si assume che non ci sia inflazione.

Tutto questo determina un tasso di crescita di lungo termine dell'1,5%, che - per coerenza con il sistema italiano - è il nostro tasso di attualiz-

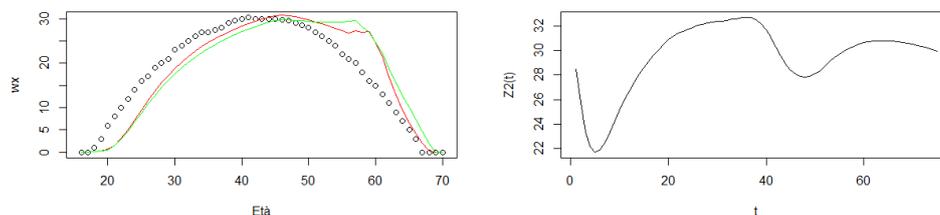


Figura 4.5: A sinistra: proporzione w_x degli attivi di età x sul totale per $t = 0$ (pallini neri), $t = 40$ (in rosso) e $t = 75$ (in verde), dove è chiaro l'effetto della diminuzione delle probabilità di pensionamento anticipato. A destra: Numero dei nuovi pensionati al variare del tempo

zazione. Anche il tasso di rendimento nozionale $g(t)$ è posto costante all'1,5%, visto che nel nostro sistema $g(t)$ è una media del tasso di crescita del PIL.

Prima di risolvere il problema di ottimizzazione, abbiamo osservato le previsioni degli indicatori di interesse in assenza di ABM. La Figura 4.4 mostra un forte aumento del tasso di dipendenza nei primi 40 anni, arrivando a sfiorare il 75% e rimanendo stabile per il periodo seguente. Dato che nello scenario base il numero degli attivi resta costante, l'aumento è determinato unicamente dalla crescita del numero dei pensionati.

I pensionati aumentano principalmente per la riduzione delle probabilità di morte: quelle monoannuali si dimezzano fra l'anno 0 e l'anno 75. Questo effetto è controbilanciato solo in parte dal dimezzamento delle probabilità di pensionamento anticipato (rispetto ai 68 anni). Inoltre, l'età modale della distribuzione iniziale degli attivi è fra i 40 e i 50 anni, dunque è naturale un aumento dei pensionati per i primi 20-30 anni, fino a quando non sarà andata in pensione la generazione dei quarantacinquantenni iniziali.

Il rapporto medio di sostituzione $r(t)$ decresce rapidamente nei primi anni. La linea orizzontale in figura indica la soglia del 53,6% utilizzata nella funzione obiettivo, che viene raggiunta dopo nemmeno 20 anni. La decrescita rallenta poi, per stabilizzarsi intorno al 40%.

Il forte calo iniziale è dovuto all'entrata in regime del metodo contributivo, mentre gran parte dei pensionati iniziali riceve una rendita calcolata con il metodo retributivo, di importo generalmente maggiore, con un tasso medio di sostituzione del 70%. Applicando la regola con-

tributiva ai montanti iniziali, si ottengono, invece, delle pensioni iniziali fra il 40% dello stipendio medio a 58 anni e il 70% a 67 anni.⁹

Una volta che il metodo contributivo è a regime, $r(t)$ diminuisce ancora, ma meno rapidamente: il calo ora è da imputare esclusivamente alla revisione dei coefficienti di trasformazione a seguito del calo della mortalità.

Infine, consideriamo l'andamento del deficit rapportato ai contributi (terzo grafico di figura 4.4). A regime, con un tasso di dipendenza del 75% e un tasso di sostituzione del 40%, si ottiene un premio di equilibrio $P_{eq} = 0,75 \cdot 0,40 = 0,3$, che coincide proprio con l'aliquota contributiva reale, garantendo l'equilibrio finanziario. Nei 75 anni precedenti, tuttavia, il deficit cambia più volte di segno: all'istante iniziale è circa il 4% dei contributi. Seguono circa vent'anni di attivo e circa quaranta di passivo. Nel calcolo del debito latente totale al tasso di attualizzazione annuo dell'1,5%, il periodo di attivo non è sufficiente a controbilanciare il periodo in passivo: $DLT(0,75) = 5,85$ milioni, pari al 65% dei contributi del primo anno.

Concludiamo che nello scenario base, in assenza di ABM, il sistema non garantisce né l'adeguatezza sociale, né la sostenibilità finanziaria, a fronte di un premio non irrilevante del 30%. Il valore della funzione obiettivo è 2,86. Si osservi, però, che il valore ottimale della funzione potrebbe essere maggiore: in assenza di ABM non sono soddisfatti né il vincolo di sostenibilità né quello di liquidità, dunque $(\gamma(t), \zeta(t), \theta(t) = 1 \ \forall t)$ non è una soluzione ammissibile del problema di ottimizzazione vincolata.

Presentiamo ora i risultati del problema di ottimizzazione, stimati tramite l'algoritmo *cobyla* (*Constrained Optimization by Linear Approximations*) del pacchetto *nloptr* in R. Le soluzioni trovate sono ottimi locali, non abbiamo a disposizione risultati teorici che garantiscano che questi siano anche ottimi assoluti. Con un certo grado di confidenza possiamo considerare le soluzioni trovate degli ottimi assoluti, dato che partendo da valori iniziali molto diversi, l'algoritmo converge a soluzioni vicine¹⁰. Le soluzioni qui riportate si riferiscono alla scelta di inizializzare

⁹Ricordando che nel modello le probabilità di transizione non sono selezionate, quindi si trascura che nella realtà chi va in pensione anticipata tendenzialmente ha un numero maggiore di anni di contributi, e - di conseguenza - una pensione più ricca. Pertanto ha sì un montante contributivo più basso, dato che smette di lavorare prima, ma la differenza non è marcata, dato che ha cominciato a lavorare giovane.

¹⁰Disponendo di un computer sufficientemente potente, si potrebbe scrivere un programma di ricerca diretta della soluzione ottimale, che valuti la funzione obiettivo in tutte le combinazioni ammissibili delle terna $(\gamma(t), \zeta(t), \theta(t))$.

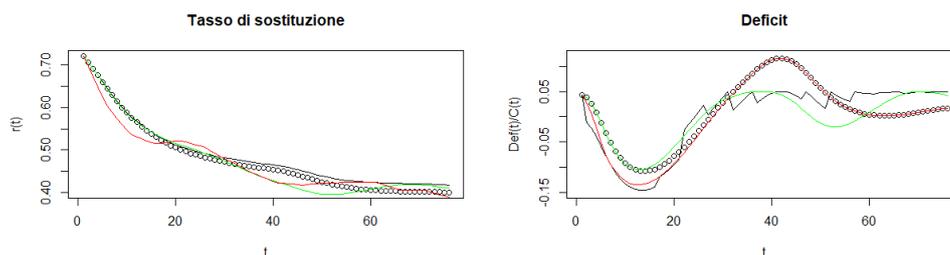


Figura 4.6: Tasso medio di sostituzione e rapporto Deficit/Contributi in assenza di ABM (pallini), con ABM solo sul premio (linea nera), solo sul tasso nozionale (linea verde), sul fattore di rivalutazione delle pensioni (linea rossa)

l'algoritmo nel punto $(\gamma(t), \zeta(t), \theta(t) = 1 \forall t)$, che corrisponde all'assenza di ABM.

Il programma in R utilizzato per risolvere il problema è riportato in Appendice. Consta di due parti: la prima definisce lo scenario (Base, 2, 3), ovvero tutte le variabili che non dipendono dagli ABM ($N^1(x, t)$, $N^2(x, t)$, $s(x, t), \dots$). La seconda definisce tre funzioni: *Obiettivo*, *Vincoli* e *Risultati*, che hanno per input il vettore dei $(\gamma(t), \zeta(t), \theta(t))$. *Obiettivo* restituisce solo il valore della funzione obiettivo ed è la funzione da ottimizzare tramite *cobyla*. *Vincoli* definisce il vincolo di equilibrio finanziario, il vincolo di liquidità e i vincoli di variazione "graduale" dei parametri. Se i vincoli sono rispettati, la funzione restituisce un vettore di componenti maggiori o uguali a zero.

La funzione *Risultati* è analoga a *Obiettivo*, ma oltre a restituire il valore della funzione di perdita (funzione obiettivo), fornisce i valori di tutte le altre grandezze di interesse (ammontare dei contributi, oneri, tasso di sostituzione, deficit, ecc. alle varie epoche).

Per prima cosa, abbiamo applicato il processo di ottimizzazione alle tre leve prese una ad una, vincolando i parametri rimanenti a 1, per ogni t . La Figura 4.6 mostra l'andamento del tasso di sostituzione e del rapporto Deficit/Contributi rispettivamente in assenza e in presenza di ABM. In entrambi i casi si ha una fase iniziale in attivo di bilancio, particolarmente evidente nel caso dell'ABM sul fattore di rivalutazione delle pensioni, che contribuisce a ridurre velocemente l'alto tasso di sostituzione iniziale. Dall'anno 30 in poi si è, invece, stabilmente in deficit. E', però, evidente la differenza nell'entità del deficit, attuando o meno bilanciamenti: nel primo caso il deficit è "bloccato" al 5%. Questo deficit nella seconda fase

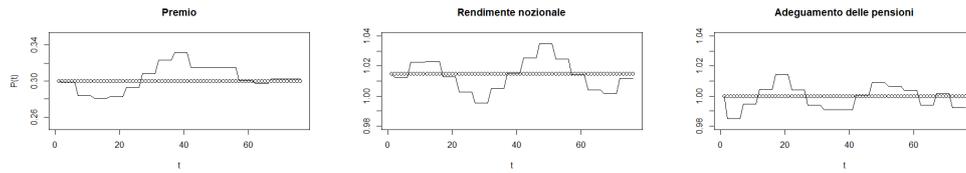


Figura 4.7: Valori dei tre parametri senza ABM (pallini), con singolo ABM (linea)

è reso sostenibile dal surplus della prima fase, incrementato dagli ABM.

Per quanto riguarda il tasso medio di sostituzione, solo l'aggiustamento del premio garantisce che questo sia sempre maggiore o uguale a quello che si avrebbe senza ABM. Se il bilanciamento avviene agendo solo sul tasso nozionale o sull'indicizzazione delle pensioni, il tasso di sostituzione migliora solo per certi periodi, ma tendenzialmente peggiora. E' particolarmente evidente come la curva corrispondente all'ABM sul fattore di rivalutazione delle pensioni mostri una rapida discesa; questo spiega il forte surplus nei primi anni (grafico di destra).

In effetti solo l'ABM sui contributi migliora il valore della funzione obiettivo, abbassandolo a 2,53. Gli ABM su $g(t)$ e su $\lambda(t)$ peggiorano il valore della funzione obiettivo (rispettivamente 2,97 e 2,86), ma - rispetto alla situazione in assenza di ABM - garantisce il rispetto del vincolo di sostenibilità finanziaria (e di liquidità).

Questo si spiega piuttosto facilmente: se si intende raggiungere la sostenibilità finanziaria agendo solo sul tasso di rendimento (montanti) o solo sull'indicizzazione delle pensioni, si è costretti a ridurre l'entità delle pensioni future o attuali. Di conseguenza peggiora il valore della funzione obiettivo. Se si agisce solo sul premio, l'equilibrio è raggiunto, aumentando l'aliquota contributiva e - di conseguenza - l'ammontare delle pensioni future.

Agendo sul premio si ha un *trade-off* tra i due termini della funzione obiettivo: aumentando il premio, aumenterà il tasso di sostituzione e si abbasserà il valore del primo addendo della funzione obiettivo. Se però il premio è maggiore della soglia c_2 , aumenta il secondo addendo della funzione obiettivo.

La Figura 4.7 mostra la traiettoria ottimale in presenza di ABM sui singoli parametri. Il premio segue grosso modo l'andamento del Deficit in assenza di ABM, superando per soli 10 anni la soglia del 31,5%. Più irregolare è l'andamento negli altri due casi. Il fattore di rendimento

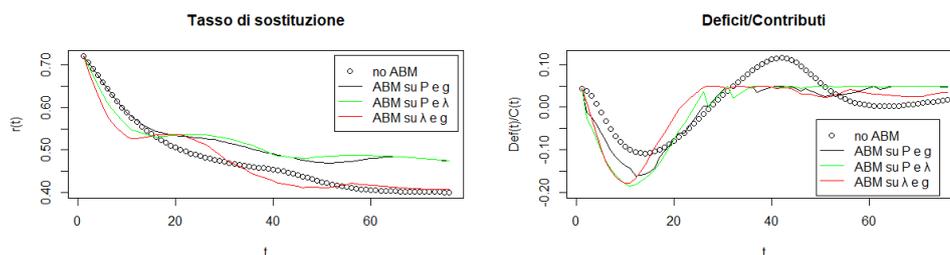


Figura 4.8: Tasso medio di sostituzione e rapporto Deficit/Contributi in assenza di ABM (pallini), con ABM a due leve (linee)

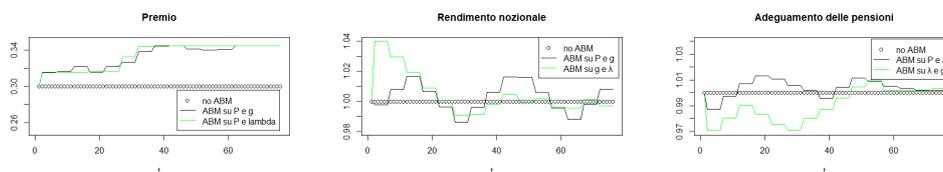


Figura 4.9: Soluzioni del problema di ottimizzazione, nel caso di un aggiustamento a due "leve"

nozionale scende solo per 5 anni leggermente al di sotto della soglia di 1 (ossia con rendimento negativo).

4.4.1 Doppio aggiustamento

Nelle Figure 4.9 e 4.8 sono riportati i risultati nel caso di ottimizzazione a due leve. Si ha una riduzione significativa del valore (ottimale) della funzione obiettivo solo nel caso in cui uno dei due parametri adeguati è il premio: il valore minimo è pari a 1,94 con l'ABM su premio e tasso nozionale, 1,81 con l'ABM su premio e rivalutazione delle pensioni. In questi casi si ha un aumento soddisfacente del tasso di sostituzione a fine periodo dal 40% che si registrerebbe senza aggiustamenti a circa il 50%. Questo solo a fronte di un forte aumento del premio, che nella seconda parte del periodo raggiunge il massimo accettabile in base ai vincoli (34,5%). Nell'ottimizzazione "vince" l'aumento dell'adeguatezza delle pensioni rispetto all'aumento del premio. Nelle prossime sezioni esamineremo come cambia la soluzione modificando i pesi dei due addendi della funzione obiettivo.

Agire sui fattori di rivalutazione delle pensioni e dei contributi non migliora sensibilmente il valore della funzione obiettivo, che diventa pari a 2,79: per rispettare il vincolo di equilibrio finanziario, γ e ζ riducono

4.5. SENSIBILITÀ ALLO SCENARIO ECONOMICO-DEMOGRAFICO85

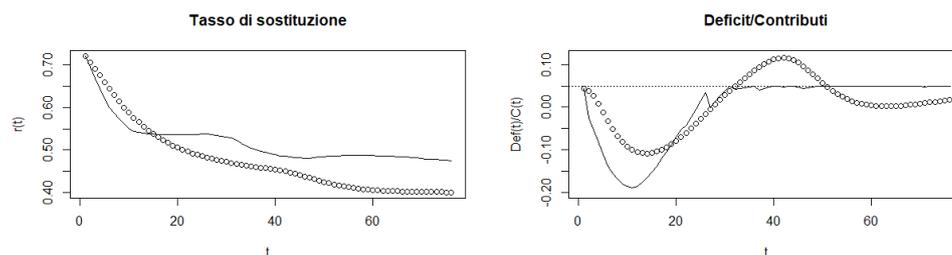


Figura 4.10: Tasso medio di sostituzione e rapporto Deficit/Contributi in assenza di ABM (pallini), con ABM su tutte e tre le leve (linea nera)

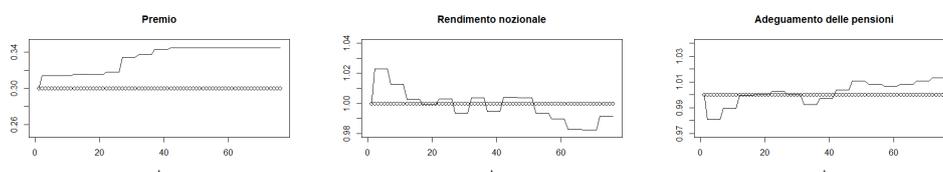


Figura 4.11: Valori di premio, fattore di rendimento dei montanti e di indicizzazione delle pensioni in assenza di ABM (pallini) e in presenza di ABM su tutti e tre i parametri (linee)

l'ammontare delle pensioni, peggiorando il tasso di sostituzione.

Consideriamo, infine, l'ABM applicato a tutte e tre le variabili.

In questo caso la diminuzione della funzione obiettivo è contenuta rispetto al valore ottenuto con la doppia ottimizzazione su P (tramite θ) e su λ (tramite γ): vale 1,80. Una volta che si è agito su P e su λ , non ha un forte effetto modificare la terza leva: attraverso il premio si agisce sulla massa dei contributi, con il tasso di indicizzazione si agisce sugli oneri. Modificare il tasso nozionale ha un impatto sulle pensioni, che però sono già state riviste, agendo sul tasso di indicizzazione.

4.5 Sensibilità allo scenario economico-demografico

Consideriamo uno scenario alternativo (scenario 2), caratterizzato da condizioni economiche e demografiche sfavorevoli: poniamo il tasso di crescita degli attivi $\rho(t)$ pari a $-0,5\%$ per ogni t , il tasso di crescita del salario medio individuale $\xi(t)$ pari all' 1% . Di conseguenza il tasso di rendimento nozionale risulta $g(t) = 0,5\% \forall t$ e - assumendo ancora l'assenza di inflazione - anche il tasso di attualizzazione $j(t)$ utilizzato per calcolare

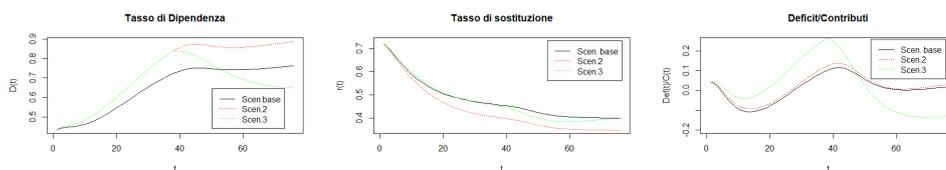


Figura 4.12: Evoluzione del sistema pensionistico nei tre scenari, in assenza di ABM

i coefficienti di trasformazione in rendita.

Inoltre consideriamo un ulteriore scenario (scenario 3), in cui le condizioni sono le stesse dello scenario 2 per i primi 37 anni, mentre per i 38 anni successivi poniamo $\rho(t) = 0,5\%$ e $\xi(t) = 2\%$. Quindi $g(t) = 0,5\%$ nel primo periodo e $2,5\%$ nel secondo. In questo modo, la crescita economica media nell'arco dei 75 anni è la stessa dello scenario base, ma caratterizzata da due cicli: il primo con una bassa crescita, il secondo con una crescita più rapida rispetto allo scenario base. Il tasso di attualizzazione $j(t)$ è posto pari al tasso annuo di crescita di lungo periodo, ovvero l'1,5%, come nello scenario base.

In Figura 4.12 si possono confrontare i grafici dell'evoluzione delle principali grandezze del sistema pensionistico nei tre scenari in assenza di meccanismi di bilanciamento. L'effetto di uno scenario sfavorevole è evidente, se guardiamo il rapporto pensionati su attivi: nello scenario 2 raggiunge il 90%. Il rapporto Deficit/Contributi ne risente, è sempre maggiore rispetto allo scenario base, tuttavia non "di molto", dato che l'effetto è in parte controbilanciato dalla riduzione delle prestazioni.

La differenza nel deficit è, invece, marcata nello Scenario 3, dove la dinamica della popolazione è per 37 anni la stessa dello Scenario 2, ma con gli stessi coefficienti di conversione in rendita dello Scenario base. La crescita del tasso di dipendenza nel primo periodo non è bilanciata dal calo (contemporaneamente) del tasso medio di sostituzione rispetto allo scenario base. Un calo si ha nel secondo periodo ed è dovuto al fatto che fra $t = 30$ e $t = 40$ comincia ad andare in pensione chi ha ricevuto per l'intera vita lavorativa il tasso di rendimento (sfavorevole) dello 0,5% annuo e quindi ha montanti contributivi esigui. E' ormai assorbito l'effetto dei montanti iniziali alti.

Il surplus del secondo periodo non basta per colmare gli ammanchi causati dal primo periodo, il debito latente totale è pari al 189% dei contributi del primo anno (162% nello Scenario 2).

Può suonare strano il fatto che il tasso di sostituzione scenda nel

4.5. SENSIBILITÀ ALLO SCENARIO ECONOMICO-DEMOGRAFICO87

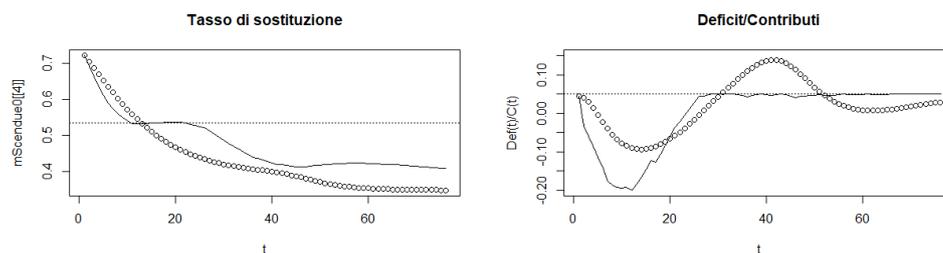


Figura 4.13: Evoluzione del tasso di sostituzione e del deficit nello Scenario 2 in assenza (pallini) e in presenza (linea nera) di ABM

secondo periodo, quando lo scenario è più favorevole che nello scenario base. Si ha, infatti, una sorta di "momento di inerzia": i montanti al momento del pensionamento (e di conseguenza le rate di pensione) riflettono le condizioni economiche registrate nel corso dei decenni precedenti. Se lo scenario economico migliora, non migliorano le pensioni dei pensionati attuali, bensì quelle che riceveranno gli attuali lavoratori una volta che saranno andati in pensione.

Al contrario, l'ammontare dei contributi versati al fondo varia immediatamente: se oggi migliora lo scenario demografico-economico (più attivi, che ricevono stipendi maggiori), il fondo riceve da subito contributi maggiori.

Questa asimmetria tra effetto immediato sui contributi ed effetto ritardato sui benefici spiega il comportamento del Deficit nello Scenario 3.

Qui vale la pena fare un confronto con la Proposizione 3.2. Risultava che il rallentamento della crescita demografica provocava un passivo di bilancio, mentre un'accelerazione un attivo. Nello Scenario 2 sembrerebbe essere vero il contrario, visto che si ha a che fare con l'accelerazione della crescita demografica ed economica e allo stesso tempo con un debito latente maggiore rispetto agli altri scenari. Come abbiamo osservato, il maggiore debito latente nello Scenario 3 è da imputare ai coefficienti di trasformazione troppo generosi nel primo periodo, calcolati al tasso di crescita di lungo periodo 1,5%, maggiore del tasso reale di crescita (0,5%). Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo, invece, trascurato tutto questo, limitandoci a considerare una sola generazione di pensionati, per cui non è nemmeno stato necessario calcolare coefficienti di trasformazione.

Concludiamo la sezione con una precisazione: sia lo Scenario Base che lo Scenario 1 sono stati costruiti con un tasso di crescita demografica

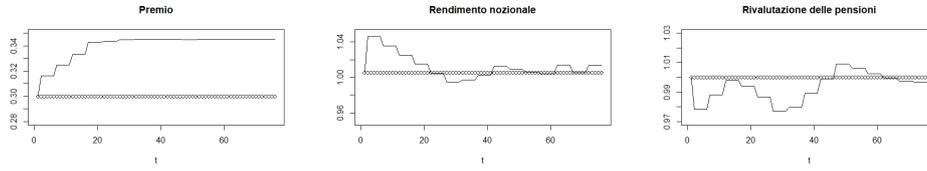


Figura 4.14: Soluzione del problema di ottimizzazione (a tre leve) nello Scenario 2

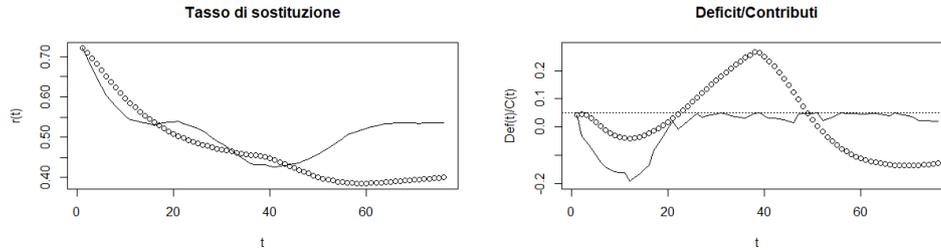


Figura 4.15: Evoluzione del tasso di sostituzione e del deficit nello Scenario 3 in assenza (pallini) e in presenza (linea nera) di ABM

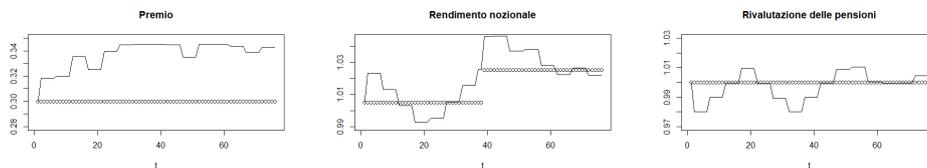


Figura 4.16: Soluzione del problema di ottimizzazione (a tre leve) nello Scenario 3

costante. Questo potrebbe farci pensare di essere in condizioni demografiche stazionarie. In realtà, per come è costruito il modello, ci sono altri fattori che influiscono sulla dinamica della popolazione: l'età iniziale degli attivi, la distribuzione dell'età di ingresso negli attivi (costante nel tempo) e la distribuzione di probabilità di pensionamento, che varia nel tempo.

Tutti questi fattori comportano che la distribuzione delle età degli attivi varia nel tempo. Di seguito riportiamo il grafico della distribuzione dell'età degli attivi in $t = 0$ (barre nere) e $t = 75$ (barre verdi). E' piuttosto evidente la tendenza all'invecchiamento della popolazione attiva, con un aumento della proporzione di attivi sopra i 60 anni, effetto della riduzione della propensione al pensionamento anticipato (cfr. Figura 4.3).

4.6 Sensibilità ai fattori della funzione di perdita

Finora abbiamo risolto il problema di ottimizzazione in scenari diversi, ma scegliendo di assegnare sempre lo stesso peso ai due termini della funzione da minimizzare. Ora mostreremo come variano i risultati al variare dei pesi ψ_1, ψ_2 , mantenendo fisso lo scenario economico-demografico, ovvero lo scenario base. Coerentemente con l'articolo di Levantesi et Al. [3], presentiamo come *Scenario A* i risultati relativi alla minimizzazione con $\psi_1 = 1, \psi_2 = 0$, ovvero assegnando tutto il peso al termine relativo all'adeguatezza delle pensioni. Viceversa, parleremo di *Scenario B*, quando $\psi_1 = 0, \psi_2 = 1$. Infine, nello *Scenario C*, $\psi_1 = 0,25$ e $\psi_2 = 0,75$. Pur chiamandoli "Scenari", non si tratta di un'analisi per scenari, come nel paragrafo precedente, dove a ogni scenario corrispondevano ipotesi demografiche ed economiche differenti. Ora i risultati si riferiscono sempre allo scenario Base, semplicemente assegnando diversi pesi agli addendi della funzione obiettivo.

Le figure di queste pagine mostrano i risultati negli Scenari A, B e C. La curva verde nei grafici corrisponde sempre alla soluzione ottimale ottenuta nello Scenario Base con l'ABM su tutte e tre le componenti. Dalla Figura 4.17 emerge che - se $\psi_2 = 0$ - per i primi 40 anni il tasso di sostituzione è maggiore di quello ottenuto con il triplice ABM nello scenario Base. Nel secondo periodo i due tassi di sostituzione coincidono. Il premio ottimale è sempre maggiore o uguale rispetto a quanto ottenuto nello Scenario Base, non essendoci più quell'effetto di trade-off tra i due termini della funzione obiettivo. Tuttavia, già nello Scenario Base si

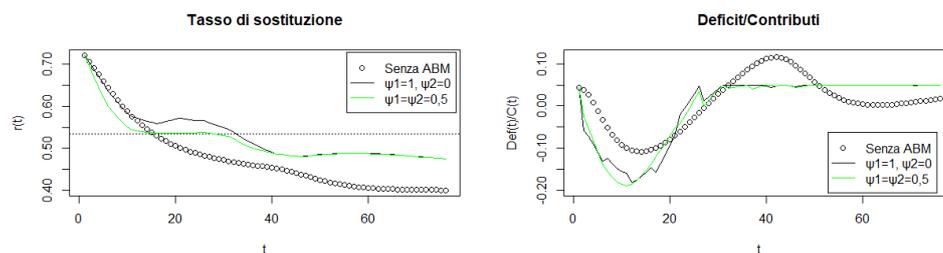


Figura 4.17: Evoluzione del tasso di sostituzione e del rapporto Deficit/Contributi: confronto tra lo Scenario Base e lo Scenario A

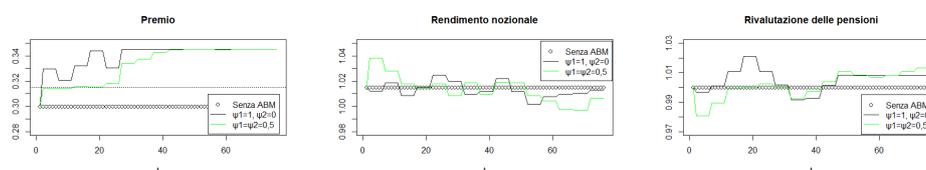


Figura 4.18: Parametri ottimali del sistema: confronto tra lo Scenario Base e lo Scenario A

era raggiunto il limite superiore del 34,5% negli ultimi anni del periodo: nemmeno nello scenario A si può incrementare ulteriormente il premio. Possiamo concludere che porre tutto il peso della funzione obiettivo sul fattore di adeguatezza delle pensioni permette di mantenere il tasso di sostituzione per un periodo più lungo al di sopra della soglia di accettabilità. Sul lungo periodo, però, i risultati sono analoghi allo scenario Base.

Le figure 4.19 e 4.20 mostrano i risultati ottenuti applicando la funzio-

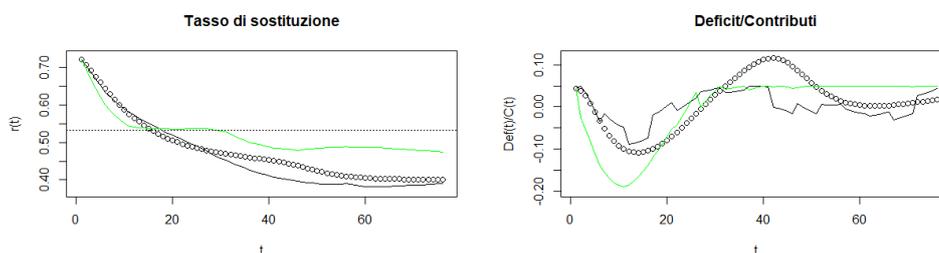


Figura 4.19: Evoluzione del tasso di sostituzione e del deficit nello scenario Base (verde), nello scenario B (linea nera) e in assenza di ABM (pallini)

4.6. SENSIBILITÀ AI FATTORI DELLA FUNZIONE DI PERDITA91

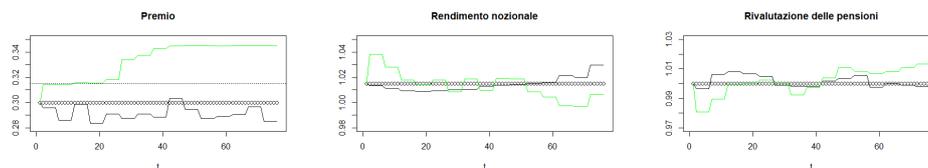


Figura 4.20: Parametri ottimali nello scenario Base (verde), nello scenario B (linea nera) e in assenza di ABM (pallini)

ne *cobyla* in R allo Scenario B. Bisogna ricordare, però, che nello Scenario B sono ammissibili più soluzioni al problema, una delle quali è quella che abbiamo ottenuto. Infatti, qualsiasi soluzione che rispetti i vincoli, mantenendo il premio al di sotto della soglia del 31,5% rende nullo il valore della funzione obiettivo. Ad esempio, basta utilizzare una delle soluzioni del problema nello scenario Base che non coinvolga il premio, ad esempio l'ABM a una singola leva sul fattore di adeguamento delle pensioni.

Per questo motivo è stato proposto anche lo Scenario C, che ha lo stesso scopo dello Scenario B: vedere come variano i risultati assegnando maggior rilevanza agli aumenti del premio oltre la soglia del 31,5%. Ora la soluzione ottimale è non banale e non annulla il valore della funzione obiettivo.

In questo caso, dalla Figura 4.22 è evidente come cambia il comportamento del premio ottimale rispetto allo scenario Base: ora è "livellato" al 31,5% (benché non sia vincolato al 31,5%, ma al 34,5%). La traiettoria ottimale degli altri parametri non varia sistematicamente rispetto allo Scenario Base. Allo stesso modo, l'evoluzione del deficit non varia sistematicamente fra lo Scenario Base e lo Scenario C, come mostra il grafico di destra di Figura 4.21. L'abbassamento del premio ottimale rispetto allo Scenario Base ha, invece, per conseguenza che non si riesce a raggiungere un miglioramento significativo del tasso di sostituzione sul lungo periodo, diversamente da quanto ottenuto nello scenario Base, dove si era riusciti a portare il tasso di sostituzione in $t = 75$ dal 40% in assenza di bilanciamenti fino al 50%.

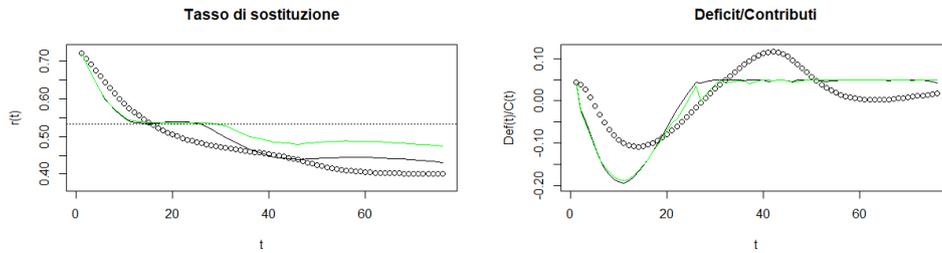


Figura 4.21: Evoluzione del tasso di sostituzione e del deficit nello scenario Base (verde), nello scenario C (linea nera) e in assenza di ABM (pallini)

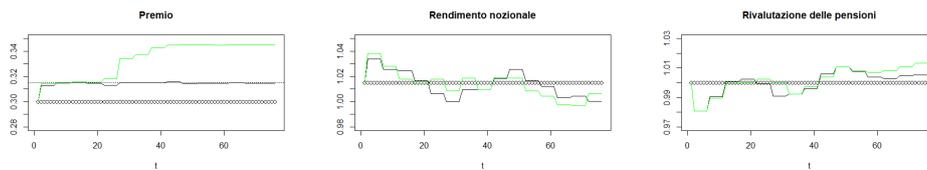


Figura 4.22: Parametri ottimali nello scenario Base (verde), nello scenario C (linea nera) e in assenza di ABM (pallini)

Capitolo 5

Conclusioni e aspetti critici

L'appetito vien mangiando dice il noto detto popolare. Così è stato anche per il lavoro preparatorio e di redazione di questa tesi: la lettura dell'articolo di Devolder, Levantesi e Menzietti mi ha incuriosito, spingendomi ad esaminare aspetti che nell'articolo originale sono trattati marginalmente, ma fondamentali per avere un quadro completo del problema. Per capire la necessità di meccanismi di bilanciamento nei fondi pensione a contributi definiti nozionali, occorre avere in mente prima di tutto come mai non sono in equilibrio automatico e sotto quali condizioni - irrealistiche - viene raggiunta la stabilità finanziaria.

Il meccanismo di bilanciamento automatico presentato in questo lavoro si pone sulla scia di altre proposte analoghe, ma si contraddistingue per l'aver posto l'accento non solo sull'esigenza di stabilità finanziaria, ma anche sulla necessità di adeguatezza delle pensioni e, più in generale, di interventi gradualisti che agiscano con equità tra le varie generazioni. La logica del problema di ottimizzazione del capitolo 4 è proprio questa: fra tutte le soluzioni che garantiscono la sostenibilità finanziaria si sceglie quella che determina pensioni meno "magre".

Centrale in quest'ottica è includere fra le possibili "leve" l'aliquota contributiva, anziché solo il tasso di rendimento nozionale e il tasso di adeguamento delle pensioni. Se non si includesse il premio, l'equilibrio potrebbe essere raggiunto solo tagliando le pensioni. Invece, aumentando (leggermente) il premio, si ha un apporto di risorse extra per il fondo pensione senza gravare eccessivamente sulle pensioni e sui pensionati.

Cercando di spiegare ad amici e conoscenti il contenuto di questa tesi, mi trovo in difficoltà a spiegare questo punto fondamentale, ossia che - scegliendo appropriatamente i parametri - l'esigenza di adeguatezza sociale non è inconciliabile con quella di sostenibilità finanziaria. Gene-

ralmente mi sento rispondere qualcosa come: "Dov'è il miracolo? Dov'è l'inghippo?".

Il meccanismo di bilanciamento proposto non ha niente di miracoloso, semplicemente elude il problema di fondo: dove trovare le risorse, se nella realtà italiana è difficile pensare di aumentare un'aliquota contributiva che è già molto alta? Ma questo esula dallo scopo dell'articolo e di questa tesi: come ampiamente rimarcato, il modello permette di determinare il premio teorico necessario per un certo standard di pensioni, trascurando l'effetto sul mercato del lavoro.

Ad ogni modo, nonostante i suoi difetti, non si può negare l'importanza teorica del modello: un fondo pensioni NDC che attui questo ABM è automaticamente stabile anche in condizioni demografiche ed economiche non stazionarie, risolvendo le criticità riscontrate nei fondi NDC "puri", che in presenza di crisi possono essere poco desiderabili dagli iscritti. Dal lato pratico, la procedura di adeguamento tramite ABM è uno strumento utile per i decisori pubblici. Inoltre si tratta di una procedura effettivamente attuabile: come una commissione si occupa di aggiornare periodicamente i coefficienti di trasformazione in rendita, così potrebbe occuparsi di rivedere anche gli altri parametri - con le dovute accortezze, evitando un atteggiamento fideistico nei confronti del modello.

Appendice A

Riportiamo di seguito il programma in R utilizzato nel capitolo 4.

Al primo passo vengono importate la tavola di mortalità, la distribuzione delle età di ingresso negli attivi, i montanti iniziali e vengono definite le variabili globali:

```
tav<-read.csv("./Tavola2015.csv",sep = ";")
tav$qx<-tav$dx/tav$lx
Adzx<-read.csv("./dzx.csv",sep=';')
Adzx$dzx_art[34:55]<-vector('numeric',length=22)
dzx<-Adzx$dzx_art/sum(Adzx$dzx_art)

Nxt0art<-read.csv('./Nxt0art.csv',sep=';')
T<-75
ro<-0
alfa<-16
csi<-0.015
q<-seq(1:15)
for (t in 1:15) q[t]<-1

P<-vector(mode='numeric',length = T+1)
P[1]<-0.3

g<-csi
mxt0<-read.csv("./m_xt0.txt")

###Variabili di controllo
```

Poi vengono inizializzate alcune matrici: N1 contiene le numerosità degli attivi rispetto all'età e all'epoca. L'elemento di posizione $(x - 16, t)$ corrisponde a $N^1(x, t)$. Analogamente, la matrice N2 contiene le

numerosità dei pensionati.

cxt e mxt contengono i contributi individuali per ogni età ed ogni epoca, mentre Cxt e Mxt sono i corrispondenti collettivi.

Bxt contiene i benefici collettivi per ogni età ed epoca, Bzxt solo quelli relativi alla nuova coorte di pensionati.

Infine, P12 e P23 contengono le probabilità di transizione, Z2 i nuovi pensionati $Z^2(x, t)$.

```
N1<-matrix(data=0,nrow=55,ncol=T+1)
```

```
eta<-seq(16,70,1)
```

```
N1<-'rownames<- '(N1,eta)
```

```
N1<-'colnames<- '(N1,0:75)
```

```
cxt<-N1
```

```
P12<-N1
```

```
Z1<-N1
```

```
Z2<-matrix(data=0,nrow=14,ncol=76)
```

```
Z2<-'rownames<- '(Z2,seq(58,71,1))
```

```
axt<-Z2
```

```
Bzxt<-Z2
```

```
Mxt<-N1
```

```
N2<-matrix(data=0,nrow=53,ncol=T+1)
```

```
N2<-'rownames<- '(N2,seq(58,110,1))
```

```
N2<-'colnames<- '(N2,0:75)
```

```
Bxt<-N2
```

```
P23<-N2
```

```
pensxt<-N2
```

```
#popolazione iniziale attivi:
```

```
N1[,1]<-Nxt0art[,2]
```

```
salin<-N1xt0[,4]
```

```
#prob di transizione:
```

```
P12[42:55,1]<-c(0.1,0.1,0.18,0.21,0.3,0.35,0.37,0.42,0.5,0.7,1.2,1,1,1)
```

```
for(t in 1:T) {P12[42:52,t+1]<-P12[42:52,t]/1.009284891 #p12 si dimezzano
```

```
P12[52,t]<-min(P12[52,t],1)
```

```
}
```

```
P12[53:55,]<-matrix(data=1,ncol=T+1)
```

```
N1tot<-seq(0,T)
```

```

Z1tot<-seq(0,T)
N1tot[1]<-1000

#Pensionati iniziali:
N2xt0<-read.csv('./N2xt0.csv',header=T,sep=';')
N2xt0$freq<-N2xt0$N2art/sum(N2xt0$N2art)
N2xt0$pensin<-N2xt0$freq*434
N2[1:43,1]<-N2xt0$pensin

#prob iniziali di decesso:
P23[,1]<-tav$qx
P23[51:52,1]<-c(0.75,0.75)
for (t in 2:76) P23[,t]<-P23[,t-1]/1.009 #p23 si dimezzano
#for (t in 2:76) P23[,t]<-P23[,1]*(1-(t-1)/150)
P23[43:53,]<-matrix(data=1,ncol=T+1)
#coeff di conversione in rendita
for (t in 1:76){
  for (x in 1:14) {
    P22hxc<-matrix(data=0,nrow=53)
    for (h in x:53) P22hxc[h]<-prod(1-P23[x:h,t])/(1+g)^(h-x+1)
    axt[x,t]<-sum(P22hxc)+1 #verificare se è corretto il +1!!!!
  }
}
#Montanti collettivi iniziali
Mxt[3:53,1]<-mxt0[1:51,1]*N1[3:53,1]*k

#Pensioni al tempo 0:
pensxt[1:43,1]<-N2xt0[,3]
Bxt[,1]<-pensxt[,1]*N2[,1]

#evoluz degli attivi
for (t in 2:76) {
  N1tot[t]<-N1tot[t-1]*(1+ro)
  N1[-1,t]<-N1[-55,t-1]*(1-P12[-55,t-1])
  Z1tot[t]<-N1tot[t]-sum(N1[,t])
  Z1[,t]<-Z1tot[t]*dzc
  N1[,t]<-N1[,t]+Z1[,t]}

```

```

#evoluz dei pensionati
for (t in 2:76) {
  N2[-1,t]<-N2[-53,t-1]*(1-P23[-53,t-1])
  Z2[,t]<-N1[42:55,t-1]*P12[42:55,t-1]
  N2[1:14,t]<-N2[1:14,t]+Z2[,t]
}

Dipendenza<-seq(1,76)
for (t in 1:76) Dipendenza[t]<-sum(N2[,t])/N1tot[t]

```

Adesso che abbiamo definito tutte le variabili globali, che non dipendono dagli ABM, siamo pronti per calcolare la funzione obiettivo, ObPzg nel programma. E' definita come funzione di un vettore di 45 componenti: 15 per i fattori di aggiustamento del premio, 15 per il rendimento nozionale, 15 per l'adeguamento delle pensioni. Conoscendo questo vettore, è possibile calcolare i contributi versati, i montanti, le pensioni e, quindi, il tasso medio di sostituzione $r(t)$, rt nel programma. Conoscendo $r(t)$ per ogni anno del periodo, possiamo calcolare il valore della funzione obiettivo.

```

  ObPzg<- function(x)
{
  theta<-x[1:15]
  zeta<-x[16:30]
  gamma<-x[31:45]
  P[1]<-0.3
  for (k in 0:14) P[(5*k+2):(5*k+6)]<-0.3*theta[(k+1)]

  for (t in 1:76) cxt[,t]<-P[t]*salin*(1+csi)^(t-1)

  ###aggiustamento tasso nozionale
  G<-numeric(76)
  G[1]<-1
  for (k in 0:14) G[(5*k+2):(5*k+6)]<-gamma[(k+1)]

  Z<-numeric(76)
  Z[1]<-1
  for (k in 0:14) Z[(5*k+2):(5*k+6)]<-zeta[(k+1)]

  #Contributi
  Cxt<-cxt*N1

```

```

Ct<-matrix(data=1,ncol=T+1)
for (t in 0:T+1) Ct[,t]<-sum(Cxt[,t])
#Evoluz montanti
for (t in 2:76){Mxt[1,t]<-Cxt[1,t]
for (x in 2:55) Mxt[x,t]<-Mxt[x-1,t-1]*(1+g)*Z[t-1]*(1-P12[x-1,t-1])+Cxt[x,t]
}

#Nuove pensioni
Bzxt<-Z2*0
for(t in 2:76) Bzxt[,t]<-Mxt[42:55,t-1]*P12[42:55,t-1]/axt[,t]*(1+g)*Z[t-1]
Bzxt<-'rownames<-'(Bzxt,seq(58,71,1))
#Bzxt_ctr<-matrix(data=0,nrow = 14,ncol=76)
#for (t in 1:76) {for (x in 41:55) Bzxt_ctr[x-41,t]<-Mxt[x-1,t-1]*P12[x-1,t-1]
#evoluzione pensioni
#Bxt[1:14,]<-Bxt[1:14,]+Bzxt
for (t in 2:76){Bxt[-1,t]<-Bxt[-53,t-1]*(1-P23[-53,t-1])*G[t]
Bxt[1:14,t]<-Bxt[1:14,t]+Bzxt[,t]
}

#Totale pensioni:
Bt<-vector(mode="numeric",length = 76)
for (t in 0:76) Bt[t]<-sum(Bxt[,t])
#plot(Bt)

N2tot<-vector('numeric',length = T+1)
for (i in 1:76) N2tot[i]<-sum(N2[,i])
#adeguatezza
#rt<-vector('numeric',length = T+1)
rt<-Bt/(Ct[1,]/P)*N1tot/N2tot

#####
#Funzione obiettivo
psi1<-0.5
psi2<-0.5
Obiettivo1<-vector('numeric',length=T+1)
for (t in 0:T+1) Obiettivo1[t]<-max(0,psi1*(0.536-rt[t]))
Obiettivo2<-vector('numeric',length=T+1)
for (t in 0:T) Obiettivo2[t]<-max(0,psi2*(P[t]-0.315))
Obiettivo<-sum(Obiettivo1)+sum(Obiettivo2)

```

```

return(Obiettivo)

}

```

ObPzg è la funzione da minimizzare tramite *cobyla*. Definiamo poi i vincoli tramite la funzione VincoliPzg. Se i vincoli di sostenibilità, liquidità e gradualità sono rispettati, restituisce in output un vettore di componenti positive o nulle. La prima parte di VincoliPzg coincide con ObPzg, dato che contributi, pensioni, ecc. sono variabili che non possono essere definite a livello globale, dato che dipendono dalle tre "leve" del problema di ottimizzazione.

```

#####
VincoliPzg<-function(x) {
  theta<-x[1:15]
  zeta<-x[16:30]
  gamma<-x[31:45]
  P[1]<-0.3
  for (k in 0:14) P[(5*k+2):(5*k+6)]<-0.3*theta[(k+1)]
  for (t in 1:76) cxt[,t]<-P[t]*salin*(1+csi)^(t-1)

  Z<-numeric(76)
  Z[1]<-1
  for (k in 0:14) Z[(5*k+2):(5*k+6)]<-zeta[(k+1)]
  G<-numeric(76)
  G[1]<-1
  for (k in 0:14) G[(5*k+2):(5*k+6)]<-gamma[(k+1)]

  #Contributi
  Cxt<-cxt*N1
  Ct<-matrix(data=1,ncol=T+1)
  for (t in 0:T+1) Ct[,t]<-sum(Cxt[,t])
  #Evoluz montanti
  for (t in 2:76){Mxt[1,t]<-Cxt[1,t]
  for (x in 2:55) Mxt[x,t]<-Mxt[x-1,t-1]*(1+g)*Z[t-1]*(1-P12[x-1,t-1])+Cxt[x,t]
  }

  #Nuove pensioni
  Bzxt<-Z2*0
  for(t in 2:76) Bzxt[,t]<-Mxt[42:55,t-1]*P12[42:55,t-1]/axt[,t]*(1+g)*Z[t-1]
}

```

```

Bzxt<- 'rownames<- ' (Bzxt, seq(58,71,1))

for (t in 2:76){Bxt[-1,t]<-Bxt[-53,t-1]*(1-P23[-53,t-1])*G[t]
Bxt[1:14,t]<-Bxt[1:14,t]+Bzxt[,t]
}

#Totale pensioni:
Bt<-vector(mode="numeric",length = 76)
for (t in 0:76) Bt[t]<-sum(Bxt[,t])

Def<-Bt-Ct[1,]

Def_att<-Def
for (t in 1:76) Def_att[t]<-Def[t]/(1+g)^(t-1)
TUL<-sum(Def_att)
vinc<-numeric(210)
for (t in 1:14) vinc[t]<-1.05*theta[t]-theta[t+1]
for (t in 1:14) vinc[t+14]<-theta[t+1]-0.95*theta[t]
for (t in 1:14) vinc[t+28]<-1.01*zeta[t]-zeta[t+1]
for (t in 1:14) vinc[t+42]<-zeta[t+1]-0.99*zeta[t]
for (t in 1:14) vinc[t+56]<-1.01*gamma[t]-gamma[t+1]
for (t in 1:14) vinc[t+70]<-gamma[t+1]-0.99*gamma[t]
vinc[85]<-0.001*Ct[1,1]-TUL
vinc[86]<-TUL+0.001*Ct[1,1]
vinc[87:161]<-0.05*Ct[1,-1]-Def[-1]
return(vinc)
}

```

Infine, si definisce un'ultima funzione, che non viene usata nel problema di ottimizzazione, ma permette di analizzare meglio i risultati: *cobyta* dà come risultato solamente il valore ottimale della funzione obiettivo e la traiettoria ottimale delle tre "leve" θ , ζ , γ , oltre ad alcune informazioni sulla convergenza dell'algoritmo. Per avere una vista d'insieme su come si comportano i contributi, i benefici, il deficit, il tasso di sostituzione in presenza di un certo tipo di bilanciamento, bisogna analizzare i risultati di questa funzione:

```

RisPzg<- function(x)
{
  theta<-x[1:15]

```

```

zeta<-x[16:30]
gamma<-x[31:45]
P[1]<-0.3
for (k in 0:14) P[(5*k+2):(5*k+6)]<-0.3*theta[(k+1)]
for (t in 1:76) cxt[,t]<-P[t]*salin*(1+csi)^(t-1)

###aggiustamento tasso nozionale
G<-numeric(76)
G[1]<-1
for (k in 0:14) G[(5*k+2):(5*k+6)]<-gamma[(k+1)]

Z<-numeric(76)
Z[1]<-1
for (k in 0:14) Z[(5*k+2):(5*k+6)]<-zeta[(k+1)]

#Contributi
Cxt<-cxt*N1
Ct<-matrix(data=1,ncol=T+1)
for (t in 0:T+1) Ct[,t]<-sum(Cxt[,t])
#Evoluz montanti
for (t in 2:76){Mxt[1,t]<-Cxt[1,t]
for (x in 2:55) Mxt[x,t]<-Mxt[x-1,t-1]*(1+g)*Z[t-1]*(1-P12[x-1,t-1])+Cxt[x,t]
}

#Nuove pensioni
Bzxt<-Z2*0
for(t in 2:76) Bzxt[,t]<-Mxt[42:55,t-1]*P12[42:55,t-1]/axt[,t]*(1+g)*Z[t-1]
Bzxt<-'rownames<-'(Bzxt,seq(58,71,1))
Bzxt_ctr[x-41,t]<-Mxt[x-1,t-1]*P12[x-1,t-1]*(1+g)/axt[x-41,t]}

for (t in 2:76){Bxt[-1,t]<-Bxt[-53,t-1]*(1-P23[-53,t-1])*G[t]
Bxt[1:14,t]<-Bxt[1:14,t]+Bzxt[,t]
}

#Totale pensioni:
Bt<-vector(mode="numeric",length = 76)
for (t in 0:76) Bt[t]<-sum(Bxt[,t])
plot(Bt)

```

```

N2tot<-vector('numeric',length = T+1)
for (i in 1:76) N2tot[i]<-sum(N2[,i])
#adeguatezza
#rt<-vector('numeric',length = T+1)
rt<-Bt/(Ct[1,]/P)*N1tot/N2tot

#####
#PB di Ottimizzazione
psi1<-0.5
psi2<-0.5
Obiettivo1<-vector('numeric',length=T+1)
for (t in 0:T+1) Obiettivo1[t]<-max(0,psi1*(0.536-rt[t]))
Obiettivo2<-vector('numeric',length=T+1)
for (t in 0:T) Obiettivo2[t]<-max(0,psi2*(P[t]-0.315))
Obiettivo<-sum(Obiettivo1)+sum(Obiettivo2)

bxt<-Bxt/N2
Def<-Bt-Ct[1,]
Def_att<-Def
for (t in 1:76) Def_att[t]<-Def[t]/(1+g)^(t-1)
TUL<-sum(Def_att)
TUL/Ct[2]
Risultati<-list(Obiettivo,Bt,Ct,rt,Def,TUL,Mxt,Bzxt,Bxt,P,Z,G)

return(Risultati)
}

```

Concludo, precisando che immagino si possa scrivere un programma più efficiente di questo, che porti agli stessi risultati. Lo scopo di questo programma non è stato tanto trovare un algoritmo efficiente (in 2-3 minuti sul mio portatile sono sempre arrivati i risultati), quanto capire sporcandosi le mani i legami fra le variabili e fornire un programma che sia - nei limiti del possibile - di agile comprensione.

Bibliografia

- [1] Breyer F. (2004), *Comment on S. Valdés-Prieto, "The Financial Stability of Notional Account Pensions"*, The Scandinavian Journal of Economics, Vol. 106, No. 2 , pp. 385-387
- [2] Daniel J.W. (2004), *Multi-state transition models with actuarial applications*, ristampato su permesso dell'autore dalla Society of Actuaries
- [3] Devolder P., Levantesi S., Menzietti M. (2020), *Automatic balance mechanisms for notional defined contribution pension systems guaranteeing social adequacy and financial sustainability: an application to the Italian pension system*, Annals of Operations Research <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03819-x>
- [4] Istat (2013), *Pensioni e pensionati - percorsi di analisi 2013*
- [5] Pelessoni R., Zecchin M. (1996), *Una applicazione dell'approccio multistato ai fondi pensione*, Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali, 19, 81-94
- [6] Ragioneria Generale dello Stato (2019), *Le tendenze di medio-lungo periodo del sistema pensionistico e socio-sanitario - Aggiornamento 2019*. Rapporto n°20, Roma
- [7] Schwarz A. M., Arias O. S., Zviniene A., Rudolph H.P., Eckardt S., Koettl J., Immervoll H., Abels M. (2014), *The inverting pyramid: Pension Systems Facing Demographic Challenges in Europe and Central Asia*, Banca Mondiale, Washington DC
- [8] Valdés-Prieto S. (2000). *The financial stability of notional account pensions*. Scandinavian Journal of Economics, 102(3), 395-417. <https://doi.org/10.1111/1467-9442.03205>
- [9] Ypma J. (2018), *nloptr: R interface to NLOpt*, <https://cran.r-project.org/web/packages/nloptr/vignettes/nloptr.pdf>

- [10] I dati utilizzati per l'elaborazione sono liberamente scaricabili dal sito dell'Inps e dell'Istat

Altri documenti e siti consultati per singole informazioni, dati o citazioni:

- [11] Boado-Penas M., Settergren O., Ekheden E., Naka P. (2019), *Sweden's Fifteen Years of Communication Efforts*, INAPP WP n. 36. https://oa.inapp.org/bitstream/handle/123456789/473/Inapp_BoadoPenas_Settergren_
- [12] Boado Penas M.D.C., Vidal Melià C. (2013), *The actuarial balance of the payg pension system: The Swedish NDC model versus the DB-type models*. Da Holzmann, Palmer e Robalino, *NDC pension system in a changing pension world. Gender, politics and financial stability*, Vol.2, Banca Mondiale, Washington
- [13] Schokkaert E., Devolder P., Hindriks J., Vandenbroucke F. (2018). *Towards an equitable and sustainable point system. A proposal for pension reform in Belgium*. Journal of Pension Economics and Finance. <https://doi.org/10.1017/S1474747218000112>
- [14] Istituto Nazionale della Previdenza Sociale (INPS), *Circolare n. 81 del 13/5/2004, Allegato 1*
- [15] https://www.ansa.it/sito/notizie/economia/2021/04/17/nel-2020-persi-40-miliardi-di-salari-italia-peggiore-in-ue_e22800f8-4329-487a-b1d4-b91a30ff6e88.html