



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE, AZIENDALI,
MATEMATICHE E STATISTICHE "BRUNO DE FINETTI"

Corso di Laurea Magistrale in Scienze Statistiche e Attuariali

Tesi di Laurea Magistrale

***ASSET ALLOCATION* DINAMICA NEI FONDI
PENSIONE: UN MODELLO *LIFE-CYCLE*
BASATO SU *GOAL-BASED INVESTING* E
ALGORITMI GENETICI**

Laureanda:

Alessia Bianchini

Relatore:

Prof. Massimiliano Kaucic

Correlatori:

Prof.ssa Liviana Picech

Dott. Andrea Tamaro

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

INDICE

INTRODUZIONE	1
1 IL SISTEMA PREVIDENZIALE ITALIANO	3
1.1 Evoluzione del sistema previdenziale italiano	3
1.2 Struttura del sistema previdenziale italiano	4
1.3 La crisi del sistema previdenziale italiano	6
1.4 La previdenza complementare	9
1.4.1 Tipologie di forme di previdenza complementare	10
1.4.2 Una panoramica sulle forme pensionistiche complementari in Italia	12
1.4.3 Comparti di investimento	13
1.4.4 Analisi dei costi di investimento nei vari comparti	14
1.5 Analisi delle tendenze di investimento previdenziale degli italiani .	17
1.6 La gestione finanziaria dei fondi pensione	21
1.6.1 Limiti sugli investimenti dei fondi pensione	22
2 STRATEGIE DI ASSET ALLOCATION DINAMICHE PER LA PREVIDENZA COMPLEMENTARE	24
2.1 Approccio <i>Life-Cycle</i> in ambito previdenziale	24
2.2 <i>Goal-Based Investing</i>	28
2.2.1 Dalla Teoria di Markowitz alla Teoria comportamentale del portafoglio	28
2.2.2 Caratteristiche del <i>Goal-Based Investing</i>	29
2.2.3 La funzione obiettivo nel <i>Goal-Based Investing</i>	31
2.2.4 <i>Goal-Based Investing</i> in ambito previdenziale	32

3	ALCUNI STRUMENTI PER LA COSTRUZIONE DI UN MODELLO DI <i>ASSET ALLOCATION</i>	34
3.1	<i>Economic Scenario Generator</i>	34
3.1.1	Applicazioni	35
3.1.2	Fasi del processo di costruzione di uno strumento ESG . . .	36
3.1.3	Scelta dei modelli di simulazione	38
3.1.4	Decomposizione matriciale di Cholesky	44
3.2	Algoritmi genetici	45
3.2.1	Le fasi di un algoritmo genetico	47
3.2.2	Codifica genetica	49
3.2.3	Funzione di <i>fitness</i>	49
3.2.4	Metodi di selezione	50
3.2.5	Operatori genetici	52
3.2.6	Teorema degli schemi	54
4	IL MODELLO	60
4.1	Programmazione dinamica e algoritmi genetici: due approcci a confronto	60
4.2	Descrizione del modello	63
4.2.1	Composizione dei comparti e dei profili di investimento . . .	63
4.2.2	Simulazione degli scenari	65
4.2.3	Definizione della funzione obiettivo	66
4.2.4	Costruzione della dinamica del portafoglio mediante algoritmi genetici	68
4.3	Analisi sperimentale	73
	CONCLUSIONI	84

INTRODUZIONE

Il sistema previdenziale italiano si trova ad affrontare sfide sempre più complesse, tanto da far parlare di una vera e propria "crisi del sistema pensionistico". L'invecchiamento della popolazione, l'aumento della speranza di vita e le dinamiche del mercato del lavoro stanno progressivamente indebolendo il primo pilastro previdenziale, rendendo la pensione pubblica sempre meno sufficiente a garantire un reddito adeguato dopo il pensionamento. Alla luce di ciò, diventa essenziale integrare la pensione obbligatoria con strumenti di previdenza complementare, al fine di preservare un tenore di vita soddisfacente nella fase post-lavorativa. Tuttavia, l'efficacia di tali strumenti dipende in larga misura dalle scelte di investimento effettuate dagli aderenti ai fondi pensione, rendendo essenziale una gestione consapevole e strategica del risparmio previdenziale.

Le modalità con cui vengono gestiti gli investimenti previdenziali presentano diverse criticità. Le tradizionali strategie di *asset allocation* adottate nei fondi pensione sono spesso statiche o eccessivamente prudentziali, portando a risultati subottimali, soprattutto per i giovani lavoratori. Inoltre, vari studi hanno evidenziato come gli aderenti tendano a prendere decisioni di investimento poco efficaci, influenzate da scarsa alfabetizzazione finanziaria, avversione al rischio e inerzia comportamentale. Per rispondere a queste problematiche, negli ultimi anni sono stati sviluppati modelli di *asset allocation* dinamica, volti a migliorare l'efficienza delle scelte di investimento. Tra questi, si distinguono due approcci principali: il *Life-Cycle Investing* e il *Goal-Based Investing*. Il primo prevede un ribilanciamento graduale del portafoglio in base all'età del risparmiatore, riducendo progressivamente l'esposizione al rischio man mano che ci si avvicina alla pensione. Il secondo, invece, struttura il portafoglio in funzione degli specifici obiettivi finanziari dell'individuo, ponendo al centro dell'allocazione le sue esigenze personali.

Questa tesi si propone di integrare i principi del *Life-Cycle Investing* e del

Goal-Based Investing in un modello innovativo di *asset allocation* dinamica per i fondi pensione, basato sull'impiego degli algoritmi genetici. Il modello sviluppato sarà in grado di adattarsi ai vari profili degli aderenti, individuando le scelte di investimento più efficienti per massimizzare la probabilità di raggiungere gli obiettivi previdenziali.

La struttura della tesi è articolata come segue: nel primo capitolo verrà fornita una panoramica del sistema previdenziale italiano, evidenziandone le criticità e il ruolo crescente della previdenza complementare. Il secondo capitolo approfondirà le strategie di *asset allocation* dinamica del *Life-Cycle Investing* e del *Goal-Based Investing*. Il terzo capitolo descriverà gli strumenti utilizzati per la costruzione del modello, tra cui gli *Economic Scenario Generators* e gli algoritmi genetici. Infine, il quarto capitolo presenterà il modello proposto e i risultati sperimentali condotti per valutarne l'efficacia. L'auspicio è che questo studio possa fornire un contributo utile alla ricerca in ambito previdenziale e offrire spunti pratici per l'implementazione di strategie di investimento più efficaci nei fondi pensione, a beneficio dei risparmiatori e della sostenibilità del sistema pensionistico.

1 IL SISTEMA PREVIDENZIALE ITALIANO

1.1 Evoluzione del sistema previdenziale italiano

Il sistema previdenziale italiano nasce con l'obiettivo di fornire tutela economica a tutti i cittadini che, a causa di eventi come vecchiaia, invalidità, decesso o altre situazioni di incapacità lavorativa, non sono in grado di provvedere autonomamente al proprio sostentamento (art. 38 della Costituzione). Secondo gli ultimi dati dell'INPS [29], nel 2023 in Italia ci sono circa 16 milioni di pensionati (circa il 27% della popolazione attuale). La spesa pensionistica ammonta a oltre 300 miliardi di euro, pari a circa il 16% del PIL nazionale, una delle più alte in Europa, evidenziando l'importanza del sistema previdenziale nel bilancio pubblico.

A partire dagli anni '90, il progressivo aumento della speranza di vita e il rallentamento della crescita economica, che avrebbero reso potenzialmente insostenibile il sistema previdenziale nel medio-lungo termine, portarono all'introduzione di una serie di provvedimenti legislativi, che ne modificarono profondamente la struttura. Tra i cambiamenti più significativi vanno menzionati:

- Il graduale passaggio dal metodo di calcolo retributivo a quello contributivo. Il metodo retributivo prevedeva che l'ammontare della pensione venisse calcolato sulla base della retribuzione percepita, garantendo ai pensionati un ammontare proporzionato al loro reddito da lavoro. Nel sistema contributivo, introdotto con la riforma Dini ¹ del 1995, l'importo della pensione è invece collegato

¹Detta riforma ha visto l'applicazione del metodo "misto" di calcolo della pensione: secondo questo metodo, in sintesi, l'importo della pensione risulta come la somma di due quote, una calcolata con il metodo retributivo e l'altra con il metodo contributivo.

ai contributi versati durante la vita lavorativa, alla crescita del PIL e alla speranza di vita al momento del pensionamento [15, 5].

- L'innalzamento dei requisiti minimi per l'ottenimento della pensione di vecchiaia, con un progressivo aumento dell'età pensionabile (attualmente fissata a 67 anni), e un incremento dei requisiti di anzianità contributiva, che ha reso più difficile l'accesso alla pensione anticipata.
- La modifica del sistema di rivalutazione delle pensioni in pagamento. In passato le pensioni in essere venivano rivalutate anche in base alla crescita dei salari reali; attualmente la rivalutazione è legata esclusivamente all'andamento dell'inflazione.
- Il passaggio al cosiddetto "sistema a 3 pilastri" (previdenza obbligatoria, previdenza complementare e previdenza individuale), al fine di garantire una maggiore stabilità e sostenibilità del sistema previdenziale nel lungo termine.

1.2 Struttura del sistema previdenziale italiano

Il sistema previdenziale italiano è strutturato secondo un sistema a tre pilastri:

- Il primo pilastro è rappresentato dal sistema previdenziale pubblico obbligatorio. Esso è gestito principalmente dall'INPS (Istituto Nazionale di Previdenza Sociale), che assicura la maggior parte dei lavoratori, in particolare i lavoratori dipendenti del settore privato e pubblico. Ad esso si affiancano le Casse professionali e gli Enti di previdenza dei liberi professionisti (ingegneri, architetti, medici, avvocati, ...), che sono enti con personalità giuridica di diritto privato con finalità pubblica. Il primo pilastro è basato sul sistema finanziario di gestione della ripartizione (o *pay as you go*), secondo il quale in ogni esercizio (anno) la massa di contributi versati dai lavoratori attivi viene completamente utilizzata per pagare le pensioni dei lavoratori non più attivi. L'eventuale differenza tra uscite ed entrate del sistema pensionistico viene compensata tramite l'intervento dello Stato. Si prevede dunque un accordo implicito tra le diverse generazioni, che prende il nome di "patto intergenerazionale": le generazioni degli attivi attuali, con i contributi versati, finanziano le pensioni degli attuali pensionati e, in cambio, si aspettano di

ricevere a loro volta supporto dalle generazioni future al raggiungimento dell'età pensionabile. In tale regime non avviene accumulo di risparmio (formazione di riserva), ma il capitale viene trasferito immediatamente. Dunque, oltre ad esserci costi di gestione inferiori, vengono anche eliminati i rischi associati all'investimento di capitale. Nonostante questi aspetti positivi, tale sistema presenta anche vari rischi, i quali verranno approfonditi di seguito (v. 1.3).

- Il secondo pilastro è costituito dalla previdenza complementare collettiva, il cui scopo è quello di fornire una forma di risparmio a lungo termine che integri la pensione del primo pilastro. Peculiarità di questo pilastro è la sua natura volontaria e collettiva, in quanto l'accesso è vincolato all'appartenenza ad un predefinito gruppo di lavoratori. Questo pilastro si fonda sul sistema finanziario di gestione della capitalizzazione, il quale prevede che i contributi versati dal lavoratore e/o dal datore di lavoro vengano investiti nei mercati finanziari e capitalizzati nel tempo fino al momento del pensionamento del lavoratore. A quel punto, il montante accumulato può essere convertito, tutto o in parte, in una rendita vitalizia pensionistica (pensione integrativa), tramite appositi coefficienti di trasformazione.
- Il terzo pilastro è rappresentato dalla previdenza complementare individuale. Analogamente al secondo pilastro, anche questo prevede l'adesione su base volontaria ed è basato sul sistema della capitalizzazione. La caratteristica che contraddistingue il terzo pilastro è la sua natura individuale: viene infatti realizzato secondo le regole di un'assicurazione individuale privata. È previsto, per gli individui che scelgano di aderire al regime di terzo pilastro, il risparmio in maniera autonoma attraverso investimenti come fondi comuni di investimento, assicurazioni sulla vita e altre strategie finanziarie. Il secondo e il terzo pilastro offrono agli individui maggiore autonomia e flessibilità nella pianificazione del proprio piano di risparmio, consentendo di integrare la cosiddetta "pensione di base" (ovvero la rata di pensione derivante dalla previdenza obbligatoria) in base alle proprie esigenze e ai propri obiettivi finanziari. D'altro canto, implicano una maggiore responsabilità individuale e richiedono dunque consapevolezza nella gestione dei risparmi e degli investimenti [5].

1.3 La crisi del sistema previdenziale italiano

In un sistema pensionistico come quello del primo pilastro, basato sul meccanismo della ripartizione e, quindi, sulla solidarietà intergenerazionale, affinché sia garantita la sostenibilità finanziaria è necessario che vi sia un equilibrio tra flussi in entrata (contributi previdenziali) e flussi in uscita (pensioni corrisposte). Ciò è possibile solo se si mantiene un certo equilibrio tra la popolazione attiva (e i corrispondenti contributi) e quella dei pensionati. Negli ultimi anni diversi fattori stanno portando ad una progressiva inversione del rapporto fra attivi e pensionati, provocando così una crisi del sistema pensionistico. Una delle principali cause è legata ai significativi cambiamenti demografici che hanno interessato i paesi più sviluppati. Grazie al miglioramento delle condizioni economico-sanitarie e ai progressi in campo medico, si sta assistendo ad un allungamento della speranza di vita alla nascita, arrivata nel 2023 a 81,1 anni per gli uomini (+ 7,5 anni rispetto al 1990) e 85,2 per le donne (+ 5,1 rispetto al 1990) [32]. Secondo le previsioni, questa tendenza dovrebbe proseguire, per arrivare a più di 86,1 e 89,7 anni nel 2080 [31]. Al contempo si sta anche verificando un significativo calo delle nascite: l'Italia si colloca ultima in Europa per tasso di natalità, con un valore di 6,7 nascite ogni 1.000 abitanti nel 2022 (- 34,6% rispetto al 1990), valori che portano a parlare di "inverno demografico". Tali trend demografici porteranno nei prossimi decenni ad un rapido aumento dell'indice di dipendenza degli anziani², un indicatore molto importante per monitorare l'equilibrio intergenerazionale. Detto indice è attualmente pari a 37,8%, ma è destinato ad aumentare con il pensionamento delle generazioni del "baby boom" (individui nati tra il 1946 e il 1964) [32].

Oltre ai fattori demografici, ad aggravare la situazione del sistema pensionistico contribuiscono anche fattori socio-economici, come l'elevato tasso di disoccupazione e il cambiamento del mercato del lavoro, caratterizzato da nuove forme di impiego (part-time, lavori interinali, ecc.) che favoriscono la discontinuità lavorativa e, di conseguenza, quella contributiva. Inoltre, rispetto ad un'inflazione crescente che influenza il valore degli assegni pensionistici (tramite il meccanismo della

²L'indice di dipendenza degli anziani è il numero di individui di età superiore ai 64 anni rispetto a quello degli individui in età lavorativa (tra 15 e i 64 anni).

perequazione), non si è verificato un corrispondente aumento salariale (e quindi dei contributi).

Tale squilibrio tra pensioni da erogare e contributi versati si potrebbe teoricamente colmare attraverso un crescente intervento finanziario da parte dello Stato. Si tratta tuttavia di una soluzione particolarmente onerosa e complessa, considerando che il debito pubblico dell'Italia in rapporto al PIL a chiusura del 2023 era pari a 134,8% e che la spesa previdenziale già rappresenta la principale voce del sistema welfare, occupando circa il 50% del totale [18].

Un indicatore illustrativo dell'adeguatezza del trattamento pensionistico è il tasso di sostituzione (lordo)³, ossia il rapporto tra la prima rata annua lorda di pensione e l'ultima retribuzione annua lorda. Tale indicatore permette di valutare se, una volta andati in pensione, si sarà in grado di mantenere lo stesso tenore di vita degli anni pre-pensionamento. Come si può vedere dalla Tabella 1.1 il tasso di sostituzione tra il 2010 e il 2020 per i dipendenti privati con un'anzianità contributiva di 38 anni si è ridotto di poco (-1,9%), ma la situazione è destinata a peggiorare drasticamente nel lungo termine. Secondo le proiezioni, infatti, chi andrà in pensione nel 2070 potrebbe ritrovarsi con un tasso di sostituzione del 58,8%, un livello preoccupante se si pensa al fatto che già oggi oltre 1 pensionato su 3 (il 35,9%) riceve una pensione mensile inferiore a 1.000€. Per quanto riguarda invece i lavoratori autonomi la situazione è ancora più critica a causa dell'aliquota contributiva ridotta, che penalizza ulteriormente l'importo futuro di pensione.

Il fattore che principalmente impatta sulla riduzione del tasso di sostituzione è il passaggio dal metodo di calcolo della pensione misto/retributivo a quello completamente contributivo. Quest'ultimo, dipendendo dai contributi versati durante la vita lavorativa, non assicura un determinato tasso di sostituzione al pensionamento, a differenza del metodo di calcolo retributivo. In particolare, l'ammontare dell'importo di pensione dipenderà dalla continuità contributiva (dunque penalizzando gli individui con percorsi di carriera "discontinui"), dalle rivalutazioni del montante contributivo (legato alla variazione quinquennale del

³Il tasso di sostituzione lordo, considerando i redditi al lordo della tassazione, non tiene conto degli effetti conseguenti al cambio di regime, contributivo e fiscale, che avviene quando si passa da lavoratore a pensionato.

PIL, dunque penalizzando gli anni di “stagnazione” o recessione) e dai coefficienti di trasformazione del montante in rendita, aggiustati triennialmente con decreto ministeriale sulla base dell’andamento della speranza di vita ⁴.

Tabella 1.1: Tassi di sostituzione della previdenza obbligatoria al lordo dell’effetto fiscale e contributivo - Scenario nazionale base (valori in %)

Previdenza obbligatoria	Tassi di sostituzione lordi						
	2010	2020	2030	2040	2050	2060	2070
Dipendenti privati	73,6	71,7	72,0	61,8	60,3	59,2	58,8
Autonomi	72,1	54,9	49,9	46,8	47,8	47,3	47,0

Fonte: Ragioneria Generale dello Stato, "Le tendenze di medio-lungo periodo del sistema pensionistico e socio- sanitario - aggiornamento 2024" [44]

Alla luce di questi risultati, appare evidente come il primo pilastro, da solo, non sia in grado di garantire una protezione adeguata e sostenibile nel lungo termine. Per questo motivo, risulta essenziale integrare la pensione fornita dal sistema previdenziale pubblico con la previdenza complementare. In questo modo, sarà possibile ridurre il rischio di insufficienza delle risorse nel periodo post-lavorativo e assicurare un tenore di vita adeguato alle esigenze del pensionato. Nella Tabella 1.2 si può osservare come la combinazione di previdenza obbligatoria e complementare permettano di raggiungere livelli più elevati di tassi di sostituzione [44].

Tabella 1.2: Tassi di sostituzione della previdenza obbligatoria e complementare al lordo dell’effetto fiscale e contributivo - Scenario nazionale base (valori in %)

Previdenza obbligatoria e complementare	Tassi di sostituzione lordi						
	2010	2020	2030	2040	2050	2060	2070
Dipendenti privati	73,6	77,1	79,7	71,1	69,2	66,8	66,5
Autonomi	72,1	60,2	57,6	57,0	57,5	55,6	55,5

Fonte: Ragioneria Generale dello Stato, "Le tendenze di medio-lungo periodo del sistema pensionistico e socio-sanitario - aggiornamento 2024" [44]

⁴Un aumento della speranza di vita (trend che, al netto degli anni impattati dall’effetto COVID, è destinato a continuare nei prossimi anni) impatta i coefficienti di trasformazione in rendita, riducendoli. Dunque, un aumento della speranza di vita al pensionamento potrebbe impattare negativamente la determinazione dell’importo di pensione.

1.4 La previdenza complementare

La previdenza complementare è stata introdotta nel panorama giuridico italiano con il D.lgs. 124/1993, con lo scopo di "assicurare più elevati livelli di copertura previdenziale" (art. 1 D.lgs. 124/1993). Il suo obiettivo principale è quindi quello di integrare la pensione di base fornita dal primo pilastro con versamenti aggiuntivi volontari, permettendo così agli aderenti di mantenere uno standard di vita adeguato dopo il pensionamento.

L'adesione alla previdenza complementare è libera e volontaria, infatti chiunque può iscriversi, indipendentemente dall'attività svolta. Quando un individuo decide di aderire ad un fondo pensione è tenuto a versare i contributi. In particolare, i lavoratori dipendenti possono avere diritto ad un contributo aggiuntivo da parte del datore di lavoro e hanno anche la possibilità di destinare il proprio TFR (Trattamento di Fine Rapporto). Tale scelta dev'essere operata entro sei mesi dall'assunzione nel caso di primo rapporto di lavoro ed è irrevocabile, mentre la decisione di lasciare il TFR in azienda può essere modificata in qualsiasi momento. In assenza di una scelta esplicita, il TFR confluisce automaticamente in un fondo pensione⁵ secondo il meccanismo del silenzio-assenso. Per incentivare l'adesione alla previdenza complementare, i lavoratori possono liberamente determinare l'entità dei propri versamenti. Tuttavia, le fonti istitutive delle forme collettive (come i contratti collettivi di lavoro) possono stabilire un livello minimo e definire le modalità per i versamenti. I contributi versati dagli iscritti (compresi l'eventuale contributo del datore di lavoro e la quota del TFR) confluiscono in conti individuali intestati ai singoli aderenti. Essi vengono poi investiti nel mercato finanziario (in strumenti come azioni, obbligazioni, immobili, ecc.) in base alle caratteristiche e alle linee di investimento scelte dall'aderente tra quelle offerte dal fondo stesso. La somma dei contributi rivalutati in base al rendimento ottenuto dalla gestione separata (dove sono investiti i contributi) viene chiamata montante contributivo. Una volta raggiunti i requisiti per la pensione obbligatoria (previa adesione di almeno 5 anni alla previdenza complementare), l'aderente può scegliere tra varie opzioni:

⁵Nel fondo pensione previsto dal contratto collettivo di lavoro o, in presenza di più fondi, in quello a cui è iscritto il maggior numero di dipendenti

- Convertire la totalità del montante contributivo accumulato in una rendita pensionistica;
- Ottenere la liquidazione del montante contributivo in forma di capitale, fino ad un massimo del 50% dell'importo accumulato e il resto in rendita pensionistica;
- Ottenere la liquidazione del montante contributivo in forma di capitale, con una percentuale maggiore del 50% dell'importo accumulato (in determinate casistiche).

Oltre ai benefici legati alla costruzione di un reddito pensionistico integrativo, lo Stato riconosce al risparmio previdenziale effettuato mediante adesione alla previdenza complementare considerevoli agevolazioni fiscali. Infatti, durante la fase di accumulo è possibile dedurre ogni anno dal reddito complessivo i contributi versati al fondo fino a 5.164€ (incluso eventuale contributo del datore di lavoro ed esclusa la deduzione della quota del TFR). Inoltre, i rendimenti maturati dal fondo sono tassati al 20%, anziché al 26%, come avviene per la gran parte delle altre forme di risparmio finanziario [14].

1.4.1 Tipologie di forme di previdenza complementare

Le forme di previdenza complementare si distinguono in base alla fonte istitutiva in:

- Fondi pensione chiusi o negoziali: sono forme di previdenza complementare istituite attraverso accordi collettivi a qualunque livello (anche aziendali), oltre che per effetto di regolamenti aziendali o di accordi tra lavoratori autonomi o liberi professionisti promossi dai sindacati o dalle associazioni di categoria, di rilievo almeno regionale. Sono rivolti ad una platea ben definita di individui, identificati sulla base della loro appartenenza alla medesima categoria professionale, azienda o area geografica.

I fondi pensione chiusi, generalmente, hanno natura di associazione senza scopo di lucro. Per questo motivo, sono tenuti a dotarsi di uno Statuto che disciplini l'attività del fondo e di adeguati organi sociali (Assemblea dei delegati, Consiglio di amministrazione, Responsabile del fondo, Collegio dei sindaci).

Le risorse accumulate (contributi e rendimenti connessi), di norma, non vengono

gestite direttamente dal fondo, ma da intermediari professionali autorizzati (banche, imprese di assicurazione, ecc.) [11].

- Fondi pensione aperti: sono forme pensionistiche complementari istituite da banche, imprese di assicurazioni, società di gestione del risparmio (SGR) e società di intermediazione mobiliare (SIM). L'adesione è aperta a tutti, anche a coloro che non hanno un impiego. Sono istituiti come patrimonio di destinazione, separato e autonomo rispetto a quello della società che li ha costituiti, poiché è dedicato esclusivamente al pagamento delle prestazioni agli iscritti.

Vi si può aderire su base individuale o, nel caso dei lavoratori dipendenti del settore privato, anche su base collettiva, e in quest'ultimo caso è previsto il versamento dei contributi da parte del datore del lavoro e spesso anche del TFR.

La gestione del fondo è affidata esclusivamente al Consiglio di Amministrazione della società che lo istituisce; pertanto, non è prevista alcuna partecipazione alla gestione da parte dei rappresentanti dei lavoratori iscritti o dei datori di lavoro [10].

- Piani individuali pensionistici (PIP): sono forme pensionistiche complementari istituite da compagnie assicuratrici mediante contratti di assicurazione sulla vita con finalità previdenziale. Chiunque può aderirvi, indipendentemente dalla professione svolta, e l'adesione è solamente su base individuale. Essi sono soggetti non solo alla normativa che disciplina le coperture assicurative, ma anche al controllo di vigilanza da parte della COVIP (Commissione di vigilanza sui fondi pensione), cui devono sottostare tutti i fondi pensione.

Analogamente ai fondi aperti, anche i PIP sono costituiti sotto forma di patrimonio autonomo e separato rispetto a quello della compagnia istitutrice, in quanto destinati esclusivamente al pagamento delle prestazioni agli iscritti. La gestione finanziaria viene svolta dalla stessa società che ha istituito il PIP, senza alcuna partecipazione dei rappresentanti degli iscritti [13].

- Fondi pensione preesistenti: sono i fondi pensione istituiti prima del 15 novembre 1992, ossia prima del D.lgs 124/1993, che ha disciplinato in modo organico la previdenza complementare. Prevedono l'adesione su base collettiva, la quale dipende da contratti o accordi collettivi, sia aziendali che interaziendali.

I fondi pensione preesistenti possono gestire le risorse finanziarie secondo tre modalità: in forma diretta, tramite convenzioni con intermediari professionali specializzati o tramite la stipula di contratti assicurativi [12].

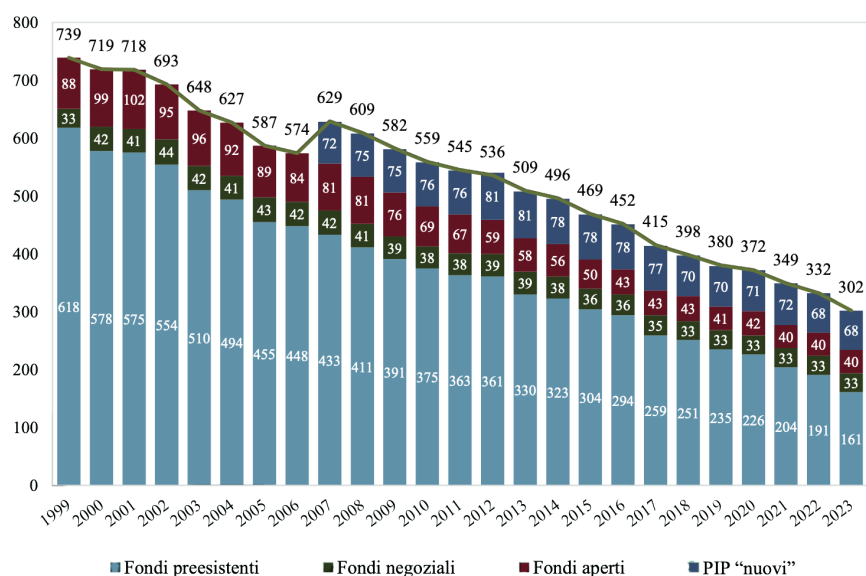
È possibile distinguere ulteriormente i fondi pensione complementari in due categorie, sulla base del metodo di calcolo dell'importo della pensione:

- Fondi a contribuzione definita, nei quali è prestabilito solo il livello di contributi da versare, mentre l'entità della prestazione pensionistica dipende dai contributi versati e dai rendimenti della gestione finanziaria.
- Fondi a beneficio definito, in cui l'ammontare della prestazione pensionistica è predeterminato, generalmente in riferimento a quella del trattamento pensionistico obbligatorio. Di conseguenza, l'importo dei contributi può variare nel tempo in modo da garantire l'erogazione della prestazione prefissata.

1.4.2 Una panoramica sulle forme pensionistiche complementari in Italia

Secondo la Relazione annuale COVIP per il 2023 [8], la previdenza complementare conta 302 forme pensionistiche complementari, di cui: 33 fondi negoziali, 40 fondi aperti, 68 PIP di tipo assicurativo (PIP "nuovi") e 161 fondi preesistenti. Dalla Figura 1.1 si nota come il numero di forme pensionistiche tenda a diminuire sempre di più nel tempo, tanto che dal 1999 ad ora il numero di fondi è più che dimezzato. Questo trend è il risultato di varie operazioni di fusione e accorpamento che stanno interessando i fondi negoziali, e di un processo di riorganizzazione dei gruppi bancari e finanziari che sta coinvolgendo sia i fondi preesistenti che quelli aperti.

Figura 1.1: Numero di Forme pensionistiche complementari (dati di fine 2023)



Fonte: COVIP, "Relazione per l'anno 2023", pp. 15 [8]

Gli iscritti ai fondi pensione ammontano a 9.571 milioni, dei quali approssimativamente 3.897 in PIP, 3.896 in fondi negoziali, 1.902 milioni in fondi aperti, 655 mila in fondi preesistenti. Il tasso di partecipazione ai fondi pensione rispetto alla forza lavoro (occupati e persone in cerca di occupazione con almeno 15 anni di età) è pari al 36,9%, ma scende a 26,7% se si considerano solo gli iscritti che hanno versato i contributi. Per quanto riguarda le caratteristiche degli iscritti, il 61,7% è di genere maschile, dal momento che le donne partecipano meno al mercato del lavoro, hanno carriere più discontinue e salari mediamente più bassi. Inoltre, la partecipazione aumenta con l'età: tra i 15 e i 34 anni è del 27,4%, tra i 35 e 44 anni del 32,8%, tra i 45 e 54 anni del 36% e tra i 55 e 64 anni del 45%. Infine, la maggioranza degli iscritti è costituita da lavoratori dipendenti, pari a 6,971 milioni, mentre i lavoratori autonomi ammontano a 1,185 milioni.

1.4.3 Comparti di investimento

Al momento dell'adesione ad un fondo pensione, è fondamentale che l'aderente sia a conoscenza delle varie opzioni di investimento e che scelga in maniera ottimale come distribuire le risorse finanziarie tra le diverse linee di investimento (o comparti). Ogni comparto corrisponde ad un profilo di rischio-rendimento differente, perciò

l'iscritto, prima di prendere una decisione, deve valutare attentamente la propria situazione lavorativa, il patrimonio personale, l'orizzonte temporale di permanenza nel fondo e le proprie aspettative pensionistiche. È possibile distinguere tra fondi pensione mono-comparto, che offrono una sola linea d'investimento, e fondi pensione multi-comparto, che prevedono varie linee d'investimento. La selezione del comparto non è definitiva, ma può essere variata dopo un anno dall'adesione al fondo o dopo l'ultima variazione. I comparti possono essere classificati in base agli strumenti finanziari in cui sono investiti i contributi nel seguente modo:

- **Azionari:** investono esclusivamente o prevalentemente in *asset class* azionarie. Da un lato, offrono rendimenti potenzialmente più elevati nel lungo periodo, ma al contempo implicano anche un rischio maggiore dovuto alla volatilità dei mercati azionari.
- **Obbligazionari (puri o misti):** investono rispettivamente solo o principalmente in obbligazioni. Generalmente, forniscono rendimenti inferiori rispetto ai comparti azionari, ma hanno il vantaggio di essere meno rischiosi, e, di conseguenza, meno variabili.
- **Bilanciati:** investono in azioni e in obbligazioni tendenzialmente nella stessa misura. Sono indicati per coloro che desiderano diversificare i propri investimenti, sfruttando al contempo la maggior redditività (nel lungo periodo) caratteristica dell'investimento azionario e la minor volatilità relativa all'investimento obbligazionario.
- **Garantiti:** garantiscono un rendimento minimo o la restituzione del capitale versato nel momento in cui si verificano certi eventi (ad esempio al momento del pensionamento). Si tratta del comparto che offre più protezione, rendendolo ideale per gli investitori maggiormente avversi al rischio. Tuttavia, quest'elevata protezione si traduce in rendimenti inferiori rispetto alle altre opzioni di investimento.

1.4.4 Analisi dei costi di investimento nei vari comparti

Nella scelta del comparto di investimento, si deve tener conto anche dei costi applicati, i quali influiranno sull'importo della pensione complementare. A tal fine

è utile considerare l'Indicatore sintetico dei costi (ISC), un valore percentuale che misura l'incidenza dei costi⁶ sostenuti annualmente durante la fase di accumulo da un aderente sulla propria posizione individuale maturata. Confrontando l'ISC delle varie forme pensionistiche e dei comparti di investimento è possibile valutarne la diversa onerosità ed effettuare una scelta più consapevole. L'ISC è calcolato come differenza tra il tasso interno di rendimento di un ipotetico piano di investimento che non prevede costi e il tasso interno di rendimento di un piano che invece li include. La stima si basa sull'ipotesi del versamento di un contributo annuo di 2.500€ e un rendimento annuo del 4%. L'ISC viene inoltre valutato in relazione a diversi periodi di permanenza nella forma previdenziale (2, 5, 10 e 35 anni), poiché alcuni costi, come quelli di iscrizione e le spese annuali, hanno un impatto che diminuisce nel tempo man mano che la posizione individuale accumulata cresce. Di conseguenza, l'indicatore diminuisce all'aumentare del periodo di partecipazione. Ogni forma pensionistica complementare, a seconda delle proprie caratteristiche, avrà diversi livelli di ISC. In generale, i fondi negoziali, essendo associazioni senza scopo di lucro, sono quelli che presentano costi inferiori, con un valore medio di ISC a 10 anni pari allo 0,5%. Infatti, a carico degli aderenti ci sono solamente i costi amministrativi e finanziari sostenuti dal fondo. Differente è la situazione per i fondi pensione aperti e i PIP, i quali prevedono che l'aderente copra ulteriori costi determinati in modo da assicurare un rendimento all'impresa. Questi ultimi, dunque, presentano costi medi più elevati, sempre su un orizzonte temporale di 10 anni, pari rispettivamente all'1,35% e al 2,17%.

⁶I costi considerati includono il costo di iscrizione, la spesa annua (sia in cifra fissa che in percentuale sui versamenti), e le commissioni in percentuale sul patrimonio. Nel calcolo è incluso anche il costo per il trasferimento della posizione individuale, tranne nel caso dell'indicatore a 35 anni, dove si assume che avvenga il pensionamento. Restano esclusi dal conteggio tutti i costi di natura eccezionale o legati a eventi imprevedibili, come quelli associati all'esercizio di prerogative individuali o le commissioni di incentivo previste per la gestione finanziaria.

Figura 1.2: ISC forme pensionistiche complementari (dati di fine 2023; valori %)

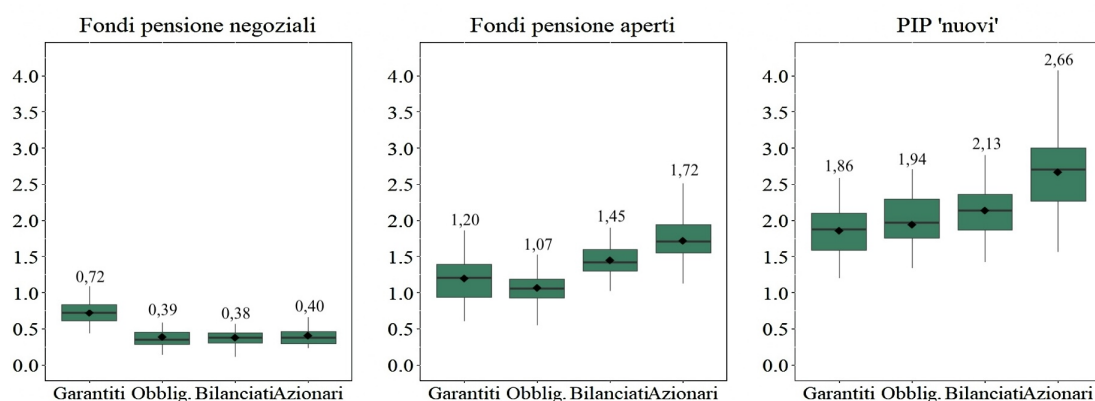
Fondi pensione e PIP “nuovi” – Indicatore sintetico dei costi <i>(dati di fine 2023; valori percentuali)</i>				
	Indicatore sintetico dei costi (ISC)			
	2 anni	5 anni	10 anni	35 anni
Fondi pensione negoziali				
Media	1,14	0,67	0,50	0,37
<i>Minimo</i>	<i>0,25</i>	<i>0,15</i>	<i>0,11</i>	<i>0,06</i>
<i>Massimo</i>	<i>2,97</i>	<i>1,45</i>	<i>1,24</i>	<i>1,09</i>
Fondi pensione aperti				
Media	2,32	1,56	1,35	1,23
<i>Minimo</i>	<i>0,55</i>	<i>0,55</i>	<i>0,55</i>	<i>0,55</i>
<i>Massimo</i>	<i>4,73</i>	<i>3,20</i>	<i>2,58</i>	<i>2,31</i>
PIP “nuovi				
Media	3,76	2,61	2,17	1,82
<i>Minimo</i>	<i>1,04</i>	<i>0,85</i>	<i>0,58</i>	<i>0,38</i>
<i>Massimo</i>	<i>6,44</i>	<i>4,82</i>	<i>4,07</i>	<i>3,44</i>

L'indicatore sintetico dei costi a livello di forma previdenziale è ottenuto aggregando, con media semplice, gli indicatori dei singoli comparti.

Fonte: COVIP, "Relazione per l'anno 2023", pp. 66 [8]

Il valore dell'ISC è influenzato anche dalla linea di investimento scelta, risultando in generale più elevato per quelle prevalentemente azionarie. Ciò è dovuto al fatto che tali linee comportano costi di gestione più elevati, commissioni di intermediazione e una maggiore volatilità, richiedendo una gestione attiva e frequenti aggiustamenti del portafoglio. Dalla Figura 1.3 si può notare che i costi dei fondi negoziali mostrano minor dispersione per tutti i tipi di comparto. Inoltre, si osserva che i PIP comportano più costi in relazione a tutti i comparti di investimento: ad esempio, considerando un orizzonte temporale di 10 anni, i comparti azionari dei PIP presentano un ISC superiore del 2,26% rispetto ai fondi negoziali e del 0,94% rispetto ai fondi aperti.

Figura 1.3: Box-plot dei valori ISC a 10 anni per forme pensionistiche complementari e per tipologia di comparto di investimento (dati di fine 2023; valori %)



Fonte: COVIP, "Relazione per l'anno 2023", pp. 70 [8]

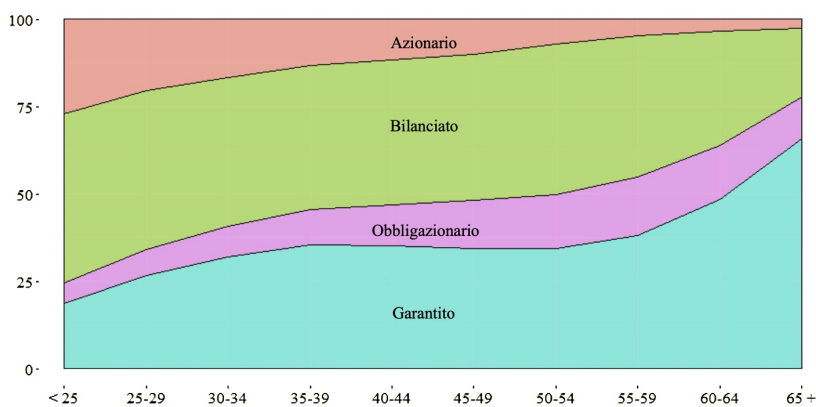
È importante notare come su orizzonti temporali di lungo periodo, differenze anche piccole nei costi tra le diverse forme pensionistiche e le diverse linee di investimento abbiano effetti notevoli sulla prestazione finale: a titolo esemplificativo, su un capitale di 100.000€ accumulato in 35 anni, un ISC del 2% invece che dell'1% comporta una riduzione del capitale del circa 18% (ovvero 82.000€) [8].

1.5 Analisi delle tendenze di investimento previdenziale degli italiani

I dati forniti dalla COVIP indicano che, alla fine del 2023, la maggior parte degli italiani iscritti ad una forma di previdenza complementare predilige i comparti bilanciati e quelli garantiti, con rispettivamente il 39,9% e il 37,1% di aderenti. A seguire ci sono i comparti obbligazionari, che contano il 12,85% di iscritti, mentre quelli azionari si posizionano per ultimi, con il 10,3%. Idealmente, i lavoratori giovani, che dispongono di un orizzonte temporale più ampio e possono quindi compensare gli effetti delle fluttuazioni delle attività finanziarie, dovrebbero prediligere linee di investimento a maggior contenuto azionario. Al contrario, coloro che si avvicinano all'età pensionabile, avendo come obiettivo la preservazione del capitale accumulato, dovrebbero optare per linee di investimento a basso rischio, quindi per comparti più prudentziali o garantiti. Questo ragionamento, che può

essere denominato come teoria “*Life-Cycle*”, non viene pienamente confermato dalla Figura 1.4, illustrante la distribuzione degli iscritti per profilo di investimento ed età. Dal grafico emerge come, sebbene i profili di aderenti più giovani presentino una maggiore propensione per il comparto azionario rispetto alle altre fasce d’età, la quota di investimenti in comparti azionari rimane comunque relativamente bassa, mentre quella in comparti garantiti è ben più elevata di quanto ci si aspetterebbe per questa fascia di età. Questo trend evidenzia come i giovani italiani tendano ad essere più prudenti di quanto suggerirebbe la teoria finanziaria, rischiando di non cogliere appieno i vantaggi del risparmio previdenziale. Si nota inoltre come, con l’avanzare dell’età, gli aderenti si spostino progressivamente verso comparti con profili di rischio minori, tanto che, a partire dai 55 anni, il comparto garantito diventa il predominante: questa dinamica è invece coerente con la teoria finanziaria. È da notare che rimangono nel comparto azionario anche dei lavoratori anziani e ciò potrebbe essere dovuto a scarsa informazione.

Figura 1.4: Iscritti alle forme pensionistiche complementari per profilo di investimento e classi di età (dati di fine 2023, valori %).



Fonte: COVIP, "Relazione per l'anno 2023", pp. 61 [8]

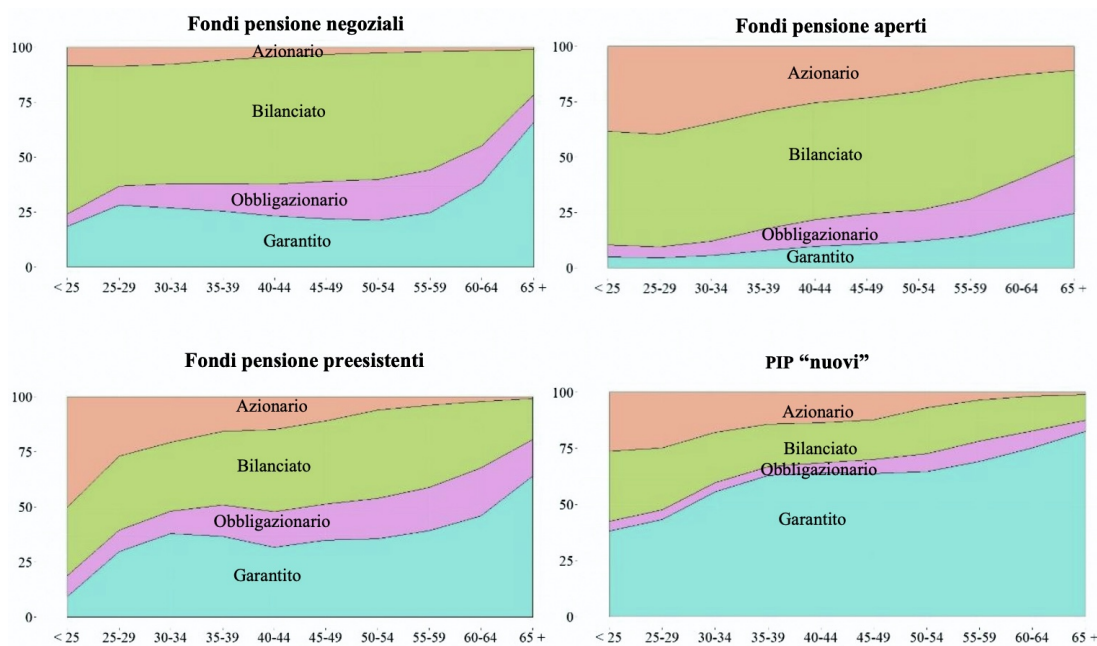
Con riferimento alle diverse tipologie di forme pensionistiche, si nota che:

- Nei fondi negoziali, fino all’età di 65 anni si tende a optare per il comparto bilanciato. Dopodiché, questa scelta viene generalmente sostituita dal comparto garantito. La quota del comparto azionario rimane molto bassa per tutte le fasce d’età.
- Nei fondi pensioni aperti emerge una maggiore predilezione per il comparto azionario e una minore per il comparto garantito rispetto alle altre forme di

previdenza complementare, tuttavia il comparto bilanciato resta sempre il preferito.

- Nei fondi pensione preesistenti si nota una suddivisione piuttosto equilibrata tra i vari comparti, con in generale un maggior peso per il bilanciato e il garantito, soprattutto nelle fasce d'età più elevate.
- Nei PIP "nuovi", prevale nettamente a tutte le età il comparto garantito.

Figura 1.5: Iscritti per profilo di investimento e classi di età nelle singole tipologie di forma pensionistica complementare (dati di fine 2023, valori %).



Fonte: COVIP, "Relazione per l'anno 2023", pp. 62 [8]

La relazione COVIP per il 2023 [8] sottolinea come circa la metà degli aderenti abbia scelto linee previdenziali con una quota azionaria nulla o molto ridotta, anche in presenza di orizzonti temporali pluridecennali. Ciò avviene nonostante gli investimenti in comparti azionari tendano a generare rendimenti medi significativamente più elevati, che si collocano tra il 4,2% e il 4,5%⁷ per tutte le forme pensionistiche. Al contrario, molti preferiscono le linee garantite, che offrono rendimenti medi appena superiori allo 0% (poiché spesso le cedole vengono utilizzate per coprire il costo della garanzia), oppure linee bilanciate,

⁷Rendimento medio composto facendo riferimento ad un intervallo decennale (da fine 2013 a fine 2023)

con rendimenti medi che variano dall'1,9% dei PIP di tipo *unit-linked* al 2,7% dei fondi negoziali e al 2,9% dei fondi aperti. La tendenza a costruire portafogli a basso rischio può essere attribuita a diversi fattori, quali ad esempio la ridotta articolazione del mercato dei capitali italiano, caratterizzato da scarse dimensioni e profondità, e la tradizionale struttura del sistema produttivo del paese, dominato dalle piccole e medie imprese. Inoltre, contribuiscono a questa situazione anche la storica avversione al rischio degli italiani, noti per una diffusa cultura del risparmio, e la loro scarsa alfabetizzazione finanziaria: l'indagine del 2023 condotta dalla Banca d'Italia sull'alfabetizzazione finanziaria [17] conferma che gli adulti italiani possiedono un basso livello di conoscenze, competenze e abilità nella gestione del denaro, con un indicatore complessivo di alfabetizzazione finanziaria che si è attestato a 10,7 su una scala da 0 a 20. Un ulteriore aspetto rilevante è rappresentato dal fatto che solo il 2-3% degli iscritti modifica la propria linea di investimento ogni anno, segno di una scarsa "riallocazione attiva" del portafoglio, probabilmente dovuta ad una limitata conoscenza finanziaria o a una riluttanza a modificare la propria scelta iniziale. Di conseguenza, molti aderenti non adattano il proprio investimento alle fasi della vita, come suggerito dalla teoria "*Life-Cycle*".

In aggiunta, è importante ricordare come la normativa attuale preveda che il conferimento "tacito"⁸ del TFR sia destinato automaticamente al comparto garantito del fondo pensione di appartenenza del lavoratore. Questo fattore può in parte spiegare la rilevante percentuale di aderenti nei comparti garantiti, anche per le fasce di età più giovani (Figura 1.5).

Tutti questi elementi possono portare alla creazione di portafogli previdenziali "subottimali", non adeguati agli obiettivi di lungo termine degli iscritti, soprattutto in relazione all'età. L'adozione di una gestione più attiva e consapevole delle opzioni di investimento nella previdenza complementare risulta quindi fondamentale per ottenere un equilibrio soddisfacente tra rischio e rendimento, in linea con i propri obiettivi previdenziali. Questi ultimi, infatti, alla luce dei trend prospettici dei tassi di sostituzione (v. 1.3), dipenderanno sempre

⁸Il conferimento tacito si verifica nel caso in cui il lavoratore dipendente del settore privato non compia una scelta esplicita riguardo alla destinazione del TFR in maturazione entro i termini previsti dalla legge.

più da forme integrative di previdenza.

1.6 La gestione finanziaria dei fondi pensione

Per "gestione finanziaria" dei fondi pensione si intende l'attività di investimento nei mercati finanziari dei contributi versati dai partecipanti e dei rendimenti da essi generati. Condivide dunque molte caratteristiche con l'usuale gestione di un investitore istituzionale, ma si distingue da essa per la particolarità dei flussi in entrata (contributi) e in uscita (prestazioni), oltre che per gli specifici obiettivi previdenziali e i limiti normativi che la regolano. Una fase determinante della gestione del fondo pensione è la determinazione dell'*asset allocation*, ossia il processo attraverso il quale il fondo decide come distribuire le risorse finanziarie tra le diverse classi di investimento. Sono diverse le peculiarità del processo di investimento di un fondo pensione, capaci di condizionare le scelte relative all'*asset allocation*, tra cui:

- Prevedibilità e stabilità dei flussi in entrata: i contributi versati regolarmente dagli iscritti al fondo sono prevedibili, il che consente al fondo pensione di pianificare con maggiore accuratezza il modo in cui distribuire tali risorse.
- Passività di medio-lungo termine: le prestazioni pensionistiche da erogare si concretizzano su un orizzonte temporale esteso, permettendo al fondo di adottare strategie di investimento mirate alla crescita sostenibile nel lungo periodo.
- Orizzonte temporale dell'investimento di lungo periodo: i fondi pensione operano su un arco di tempo molto ampio, che fornisce la possibilità di bilanciare rischi e rendimenti nel tempo. L'estesa durata che generalmente intercorre tra l'inizio dei versamenti e il pensionamento non implica necessariamente investimenti a lungo termine, ma piuttosto l'adozione di strategie di gestione del portafoglio che siano in linea con l'obiettivo di massimizzare i rendimenti nel lungo periodo.

In ogni caso, la politica di investimento di una forma pensionistica deve mirare ad ottimizzare la combinazione redditività-rischio del portafoglio nel suo complesso, con l'obiettivo di massimizzare il montante accumulato e, allo stesso tempo, esporre

gli aderenti ad un livello di rischio considerato accettabile [2].

1.6.1 Limiti sugli investimenti dei fondi pensione

Gli investimenti dei fondi pensioni sono rigorosamente regolamentati dalla legge. Le norme principali sono contenute nel D.lgs. 252/2005 [23], nel D.M. 166/2014 [22] e nel documento "Disposizioni sul processo di attuazione della politica di investimento" deliberato dalla COVIP il 16 marzo 2012 [9]. Tali normative stabiliscono limitazioni sulla scelta degli investimenti e sulle operazioni consentite, con il fine di garantire una gestione finanziaria corretta e trasparente, minimizzare i rischi e tutelare gli iscritti. Infatti, "I fondi pensione, nel rispetto del principio della sana e prudente gestione, perseguono l'interesse degli aderenti e dei beneficiari della prestazione pensionistica."

Secondo le normative, i fondi pensione sono tenuti a:

- Diversificare adeguatamente il portafoglio, col fine di ridurre la concentrazione del rischio e la dipendenza dalla performance gestionale di specifici emittenti, gruppi societari, settori di attività e aree geografiche;
- Gestire in modo efficiente le risorse finanziarie, ottimizzando i risultati e limitando i costi di transazione, di gestione e quelli operativi in rapporto alla dimensione e alla complessità del portafoglio;
- Implementare strategie di investimento in linea con il profilo di rischio e la struttura temporale delle passività, così da garantire la disponibilità di risorse sufficienti per far fronte agli impegni finanziari. In questo contesto, i fondi pensione devono preferire strumenti finanziari a basso rischio;
- Predisporre procedure e strutture organizzative professionali adatte alla dimensione e alla complessità del portafoglio, alla strategia di investimento scelta, ai rischi assunti nella gestione, alla modalità di gestione, nonché alla quota di investimenti realizzati in strumenti non negoziati nei mercati regolamentati.

Inoltre, ai fondi pensione è consentito:

- Effettuare operazioni di pronti contro termine e il prestito di titoli per garantire una gestione efficiente del portafoglio;

- Detenere liquidità, in linea con la politica di investimento adottata ed entro il limite del 20% del patrimonio;
- Impiegare strumenti derivati esclusivamente per ridurre il rischio di investimento o per una gestione efficiente.

Sono invece proibite le vendite allo scoperto, l'assunzione e la concessione di prestiti. È previsto che le risorse complessive del fondo pensione vengano investite prevalentemente in strumenti finanziari negoziati in mercati regolamentati, mentre l'investimento in strumenti non negoziati in mercati regolamentati, in OICR (Organismi di Investimento Collettivo del Risparmio) e in fondi alternativi (FIA - Fondi di Investimento Alternativo) dovrà rimanere entro un limite massimo del 30% e dovrà essere adeguatamente motivato.

In merito ai limiti di concentrazione, i fondi pensione non possono destinare più del 5% delle proprie risorse a strumenti finanziari emessi da un singolo emittente e non più del 10% a strumenti finanziari emessi da soggetti facenti parte dello stesso gruppo societario ⁹. Con specifico riguardo agli strumenti finanziari connessi a merci, l'investimento è consentito entro il limite del 5% delle disponibilità complessive del fondo, mentre non sono ammessi derivati su merci che prevedono la consegna fisica del sottostante a scadenza. Infine, l'esposizione valutaria non può superare il 30% del patrimonio complessivo e tale limite dev'essere giustificato in base alle caratteristiche specifiche e alla strategia di investimento del fondo. In ogni caso la COVIP ha la facoltà di stabilire eventuali deroghe ai limiti di investimento, qualora vi siano comprovate necessità del fondo pensione.

⁹Tali limiti non vengono applicati agli investimenti in quote o azioni di OICVM (Organismo di Investimento Collettivo in Valori Mobiliari), FIA italiani non riservati, FIA UE e non UE autorizzati in Italia, così come agli strumenti finanziari emessi o garantiti da Paesi dell'Unione Europea, Paesi OCSE o organismi internazionali di cui fanno parte Stati membri dell'UE).

2 STRATEGIE DI *ASSET ALLOCATION* DINAMICHE PER LA PREVIDENZA COMPLEMENTARE

Come emerso dal precedente capitolo, in Italia molti aderenti alla previdenza complementare effettuano scelte di investimento inefficienti e poco consapevoli. Spesso, tendono a limitarsi al versamento dei contributi nei fondi pensione senza una chiara comprensione delle implicazioni finanziarie a lungo termine, adottando strategie statiche e non sempre coerenti con i loro obiettivi previdenziali. Per affrontare questo problema, verrà proposto un modello che combina due strategie di investimento differenti: il *Life-Cycle Investing* e il *Goal-Based Investing*. Tali metodi consentono di superare le criticità legate alla scarsa pianificazione previdenziale, allineando le decisioni di investimento degli individui alle loro esigenze nel tempo e adattandole sia all'orizzonte temporale che agli obiettivi specifici.

Questo capitolo è dedicato all'approfondimento di entrambe le tecniche; ne analizza i principi fondamentali e il loro potenziale contributo alla pianificazione previdenziale.

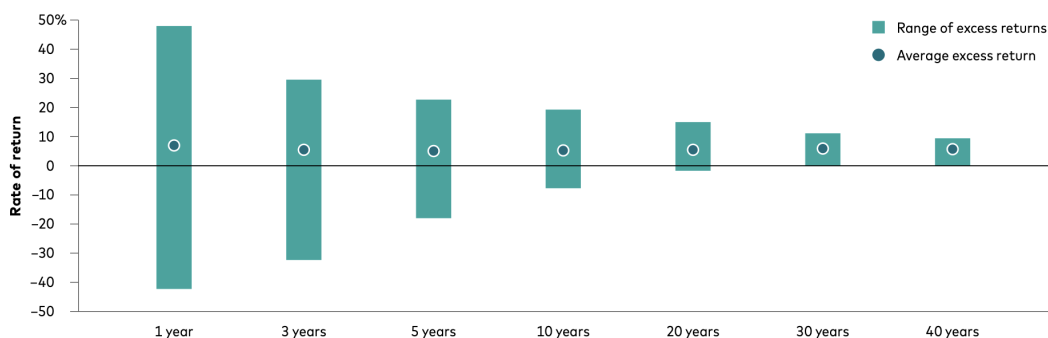
2.1 Approccio *Life-Cycle* in ambito previdenziale

In ambito previdenziale, il termine "*Life-Cycle*" (letteralmente "ciclo di vita") fa riferimento ad un meccanismo automatico di ribilanciamento del portafoglio che prevede il passaggio tra le varie linee di investimento in base all'età anagrafica dell'aderente e al tempo rimanente al pensionamento. Quest'approccio si basa sull'idea che il ciclo di vita di un individuo sia articolato in diverse fasi, ognuna

caratterizzata da specifiche esigenze finanziarie e da un livello differente di propensione al rischio. In particolare, il modello *Life-Cycle* implica un'esposizione più elevata al rischio azionario in età giovanile e un graduale spostamento verso linee più conservative con l'avvicinarsi dell'epoca di pensionamento. Questa variazione nella composizione del portafoglio è nota come *glide path*.

La scelta di un'allocatione più aggressiva nelle fasi iniziali della carriera deriva dal fatto che l'aderente dispone di un orizzonte temporale esteso, che gli consente di assorbire meglio eventuali fluttuazioni di mercato e beneficiare della crescita del capitale nel lungo periodo. Infatti, sebbene nel breve termine le azioni possano subire cali significativi, i dati storici mostrano che, su orizzonti temporali lunghi (20 anni o più), il rischio di mercato tende a generare rendimenti significativamente superiori rispetto agli investimenti più prudenti. Come evidenziato nella Figura 2.1, che analizza il premio per il rischio azionario negli Stati Uniti dal 1926 al 2021 su diversi orizzonti temporali (1, 3, 5, 10, 20, 30 e 40 anni), le azioni, pur presentando una maggiore probabilità di sottoperformare nel breve periodo, hanno generato rendimenti medi annui superiori a quelli delle obbligazioni in tutti i periodi considerati.

Figura 2.1: Premio per il rischio azionario storico su diversi orizzonti temporali (1926-2021)



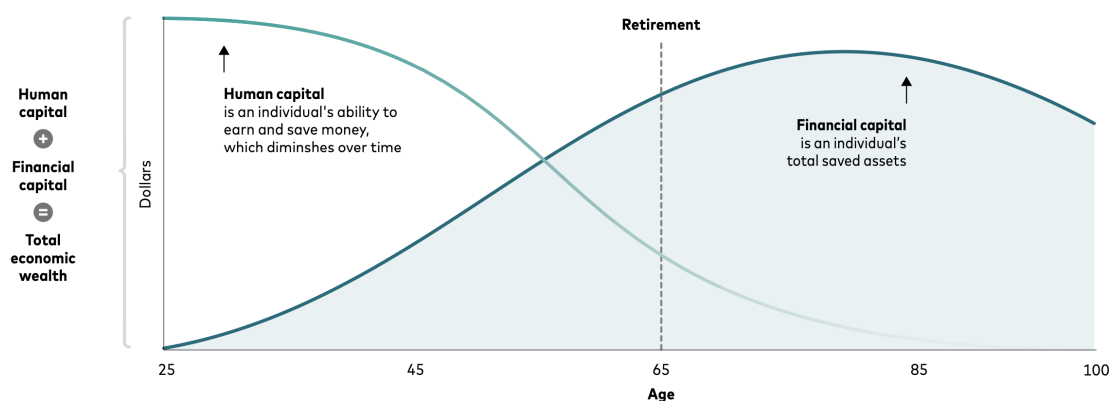
Notes: Past performance is no guarantee of future results. The performance of an index is not an exact representation of any particular investment, as you cannot invest directly in an index. U.S. stock market returns are represented by the Standard & Poor's 90 from 1926 through March 3, 1957; the Standard & Poor's 500 Index from March 4, 1957, through 1974; the Wilshire 5000 Index from 1975 through April 22, 2005; the MSCI US Broad Market Index from April 23, 2005, through June 2, 2013; and the CRSP US Total Market Index thereafter. U.S. bond market returns are represented by the Standard & Poor's High Grade Corporate Index from 1926 through 1968, the Citigroup High Grade Index from 1969 through 1972, the Lehman Brothers U.S. Long Credit AA Index from 1973 through 1975, the Barclays U.S. Aggregate Bond Index from 1976 through 2009, and the Spliced Barclays U.S. Aggregate Float Adjusted Bond Index thereafter.

Fonte: Vanguard, "Vanguard's approach to target-date funds" [19]

La logica alla base dell'approccio *Life-Cycle* trova ulteriore supporto nelle teorie del premio Nobel per l'economia Robert Merton [37, 4], secondo il quale la

ricchezza totale di un individuo è costituita dal capitale umano¹ e dal capitale finanziario accumulato nel tempo (Figura 2.2). Nei primi anni di carriera, il capitale umano rappresenta la componente predominante della ricchezza e può essere considerato come una sorta di "obbligazione implicita", in quanto garantisce un flusso di reddito relativamente stabile e prevedibile, simile ai pagamenti di un titolo obbligazionario. Di conseguenza, i giovani investitori, la cui ricchezza complessiva dipende in misura minore dal capitale finanziario già accumulato, possono permettersi di assumere un livello di rischio più elevato nei mercati finanziari, privilegiando un'esposizione significativa alle azioni. Con l'avanzare dell'età, il capitale umano si riduce progressivamente, mentre aumenta la necessità di preservare il patrimonio accumulato. Per questo motivo, il portafoglio dovrebbe essere riequilibrato gradualmente, aumentando l'esposizione a strumenti più sicuri, come obbligazioni o investimenti garantiti.

Figura 2.2: Teoria del capitale umano



Fonte: Vanguard, "Vanguard's approach to target-date funds" [19]

Sebbene questa teoria giustifichi la riduzione dell'esposizione azionaria con l'età, essa non specifica esattamente con quale velocità o in quale proporzione questa transizione debba avvenire. Il dibattito su quale sia il livello ottimale di allocazione azionaria in funzione dell'età rimane quindi aperto e dipende dalle scelte dei gestori dei fondi pensione e dalle esigenze individuali degli investitori. I meccanismi di *Life-Cycle* sono riconosciuti dal legislatore comunitario come strumenti efficaci per mitigare il rischio, come evidenziato nel Regolamento

¹Inteso come valore attuale dei futuri guadagni da lavoro.

(UE) 2019/1238 sui prodotti pensionistici paneuropei (PEPP). Inoltre, nella Raccomandazione OCSE per il “buon disegno” dei piani pensionistici a contribuzione definita, sono indicati come una valida opzione di default nel caso in cui gli aderenti non effettuino una scelta attiva sull’allocazione dei contributi [7]. L’approccio *Life-Cycle* è ampiamente riconosciuto nella previdenza complementare a livello internazionale. Ad esempio, negli Stati Uniti, un’applicazione diretta di questo meccanismo è rappresentata dai *Target-Date Funds* (TDF), strumento chiave nei piani pensionistici 401(k) ². Nel Regno Unito, i piani a contribuzione definita spesso adottano strategie *Life-Cycle*, come i *default investment strategies* nei fondi pensione aziendali. Nonostante ciò, la loro implementazione nel panorama italiano è ancora scarsa: secondo le analisi della COVIP [8], solo il 30% dei fondi pensione di nuova istituzione li adotta e in particolare 5 fondi negoziali, 9 fondi aperti e 18 PIP.

Nella pratica, nei fondi pensione che adottano questo meccanismo, al momento della sottoscrizione, l’iscritto riceve un piano di investimento con scadenze prestabilite. Ad ogni scadenza, il montante accumulato viene trasferito nel comparto più adeguato in base all’età dell’individuo. Questo meccanismo garantisce all’aderente una chiara visione dell’evoluzione del proprio investimento, rendendo il processo trasparente e prevedibile. Inoltre evita all’iscritto di dover prendere decisioni complesse in merito all’allocazione degli asset; infatti, tutte le scelte sulla costruzione del portafoglio e sul riequilibrio automatico vengono gestite dal gestore del fondo.

A titolo esemplificativo, si consideri il fondo pensione italiano Perseo Sirio, che offre la possibilità di scegliere il “percorso *Life-Cycle*”. Ad ogni fascia d’età corrisponde un diverso profilo di investimento, coerentemente con la Figura 2.3. Il *glide path* è decrescente, con una progressiva riduzione dell’esposizione agli investimenti azionari e un aumento della quota obbligazionaria.

²I piani pensionistici 401(k) sono strumenti di risparmio previdenziale destinati ai lavoratori negli Stati Uniti, introdotti dal *Revenue Act* del 1978. Si tratta di piani a contribuzione definita, che consentono ai lavoratori di destinare una parte del proprio stipendio a investimenti pensionistici beneficiando di vantaggi fiscali.

Figura 2.3: Percorso *Life-Cycle* Fondo Perseo Sirio

Età anagrafica	Profilo di investimento	Allocazione per comparti
≤45 anni	AZIONARIO	100% AZIONARIO
45 – 50anni	BILANCIATO DINAMICO	70% AZIONI - 30% OBBLIGAZIONI
50 – 55 anni	BILANCIATO CRESCITA	50% AZIONI - 50%OBBLIGAZIONI
55 – 60 anni	BILANCIATO PRUDENTE	30% AZIONI - 70% OBBLIGAZIONI
>60 anni	GARANTITO	--

Fonte: Fondo Perseo Sirio. "Regolamento Multi-comparto, scelta profilo investimento, Life-Cycle e switch."

2.2 *Goal-Based Investing*

2.2.1 Dalla Teoria di Markowitz alla Teoria comportamentale del portafoglio

Nel suo articolo "*Portfolio Selection*" (1952) [36], Markowitz ha gettato le basi della "Moderna teoria del portafoglio", introducendo un approccio quantitativo per la selezione degli investimenti tra alternative rischiose, con il fine determinare il mix ottimale di asset da includere in un portafoglio. Secondo questa teoria, la costruzione di un portafoglio si basa sul *trade-off* tra rischio e rendimento: l'obiettivo è creare "portafogli efficienti", ossia combinazioni di asset che massimizzino il rendimento atteso per un dato livello di rischio o, viceversa, minimizzino il rischio per un determinato livello di rendimento. I portafogli efficienti vengono poi combinati per creare la cosiddetta "frontiera efficiente", dalla quale gli investitori selezionano il portafoglio più adatto alla propria tolleranza al rischio e alle proprie preferenze di rendimento.

Sebbene la teoria di Markowitz abbia dominato il mondo degli investimenti per decenni e costituisca la base della maggior parte delle strategie di *asset allocation*, essa è stata oggetto di numerose critiche, soprattutto per quanto riguarda le sue assunzioni semplificative. Si pensi, ad esempio, all'ipotesi di investitori razionali. La realtà evidenzia come gli investitori siano spesso influenzati da emozioni, *bias* cognitivi e limitazioni informative, che li spingono a prendere decisioni non sempre ottimali. Inoltre, il metodo media-varianza non tiene conto di elementi

cruciali, quali il capitale iniziale disponibile, gli obiettivi personali dell'investitore e l'orizzonte temporale entro il quale questi devono essere raggiunti, trattando quindi l'allocazione degli asset in modo decontestualizzato.

In risposta a queste limitazioni, Shefrin e Statman hanno sviluppato la "Teoria comportamentale del portafoglio" (*Behavioral Portfolio Theory*, BPT) [43], che fornisce un'alternativa alla visione tradizionale di Markowitz, secondo cui gli investitori mirano esclusivamente a massimizzare il valore complessivo del portafoglio. A differenza dell'approccio media-varianza, la BPT riconosce che gli investitori non adottano sempre comportamenti razionali e spesso ignorano le covarianze tra i titoli nella costruzione del loro portafoglio, preferendo invece focalizzarsi su obiettivi specifici. Inoltre, la propensione al rischio degli investitori non è uniforme: possono essere avversi al rischio in alcuni contesti e propensi al rischio in altri, a seconda delle circostanze e degli obiettivi perseguiti.

Secondo la BPT, gli investitori non valutano il portafoglio nel suo complesso, come avviene nell'approccio media-varianza, ma costruiscono i loro portafogli seguendo una struttura a piramide, suddivisa in livelli distinti, ognuno associato ad uno specifico obiettivo e ad un particolare atteggiamento verso il rischio. La base della piramide (strato di protezione dal ribasso) è concepita per garantire sicurezza finanziaria e prevenire disastri economici. In questo livello, gli investitori mostrano una forte avversione al rischio, privilegiando asset stabili e poco rischiosi. Il livello più alto (strato di potenziale rialzo), invece, è destinato alla crescita del capitale e al raggiungimento delle aspirazioni personali. Esso si caratterizza per investitori maggiormente propensi al rischio e disposti a investire in strumenti con più volatilità per ottenere rendimenti più elevati.

Sulla base dei principi della BPT, è stato introdotto un nuovo approccio più personalizzato di gestione dei portafogli, noto come *Goal-Based Investing* (GBI).

2.2.2 Caratteristiche del *Goal-Based Investing*

Il *Goal-Based Investing* riconosce l'impossibilità di definire una strategia di investimento universale valida per tutti gli individui, sottolineando invece l'importanza di soluzioni create su misura. Questo approccio si basa sull'idea che la maggior parte degli investitori non sia semplicemente interessata a massimizzare

il profitto, ma aspiri a raggiungere traguardi finanziari specifici, come l'acquisto di una casa, il pagamento dell'istruzione dei figli, o il finanziamento della propria pensione. Il GBI pone quindi gli obiettivi personali dell'investitore al centro della selezione del portafoglio, offrendo una strategia di allocazione più dinamica e aderente alle esigenze individuali.

A differenza dell'approccio tradizionale basato su una logica "*Asset-Only*", che mira a massimizzare il rendimento atteso per un dato livello di rischio, il GBI si concentra sulla massimizzazione della probabilità di raggiungere obiettivi finanziari concreti. Questo significa che l'attenzione non è rivolta esclusivamente alla performance del portafoglio nel suo complesso, quanto piuttosto alla sua capacità di finanziare le necessità future dell'investitore. Se l'investitore non ha un orizzonte temporale molto esteso e, soprattutto, dispone di una ricchezza significativamente superiore alle proprie necessità di spesa future, un approccio *Asset-Only* risulta appropriato. Al contrario, quando l'investitore deve fare affidamento sui rendimenti del proprio portafoglio per coprire le spese future, è preferibile adottare un modello GBI.

La strategia GBI parte dalla definizione degli obiettivi, che devono essere quantificati in termini monetari e distinti in base alla priorità e all'orizzonte temporale. In particolare, si possono avere obiettivi a breve termine (1-5 anni), come l'acquisto di una nuova auto, obiettivi a medio termine (5-10 anni), come il risparmio per l'istruzione dei figli, e obiettivi a lungo termine (10+ anni), come l'accumulo di un fondo pensionistico.

Una volta stabiliti gli obiettivi, l'approccio più comune prevede che l'investitore allochi il proprio patrimonio tra essi, costruendo sotto-portafogli separati, ciascuno associato ad uno specifico obiettivo e caratterizzato da una strategia di investimento indipendente. Così facendo, gli investitori possono monitorare i progressi di ogni singolo obiettivo in modo autonomo, evitando che le performance di un sotto-portafoglio influenzino negativamente gli altri. Questa strategia, pur differendo dall'approccio tradizionale, può essere concettualmente equiparata alla soluzione media-varianza, come dimostrato da Das et al. (2010) [20]. Tuttavia, affinché ciò avvenga è necessario ridefinire il concetto di rischio: il rischio non dovrebbe essere inteso come la mera volatilità del portafoglio, ma come la probabilità di non raggiungere il livello soglia fissato per ogni obiettivo finanziario.

L'ultima fase del processo è il monitoraggio e il ribilanciamento dei portafogli, che devono essere adeguati periodicamente in base all'evoluzione del mercato e ai cambiamenti nelle esigenze dell'investitore.

Il GBI presenta numerosi vantaggi rispetto ai metodi di gestione tradizionali. Offre maggiore flessibilità e adattabilità, oltre a garantire chiarezza e controllo. La definizione chiara degli obiettivi consente agli investitori di prendere decisioni più consapevoli riguardo all'allocazione del capitale e al livello di rischio accettabile. Inoltre, questo approccio riduce l'ansia legata alla volatilità del mercato: la consapevolezza che ogni portafoglio è progettato per rispondere ad un obiettivo specifico e con un orizzonte temporale ben definito, aiuta a prevenire reazioni impulsive di fronte a oscillazioni di breve periodo.

Nonostante questi numerosi punti a favore, questa maggiore personalizzazione presenta anche alcune sfide. La suddivisione del patrimonio in più sotto-portafogli implica una gestione più complessa e costi amministrativi potenzialmente più elevati. Inoltre, il bisogno di monitorare costantemente i progressi verso gli obiettivi può richiedere notevole tempo, oltre che competenze specifiche.

2.2.3 La funzione obiettivo nel *Goal-Based Investing*

Come evidenziato da Das et al. (2019) [21], il punto centrale della GBI risiede nella scelta di una funzione obiettivo diversa rispetto a quella adottata nei tradizionali problemi di portafoglio basati sull'utilità attesa. La formulazione più semplice di questa funzione è di tipo probabilistico: si definisce un obiettivo di ricchezza \bar{W} da raggiungere entro un orizzonte temporale T e si individua la strategia ottimale che massimizza la probabilità di successo nel conseguire tale traguardo. Una possibile espressione della funzione obiettivo è la seguente:

$$\max_{\{A(0), A(1), \dots, A(T-1)\}} Pr[W(T) \geq \bar{W}]$$

dove $W(T)$ rappresenta la ricchezza finale del portafoglio e $A(t)$ indica le possibili allocazioni tra i fondi disponibili per l'investitore in ciascun periodo $t = 0, 1, \dots, T - 1$.

Le strategie basate sulla GBI possono differire in modo significativo da quelle

fondate sull'utilità attesa, che mirano a massimizzare la soddisfazione derivante dal consumo nel tempo e dalla ricchezza finale. Ad esempio, se un portafoglio si discosta notevolmente dall'obiettivo prefissato, la logica del GBI potrebbe spingere l'investitore ad assumere un rischio maggiore per aumentare la probabilità di successo. Al contrario, un approccio basato sull'utilità attesa potrebbe suggerire un'allocazione più prudente, privilegiando la stabilità dei rendimenti.

2.2.4 *Goal-Based Investing* in ambito previdenziale

Una volta definiti gli obiettivi e il framework metodologico del GBI, è possibile applicarlo in contesti specifici. Quello di nostro interesse è la pianificazione previdenziale, dove il GBI fornisce un approccio innovativo per affrontare efficacemente la sfida di garantire un reddito sostenibile e adeguato durante il periodo post-pensionamento. Gli investimenti tradizionali nei fondi pensione si concentrano principalmente sull'accumulo di ricchezza, misurando il rischio in termini di volatilità del portafoglio e valutando il successo in base all'incremento massimo del saldo del conto individuale. Con il GBI, invece, l'attenzione si sposta dal semplice accumulo di capitale alla capacità di generare un reddito pensionistico sostenibile, che diventa sia l'obiettivo primario dell'investimento che la misura del successo. L'obiettivo è dunque chiaro: generare un reddito sostitutivo ("*reddito target*"), che consenta al futuro pensionato di mantenere un certo tenore di vita una volta terminata la carriera lavorativa. In questa prospettiva, anche il concetto di rischio muta: non è più legato esclusivamente alla volatilità del portafoglio, ma viene ridefinito come la possibilità di non raggiungere il reddito desiderato.

Definire l'obiettivo come un reddito *target* consente di costruire un portafoglio in grado di affrontare in modo più resiliente le incertezze relative all'orizzonte temporale prolungato tipico degli investimenti pensionistici e ai vari rischi finanziari e demografici ad esso associati (rischio di mercato, rischio di inflazione, rischio di longevità).

Il GBI sta iniziando a prendere piede nell'ambito previdenziale internazionale. Ad esempio, Allianz Global Investors ha introdotto il "*Goal Based Investing Lab*" [30], un progetto volto a fornire strumenti per calcolare il capitale

necessario al momento del pensionamento, tenendo conto di variabili come l'età di pensionamento, l'inflazione prevista e l'aspettativa di vita. Nonostante ciò, l'adozione del GBI è ancora assente nel settore previdenziale italiano. La sua introduzione potrebbe rappresentare un'opportunità per sviluppare modelli di investimento più adatti alle reali esigenze dei pensionati, contribuendo al miglioramento della sostenibilità finanziaria delle future pensioni.

3 ALCUNI STRUMENTI PER LA COSTRUZIONE DI UN MODELLO DI *ASSET ALLOCATION*

Il seguente capitolo è dedicato ad un'introduzione ai modelli noti come *Economic Scenario Generator* e agli algoritmi genetici, che saranno impiegati per la costruzione del modello di *asset allocation* oggetto di questa tesi.

3.1 *Economic Scenario Generator*

Esistono diverse definizioni di *Economic Scenario Generator* (ESG) [39, 6]; nel contesto di questa tesi quando si parla di ESG si fa riferimento ad uno strumento *software* utilizzato, come suggerisce il nome, per generare simulazioni riguardo al comportamento congiunto di più variabili economiche e finanziarie. Generalmente, gli ESG vengono impiegati in combinazione con altri modelli, dai quali si ottengono degli scenari che vengono utilizzati come input per determinare le variabili di interesse per un'impresa. Risultano particolarmente utili quando si vuole testare un modello di business in un'ampia gamma di condizioni economiche, in modo da mettere in luce vantaggi e svantaggi delle diverse decisioni operative e strategiche. Il punto di forza di un ESG risiede nella sua capacità di simulare e proiettare scenari economici e finanziari in maniera strutturata e rigorosa, fornendo non solo una molteplicità di possibili risultati, ma anche una rappresentazione più accurata delle probabilità di ogni scenario. Ciò è fondamentale, vista la natura stocastica delle variabili finanziarie ed economiche, che cambiano nel tempo in modo imprevedibile.

Nell'ambito delle applicazioni di un ESG in genere si possono seguire due approcci,

ognuno dei quali risponde ad esigenze specifiche:

1. Approccio *risk-neutral*: utilizzato per il *pricing* di strumenti derivati complessi e contratti assicurativi con opzioni implicite (*embedded options*). In questo contesto, il prezzo reale di un'opzione rappresenta il valore atteso dei possibili flussi di cassa futuri, calcolati assumendo che tutti gli investitori siano neutrali al rischio. Un'importante applicazione del framework *risk-neutral* è la valutazione *market-consistent* delle passività assicurative, in conformità con le normative delle autorità di vigilanza.
2. Approccio *real-world*: adottato per la gestione del rischio (valutare i rischi aziendali, il capitale regolamentare e i requisiti di solvibilità). I modelli *real-world* vengono impiegati per simulare i percorsi futuri delle variabili economiche e il loro potenziale impatto sul capitale e sulla solvibilità.

Per la modellazione si possono adottare sia approcci a tempo discreto che approcci a tempo continuo. Normalmente però si preferiscono i secondi, in quanto offrono una formulazione matematica più conveniente.

Nel *case study* trattato in questa tesi lo strumento di ESG adottato rientra nel framework *real-world*. Inoltre, i processi impiegati sono stati inizialmente modellati con un parametro temporale continuo, ma successivamente discretizzati per facilitarne l'applicazione.

3.1.1 Applicazioni

Gli ESG vengono impiegati in vari ambiti, in particolare nell'industria assicurativa (nel ramo vita) e nel settore previdenziale. Nel primo caso, oltre a supportare la quantificazione dei rischi, possono essere utilizzati per sviluppare modelli aziendali interni per la determinazione dei requisiti di capitale imposti dalle normative, come il *Solvency capital requirement* richiesto dal quadro regolatorio europeo Solvency II. Inoltre, sempre nell'ambito delle assicurazioni vita, gli ESG consentono di modellizzare le variazioni dei tassi di interesse e il comportamento degli assicurati (in relazione a riscatti, versamento di premi aggiuntivi, ecc.). Un'ulteriore possibile applicazione riguarda il *pricing* di prodotti con opzioni implicite, come le *unit-linked* con tasso di rivalutazione minimo garantito. Infatti,

dal momento che queste opzioni non sono scambiate sui mercati, la loro valutazione richiede l'uso di specifici modelli *mark-to-model* per stimarne il valore.

Per quanto riguarda l'ambito previdenziale, sempre più fondi pensione stanno adottando strumenti ESG per individuare l'allocazione ottimale del portafoglio di investimenti. Gli ESG *real-world*, infatti, permettono di stimare le distribuzioni dei rendimenti prospettici, consentendo così di identificare il portafoglio più adatto a coprire le passività previste e ridurre i rischi associati, come il rischio di liquidità e di reinvestimento. Ciò risulta particolarmente utile nel caso in cui i fondi pensione adottino una strategia *Liability-Driven Investment* (LDI), che individua l'allocazione di capitale migliore sulla base dell'analisi delle passività future (incasso dei contributi e pagamento delle pensioni).

3.1.2 Fasi del processo di costruzione di uno strumento ESG

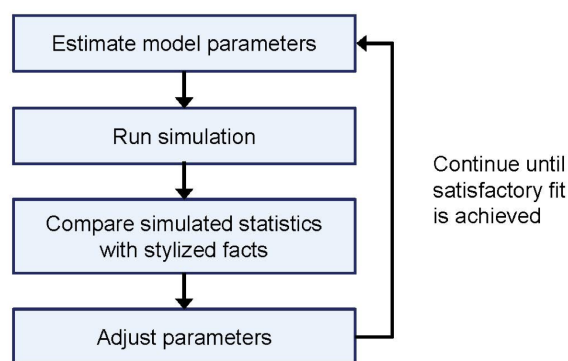
Le fasi del processo di costruzione si articolano nei seguenti punti:

1. Scelta delle variabili da proiettare: questa fase è essenziale affinché il modello sia in grado di rispondere agli obiettivi dell'analisi. Le variabili selezionate devono rappresentare in modo adeguato i fattori economici e finanziari che impattano sul sistema in esame, garantendo una simulazione realistica. Le variabili finanziarie più comunemente utilizzate in un ESG includono il valore di azioni o indici di mercato (per l'analisi dell'andamento dei mercati azionari), i prezzi dei titoli obbligazionari (con particolare attenzione alla struttura per scadenza dei tassi di interesse), i tassi di cambio. Per quanto riguarda invece le variabili di tipo macroeconomico, quelle più proiettate sono l'inflazione (che influisce sul valore reale degli investimenti), il PIL, il tasso di disoccupazione, ecc.
2. Scelta dei modelli di simulazione: per ognuna delle variabili selezionate, bisogna scegliere un modello stocastico che permetta di generare le simulazioni. Tra i più utilizzati si elencano il modello di Vasicek, il modello di Cox-Ingersoll-Ross, il modello di Hull-White e il moto browniano geometrico (v. 3.1.3).
3. Calibrazione del modello: questa fase determina il comportamento dei

dati simulati. Consiste nell'identificare i valori ottimali dei parametri dei modelli inclusi nello strumento ESG, col fine di generare le distribuzioni e le dinamiche delle variabili scelte (ad esempio volatilità, correlazioni, caratteristiche delle code). La difficoltà di questo processo dipende sia dal numero di variabili considerate, che dalla complessità dei modelli adottati per queste ultime (più sono complesse le equazioni dei modelli, più il processo di calibrazione sarà ostico). Nell'ambito dei modelli ESG *real-world*, in cui si vuole rappresentare l'evoluzione futura dell'economia nel modo più realistico possibile, questa fase è particolarmente critica. Infatti sono richieste ipotesi esplicite sugli sviluppi economici futuri e talvolta anche l'impiego di un *expert judgment*, soprattutto quando il passato non è considerato rappresentativo del futuro (come nel caso di crisi economiche o cambiamenti normativi).

La calibrazione di un ESG segue un processo iterativo (Figura 3.1): si inizia con la stima dei parametri del modello per ogni variabile economico-finanziaria considerata, ottenendo così una prima serie di simulazioni. Queste vengono poi confrontate con gli *stylized facts*¹ e le aspettative degli esperti. Sulla base di questo confronto, i parametri vengono aggiustati e il processo si ripete fino a ottenere simulazioni coerenti con le evidenze empiriche.

Figura 3.1: Processo di calibrazione (*real-world*)



Fonte: Conning, "A User's Guide to Economic Scenario Generation in Property/Casualty Insurance", pp. 79 [6]

¹Gli *stylized facts* sono evidenze empiriche talmente ricorrenti da essere considerate come verità

Una volta calibrati i parametri dei modelli stocastici, si passa alla considerazione delle correlazioni tra le variabili, indispensabile per la generazione di scenari economici realistici. Le variabili devono essere proiettate in modo congiunto e correlato, rispettando le interdipendenze esistenti. Un metodo comune per strutturare le correlazioni è il cosiddetto schema "a cascata", in cui le simulazioni delle variabili vengono generate in sequenza, rispettando i coefficienti di correlazione stabiliti. Il processo inizia con la definizione di un insieme di variabili di interesse e della relativa matrice di correlazione (che può essere ottenuta a partire dalle serie storiche delle variabili considerate). Successivamente, la simulazione procede seguendo un ordine gerarchico: si genera la prima variabile, considerata indipendente o modellata con una distribuzione di riferimento; viene simulata una seconda variabile, condizionata alla prima, in modo da riflettere la correlazione tra le due; le variabili successive vengono generate in sequenza, ognuna costruita sulla base delle precedenti, preservando la struttura di correlazione. Questa procedura garantisce che ogni variabile sia coerente con quelle già generate, rispettando la matrice di correlazione e assicurando una rappresentazione realistica delle dipendenze tra i fattori analizzati. Per agevolare questo processo, è particolarmente utile l'algoritmo di decomposizione di Cholesky (v. 3.1.4), che consente di trasformare un insieme di variabili indipendenti in variabili correlate secondo una matrice di correlazione predefinita.

3.1.3 Scelta dei modelli di simulazione

Alcune nozioni sui processi stocastici

Un processo stocastico è una famiglia di variabili aleatorie $\{X_t\}_{t \in T}$ definite su uno stesso spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) , indicizzate da $t \in T$, dove T è l'insieme degli indici del processo e t rappresenta il parametro del processo, tipicamente interpretabile come un istante di tempo. Vediamo ora una definizione più formale.

Definizione 1. *Sia (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità, dove Ω è uno spazio campionario, \mathcal{F} è una sigma-algebra di sottoinsiemi di Ω e P è una misura di*

probabilità su (Ω, \mathcal{F}) . Sia inoltre T un insieme non vuoto. Un processo stocastico è un'applicazione:

$$X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che, per ogni $t \in T$, la funzione

$$X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_t(\omega) := X(\omega, t),$$

sia \mathcal{F} -misurabile, ovvero

$$X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

dove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la sigma-algebra di Borel su \mathbb{R} .

Un processo stocastico è una funzione di due variabili. Vi sono quindi due possibili interpretazioni:

- Per ogni $t^* \in T$ fissato, la funzione $\omega \mapsto X_{t^*}(\omega)$ è \mathcal{F} -misurabile, quindi X_{t^*} è una variabile aleatoria;
- Per ogni $\omega^* \in \Omega$ fissato, la funzione $t \mapsto X_t(\omega^*)$ è una funzione di t , detta realizzazione o traiettoria del processo stocastico.

Se l'insieme T è finito o numerabile si parlerà di processo stocastico a tempo discreto, altrimenti, se T ha la cardinalità del continuo, si parlerà di processo stocastico a tempo continuo.

I processi stocastici rappresentano un ottimo strumento per modellare l'evoluzione nel tempo di una grandezza soggetta a variazioni casuali. Per questo motivo trovano applicazione in numerosi ambiti, tra cui l'economia, la finanza, la fisica, la biologia e la medicina. Si pensi, ad esempio, al modello di Black-Scholes utilizzato in finanza per la valutazione delle opzioni, ai modelli epidemiologici stocastici per la diffusione delle malattie, o ancora al moto browniano, che descrive il comportamento delle particelle in sospensione nei fluidi.

Moto browniano geometrico

Il moto browniano geometrico (*Geometric Brownian Motion*, GBM) [3] è un processo stocastico a parametro continuo ampiamente utilizzato in finanza per modellare l'evoluzione dei prezzi degli asset.

L'equazione differenziale stocastica (*Stochastic Differential Equation*, SDE) che lo descrive è la seguente:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove:

- $(W_t)_{t \geq 0}$ è un processo di Wiener ².
- $\mu \in \mathbb{R}$ è il parametro di *drift*, che determina la tendenza media della crescita o decrescita del processo.
- $\sigma > 0$ è il parametro di volatilità, che misura l'intensità delle fluttuazioni aleatorie.

Equivalentemente, riscrivendo l'equazione in forma differenziale:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Da questa rappresentazione emerge con maggior chiarezza il ruolo dei parametri: μ è il tasso di crescita atteso, ovvero l'incremento percentuale medio del processo nel tempo. Se $\mu > 0$, il processo genererà traiettorie tendenzialmente crescenti nel lungo periodo, e maggiore sarà il suo valore, più pronunciata sarà la crescita attesa. Il parametro σ , invece, controlla l'intensità della componente stocastica: all'aumentare di σ , le traiettorie diventeranno più irregolari, con oscillazioni più marcate intorno alla tendenza media determinata da μ .

Applicando il Lemma di Itô alla SDE, si ottiene la seguente soluzione in forma chiusa:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

²Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ uno spazio di probabilità con filtrazione. Un processo di Wiener (o moto browniano standard), $(W_t)_{t \geq 0}$, è un qualunque processo stocastico che soddisfa le seguenti proprietà:

- $W_0 = 0$ quasi certamente;
- Il processo W è continuo e \mathcal{F}_t -adattato;
- Gli incrementi hanno distribuzione normale $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ e sono indipendenti dalla filtrazione \mathcal{F}_t .

L'equazione ottenuta mostra che S_t segue una distribuzione lognormale, il che implica che il logaritmo di S_t seguirà una distribuzione normale:

$$\ln(S_t) \sim \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

che può essere riscritta come:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

Per simulare una traiettoria di un moto Browniano geometrico con valore iniziale $S(0)$, si può utilizzare la seguente relazione ricorsiva, che descrive l'evoluzione discreta del processo:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}\right\}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

con Z_1, \dots, Z_n variabili aleatorie indipendenti con distribuzione normale standard.

Modello di Hull-White

Il modello di Hull-White (1990) [28] è uno dei modelli stocastici più utilizzati per la modellazione della dinamica dei tassi di interesse. Esso è descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dr_t = [\theta_t - \alpha_t r_t] dt + \sigma_t dW_t$$

dove r_t è il tasso di interesse istantaneo al tempo t , W_t è un processo di Wiener, mentre θ_t , α_t e σ_t sono funzioni deterministiche del tempo.

Nel 1994, J. Hull e A. White hanno introdotto una versione semplificata del modello, con α e σ costanti positive:

$$dr_t = [\theta_t - \alpha r_t] dt + \sigma dW_t$$

dove:

- $\theta(t)$ è una funzione deterministica del tempo e viene scelta in modo che il modello sia coerente con la struttura a termine dei tassi di interesse osservata

sul mercato;

- α è il parametro di *mean reversion*, che determina la rapidità con cui i tassi di interesse ritornano alla loro media di lungo periodo;
- σ è il parametro di volatilità.

Il modello di H-W appartiene alla famiglia dei modelli a struttura a termine affine, per cui il tasso a pronti $r(t, T)$ è una funzione affine del tasso istantaneo r_t , ovvero:

$$r(t, T) = \alpha(t, T) + \beta(t, T)r_t$$

dove $\alpha(t, T)$ e $\beta(t, T)$ sono funzioni deterministiche del tempo.

Di conseguenza, il prezzo di uno *zero-coupon bond* al tempo t con scadenza $T > t$ e valore facciale pari a 1 può essere espresso analiticamente come:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t}$$

dove:

- $B(t, T)$ misura l'influenza del tasso di interesse corrente r_t sul prezzo dell'obbligazione:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

- $A(t, T)$ è un fattore di sconto deterministico che dipende solo dalla struttura a termine iniziale e dai parametri del modello:

$$A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} B^2(t, T)(1 - e^{-2\alpha t})}$$

$f(0, t)$ è il tasso *forward* istantaneo alla data iniziale 0.

Modello di Cox-Ingersoll-Ross

Il modello di Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985) [16] è ampiamente utilizzato per descrivere l'evoluzione dei tassi di interesse, in particolare dei tassi a breve termine. L'evoluzione del tasso di interesse nel modello CIR è descritta dalla seguente

equazione differenziale stocastica:

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

dove:

- $(W_t)_{t \geq 0}$ è un processo di Wiener;
- σ è il parametro di volatilità;
- a è una costante positiva che regola la velocità di *mean-reversion*, ossia la rapidità con cui il tasso converge alla sua media di lungo periodo;
- b è una costante positiva che rappresenta il valore di equilibrio di lungo termine del tasso di interesse;
- Il termine $a(b - r_t)$ è il *drift*, responsabile della proprietà di *mean-reversion*, che spinge il tasso r_t verso b con una velocità determinata da a .

Il termine di diffusione $\sigma \sqrt{r_t}$ è proporzionale alla radice quadrata del tasso stesso: quando r_t è prossimo a zero la volatilità si riduce, evitando così che il tasso assuma valori negativi.

Dalla SDE alla base del modello si ricava l'equazione del tasso di interesse istantaneo. Siano $s, t \in \mathbb{R}_+$ con $s < t$, si ha:

$$r_t = r_s + \int_s^t a(b - r_u) du + \sigma \int_s^t \sqrt{r_u} dW_u$$

Anche il modello CIR appartiene alla famiglia dei modelli a struttura a termine affine, il che implica che il prezzo di uno *zero-coupon bond* al tempo t , con scadenza $T > t$ e valore facciale pari a 1 è dato dalla relazione:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t}$$

dove:

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp \{(a + h)(T - t)/2\}}{2h + (a + h) (\exp \{(T - t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}},$$

$$B(t, T) = \frac{2 (\exp \{(T - t)h\} - 1)}{2h + (a + h) (\exp \{(T - t)h\} - 1)},$$

$$h = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

3.1.4 Decomposizione matriciale di Cholesky

La decomposizione di Cholesky [38] è una tecnica di fattorizzazione utilizzata per scomporre una matrice simmetrica e definita positiva in un prodotto di una matrice triangolare inferiore e della sua trasposta coniugata. Essa viene spesso impiegata per la generazione di variabili aleatorie correlate tra loro.

Definizione 2. *Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica e definita positiva, allora esiste una ed una sola matrice triangolare inferiore \mathbf{L} , con elementi non negativi sulla diagonale ($l_{k,k} > 0, k = 1, \dots, n$), tale che:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

L'algoritmo per la decomposizione di Cholesky calcola gli elementi di \mathbf{L} iterativamente seguendo le seguenti formule:

- Per gli elementi diagonali ($i = j$):

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

- Per gli elementi sotto la diagonale ($i > j$):

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right)$$

Dal momento che \mathbf{L} è triangolare inferiore, non è necessario calcolare gli elementi sopra la diagonale ($i < j$).

Come anticipato, la decomposizione di Cholesky consente di trasformare un insieme di variabili indipendenti in variabili correlate secondo una matrice di correlazione predefinita. A titolo esemplificativo, si supponga di voler generare due variabili aleatorie X_1 e X_2 con una correlazione prefissata ρ . La matrice di correlazione tra X_1 e X_2 è:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Applicando la decomposizione di Cholesky alla matrice Σ , si ottiene la matrice triangolare inferiore \mathbf{L} , tale che $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, ossia:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix}$$

Per ottenere le due variabili X_1 e X_2 con la correlazione desiderata, si parte da due variabili normali standard indipendenti, $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e si applica la trasformazione lineare:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Esplicitando i calcoli:

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1 \\ X_2 &= \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \end{aligned}$$

Ora X_1 e X_2 sono variabili correlate con coefficiente di correlazione ρ .

L'approccio descritto può essere esteso al caso generale di n variabili aleatorie correlate.

3.2 Algoritmi genetici

Gli algoritmi genetici (*Genetic Algorithms*, GA), proposti da John Holland (1975) [27], sono tecniche metaeuristiche di ottimizzazione ispirate alla teoria dell'evoluzione di Charles Darwin (1859) e alla teoria dell'ereditarietà di Gregor Mendel (1866). Basandosi sui principi di ereditarietà genetica e selezione naturale, vengono impiegati per affrontare problemi di ottimizzazione complessi, difficili da risolvere mediante tradizionali algoritmi di complessità lineare o polinomiale. Il contesto ideale per la loro applicazione si verifica quando vi sono numerosi input da gestire e la funzione obiettivo è discontinua, non differenziabile, stocastica o altamente non lineare. Inoltre, i GA sono particolarmente efficaci per affrontare problemi in cui gli output sono numeri interi o seguono una relazione monotona. Secondo la teoria darwiniana, gli individui sono costantemente impegnati in una

"lotta per la sopravvivenza" e solo quelli che meglio si adattano all'ambiente circostante riescono a sopravvivere e a riprodursi, trasmettendo così il proprio patrimonio genetico alle generazioni successive. Questo processo guida l'evoluzione della specie, favorendo nel tempo la diffusione di caratteristiche vantaggiose.

I GA si ispirano a questa dinamica e la traducono in un contesto computazionale: il problema in esame rappresenta l'ambiente in cui gli individui devono adattarsi; le soluzioni candidate sono gli individui in competizione per la sopravvivenza; infine, il grado di adattamento di ogni individuo è determinato da una funzione obiettivo (*fitness function*) calcolata su esso.

A partire da una popolazione iniziale di soluzioni, solo le soluzioni migliori - cioè quelle che risolvono meglio il problema - vengono selezionate per la riproduzione. Tuttavia, come in natura, il solo meccanismo di selezione non è sufficiente a garantire una popolazione geneticamente varia ed efficiente. Per questo motivo, intervengono il crossover e la mutazione: il crossover (ricombinazione genetica) riproduce il processo biologico di trasmissione ereditaria mendeliana, mescolando il corredo genetico di due genitori per generare nuovi individui. Parallelamente, la mutazione introduce piccole variazioni casuali nei geni di alcuni individui, simulando le mutazioni genetiche naturali. Attraverso questo processo iterativo evolutivo, si ottiene un progressivo miglioramento della popolazione, avvicinandosi, idealmente, ad una soluzione ottima.

Alla luce di questa metafora, i GA attingono dalla biologia alcune terminologie chiave, illustrate nella Tabella 3.1.

Tabella 3.1: Terminologia biologica negli algoritmi genetici

Termine	Definizione
Cromosoma	Soluzione candidata al problema, codificata sotto forma di stringhe di caratteri o vettori numerici
Geni	Elementi che compongono il cromosoma, costituiti da una o più parti adiacenti del vettore
Allele	Valore che un gene può assumere
Popolazione	Insieme delle soluzioni presenti in una generazione
Genotipo	Codifica interna di una soluzione candidata, ovvero la rappresentazione del cromosoma all'interno del GA
Fenotipo	Manifestazione esterna del genotipo, ovvero la soluzione effettiva nel dominio del problema

I GA, come tutti gli algoritmi metaeuristici, non garantiscono la convergenza alla soluzione ottima, ma rappresentano comunque un metodo rapido, flessibile ed efficiente per ottenere soluzioni di alta qualità, spesso sufficienti per affrontare problemi complessi in modo efficace. Grazie alla loro capacità di individuare soluzioni soddisfacenti in tempi relativamente brevi, trovano applicazione in numerosi settori, quali ad esempio l'ingegneria, la robotica, la finanza, la biologia molecolare, ecc.

3.2.1 Le fasi di un algoritmo genetico

Come mostrato nella Figura 3.2, un GA consiste in un processo iterativo che si articola nei seguenti passi:

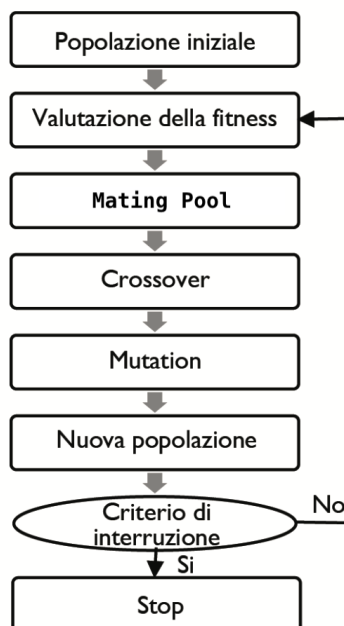
1. Viene generata casualmente una popolazione iniziale di n cromosomi (soluzioni candidate).
2. Si calcola la funzione di fitness $f(x)$ per ogni cromosoma x della popolazione.
3. Si scelgono le soluzioni migliori in base al metodo di selezione scelto. Ogni individuo selezionato viene copiato nel *pool* di riproduzione (*mating pool*), che contiene i candidati che parteciperanno alla generazione delle nuove soluzioni.

4. Si applicano gli operatori genetici (tipicamente crossover e mutazione) alle soluzioni nel *mating pool* con il fine di generare nuove soluzioni.
5. Si crea una nuova popolazione a partire dalle soluzioni generate nel passo precedente, sostituendo o integrando quella precedente, a seconda della strategia di selezione adottata.
6. Si ripete la procedura a partire dal passo 2, utilizzando la nuova popolazione creata al passo 5.

Ogni iterazione di questo processo è chiamata "una generazione". Idealmente, il ciclo evolutivo potrebbe andare avanti all'infinito, quindi occorre definire un criterio per arrestare il processo. Alcuni esempi sono:

- Arresto dopo un numero predefinito di generazioni o di una certa quantità di tempo;
- Arresto quando non si osserva alcun miglioramento della soluzione ottimale per n generazioni successive;
- Arresto in seguito all'identificazione di una soluzione con una fitness soddisfacente.

Figura 3.2: Processo di un algoritmo genetico



Fonte: Pomante, "Asset allocation dinamica per i fondi pensione: un modello basato sugli algoritmi genetici" [41]

3.2.2 Codifica genetica

Il termine "codifica genetica" si riferisce al metodo utilizzato nei GA per rappresentare le soluzioni di un problema. Le soluzioni, affinché possano essere facilmente elaborate e ricombinate, devono essere strutturate in una forma comprensibile dall'elaboratore. Nei GA questa rappresentazione avviene tipicamente tramite stringhe simboliche, ovvero sequenze di simboli che definiscono le caratteristiche di un individuo. Esistono diversi metodi di codifica e la scelta di quello più adatto al problema influisce direttamente sull'efficacia dell'algoritmo nel navigare lo spazio delle soluzioni.

Il tipo di codifica più semplice e diffuso è quello binario, in cui le soluzioni vengono rappresentate come stringhe di *bit* (sequenze di 0 e 1). Se si considerano N geni, il numero totale di possibili stringhe ottenibili è 2^N . Questo metodo, sebbene sia facile da implementare, talvolta può risultare inadeguato alla trattazione di problemi più complessi.

Altri due metodi comunemente utilizzati sono la codifica reale e quella a valori interi, in cui le soluzioni sono rappresentate rispettivamente da liste di numeri reali e di numeri interi. Il primo è particolarmente adatto ai problemi di ottimizzazione continua, mentre il secondo è preferibile per problemi con parametri discreti. Le tecniche di codifica menzionate offrono il vantaggio di una facile applicazione degli operatori di mutazione: è sufficiente sostituire un 1 con uno 0 (e viceversa), oppure modificare il valore aggiungendo o sottraendo un numero casuale.

Esistono anche altre varianti di codifica, tra cui: la codifica permutazione, adottata nei problemi in cui l'ordine degli elementi è rilevante, e la codifica basata su alberi, adottata nella programmazione genetica per rappresentare espressioni matematiche o strutture gerarchiche.

3.2.3 Funzione di *fitness*

La funzione di fitness è l'equivalente della funzione obiettivo nei tradizionali metodi di ottimizzazione. Essa misura la bontà di una soluzione, sintetizzandone la sua capacità di risolvere un determinato problema. Inoltre, permette di confrontare gli individui tra loro e guida il processo di selezione. In termini evolutivi, rappresenta

il grado di adattamento di un individuo all'ambiente.

Spetta al programmatore definire una funzione di fitness adeguata e coerente con il problema considerato.

3.2.4 Metodi di selezione

Il processo di selezione rappresenta un aspetto cruciale nei GA, in quanto si occupa di scegliere gli individui più adatti della popolazione, per la creazione della prossima generazione. Un'eccessiva pressione selettiva potrebbe far sì che l'algoritmo converga ad un ottimo locale prematuramente, favorendo esclusivamente pochi individui con una fitness elevata e riducendo la diversità genetica; d'altra parte, una selezione troppo debole potrebbe rallentare eccessivamente il processo di selezione, poiché individui con bassa fitness continuerebbero a essere mantenuti nella popolazione, ritardando la scoperta di soluzioni migliori. Dunque, per ottenere un buon equilibrio, è importante scegliere una strategia che bilanci l'esplorazione di nuove soluzioni con lo sfruttamento delle migliori già individuate.

Gli operatori di selezione possono operare in 2 modi: rimpiazzare l'intera popolazione ad ogni generazione (GA generazionali), o solamente una parte di essa (GA *steady-state*). Inoltre, la selezione può avvenire con rimpiazzamento (*with replacement*) o senza rimpiazzamento (*without replacement*). Nel caso del rimpiazzamento, se un cromosoma viene selezionato per partecipare alla generazione della nuova popolazione, dopo l'accoppiamento, viene reinserito nella popolazione e può essere scelto nuovamente come genitore nella stessa generazione.

Esistono diversi metodi di selezione, tutti volti a favorire la trasmissione dei geni degli individui con fitness migliore. I principali sono:

- Selezione proporzionale o roulette (*fitness-proportionate selection*): ogni soluzione ha una probabilità di essere selezionata proporzionale al suo valore di fitness, ossia pari a:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^n f_j}$$

dove f_i rappresenta la fitness per l'individuo i -esimo.

Si pensi ad una ruota suddivisa in fette, di grandezza proporzionale alla probabilità associata alle soluzioni. Essa viene fatta girare k volte e vengono estratte le soluzioni corrispondenti.

- Selezione basata sul rango (*rank-based selection*): le soluzioni vengono ordinate in base alla loro fitness, dalla peggiore alla migliore. A ciascuna soluzione viene assegnato un rango: la peggiore ha rango 1 e la migliore ha rango N (dove N è la dimensione della popolazione). Le probabilità di selezione vengono quindi calcolate sulla base dei ranghi. Questa tecnica evita che i cromosomi con fitness molto elevate prendano il sopravvento troppo rapidamente, consentendo a soluzioni meno ottimali ma promettenti di avere maggiori possibilità di evolversi.
- Selezione a torneo (*tournament selection*): per ogni soluzione da selezionare, viene estratto un numero prefissato di soluzioni dalla popolazione e viene scelta quella con fitness più elevata. Spesso i tornei vengono svolti tra due individui (*binary tournament*), ma si può generalizzare il metodo ad un gruppo di dimensione arbitraria. È anche possibile introdurre una probabilità p per selezionare un individuo non ottimale, in modo da aumentare la diversità genetica.

Questo metodo presenta diversi vantaggi: è facile da implementare, non richiede l'ordinamento dell'intera popolazione e permette di controllare la pressione evolutiva modificando la dimensione dei tornei. Infatti, più grande è il gruppo, minore è la probabilità che vengano selezionate soluzioni con fitness inferiore.

In aggiunta a questi metodi di selezione, può essere impiegato l'Elitismo (*Elitism*), che consiste nell'imporre al GA di conservare un numero prefissato di individui con la fitness più alta di ogni generazione, senza modificarli. In questo modo, si preservano le migliori soluzioni, evitando che vadano perse nei processi di crossover e mutazione.

3.2.5 Operatori genetici

All'interno dei GA vengono utilizzati principalmente due tipi di operatori genetici: il *crossover* e la mutazione.

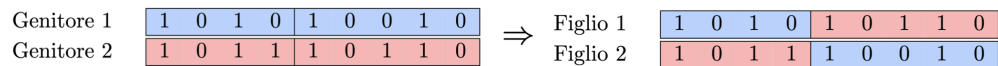
- *Crossover* (o ricombinazione): ricalcando la metafora della riproduzione sessuale, combina i patrimoni genetici di due individui della popolazione (genitori), per generare nuovi individui (figli) - generalmente due - che ereditano una combinazione dei geni di entrambi, in base alle regole del tipo di crossover applicato.

I genitori vengono accoppiati a due a due in base ad una probabilità p_{cross} , chiamata "tasso di crossover", che rappresenta un parametro dell'algoritmo. La probabilità di crossover dipende dal tipo di crossover utilizzato, ma in generale molti ricercatori concordano sul fatto che il valore p_{cross} dovrebbe essere compreso tra 0.6 e 1.0 [45].

Vi sono varie tipologie di crossover [45], tra cui:

- *One-point Crossover*: viene scelto casualmente un punto di taglio lungo il cromosoma dei due genitori, detto punto di crossover, e le porzioni a destra di tale punto vengono scambiate tra loro, generando così due nuovi discendenti (Figura 3.3).

Figura 3.3: *One-point Crossover*



- *K-point Crossover*: vengono selezionati casualmente K punti di taglio lungo la stringa di codifica. La stringa viene così suddivisa in $K + 1$ segmenti e i segmenti alternati vengono scambiati tra i due genitori (Figura 3.4).

Figura 3.4: *K-point Crossover*



- *Uniform Crossover*: a differenza dei crossover a un punto e a K punti, in cui il materiale genetico viene ereditato in blocchi, il crossover uniforme sceglie i geni uno ad uno in modo indipendente da entrambi i genitori.

Per ciascun gene di entrambi i figli, viene generato un numero casuale u compreso tra 0 e 1. Se $u < 0.5$, il figlio eredita il gene dal primo genitore; in caso contrario, dal secondo genitore.

- *Discrete Crossover*: analogo al crossover uniforme, l'unica differenza è che genera un solo figlio invece di due.

Supponendo che ogni operazione generi due figli, l'operatore di crossover viene generalmente applicato $n/2$ volte, così da ottenere n discendenti. Nel caso in cui esso non venga impiegato, allora i discendenti coincideranno con i genitori (a meno che non intervenga la mutazione).

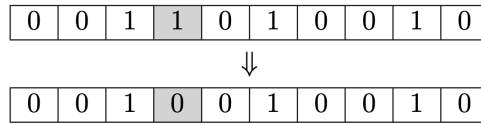
- **Mutazione**: introduce cambiamenti nel patrimonio genetico, modificando uno o più geni del cromosoma per generare nuove soluzioni. Lo scopo principale di questo operatore è esplorare nuove regioni dello spazio delle soluzioni e far sì che l'algoritmo non converga prematuramente verso ottimi locali, compromettendo l'ottimalità della soluzione finale. Bisogna prestare attenzione a non farne un uso eccessivo, in quanto la mutazione potrebbe rendere instabile l'algoritmo e ostacolare la convergenza. Per questo motivo, la mutazione generalmente viene applicata con bassa probabilità, p_{mut} .

Il tasso di mutazione può rimanere costante nel corso delle generazioni oppure diminuire progressivamente. In questo modo, nelle prime fasi dell'algoritmo, la mutazione incoraggia l'esplorazione di nuove aree dello spazio di ricerca, mentre nelle generazioni successive il focus si sposta sull'ottimizzazione della soluzione migliore individuata. Fogarty (1989) [25], ha dimostrato che un tasso di mutazione che diminuisce esponenzialmente nel tempo garantisce performance superiori, confermando l'efficacia di una strategia di mutazione adattiva.

Anche in questo caso esistono vari tipi di operatori di mutazione [34], tra cui:

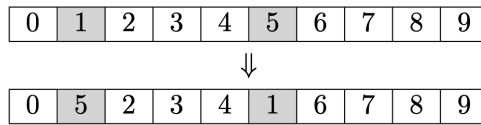
- *Bit flip mutation*: si selezionano uno o più bit casuali e si invertono (0 diventa 1 e 1 diventa 0). Una sua estensione, usata per la rappresentazione intera, è il *random resetting*, in cui un gene scelto casualmente assume un nuovo valore appartenente all'insieme di quelli ammissibili (Figura 3.5).

Figura 3.5: *Bit flip mutation*



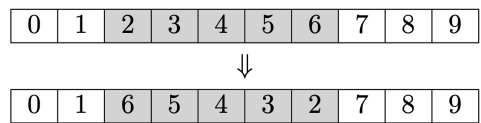
- *Swap mutation*: scambia la posizione di due geni all'interno dello stesso cromosoma (Figura 3.6).

Figura 3.6: *Swap mutation*



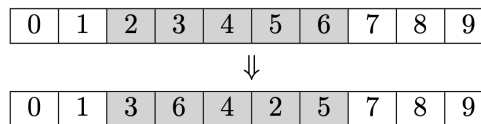
- *Inversion mutation*: si seleziona un un segmento casuale del cromosoma e si inverte l'ordine dei geni al suo interno (Figura 3.7).

Figura 3.7: *Inversion mutation*



- *Scramble mutation*: si seleziona un un segmento casuale del cromosoma e si rimescolano casualmente i geni al suo interno (Figura 3.8).

Figura 3.8: *Scramble mutation*



3.2.6 Teorema degli schemi

Il Teorema degli schemi o Teorema fondamentale degli algoritmi genetici, introdotto da J. Holland (1975) [27] e poi approfondito da D. Goldberg (1989) [26], è un principio fondamentale nello studio degli algoritmi genetici. Questo teorema fornisce una base teorica per la comprensione del loro funzionamento e spiega come certi schemi (sottostrutture comuni tra gli individui della popolazione) vengano selezionati, mantenuti e propagati nel corso delle generazioni.

Definizione di schema e proprietà

Definizione 3. Si consideri un algoritmo genetico in cui gli individui sono rappresentati mediante l'alfabeto $V = \{0, 1\}$. Uno schema è una stringa, della stessa lunghezza degli individui, i cui possibili elementi sono 0, 1 e *, dove l'asterisco è un carattere jolly, che può assumere valore 0 o 1.

Ad esempio, lo schema $H = 111*$, rappresenta la stringa 1111 e 1110; lo schema $H = 1*0**1*$ rappresenta invece un insieme di 16 stringhe distinte, dal momento che i quattro simboli * possono combinarsi in $2^4 = 16$ modi diversi.

Definizione 4. Si definisce ordine di uno schema H , indicato con $o(H)$, il numero di posizioni fissate presenti, ossia il numero di 0 e di 1.

Ad esempio,

$$o(01*0**) = 3$$

$$o(1****) = 1$$

Definizione 5. Si definisce lunghezza di definizione uno schema H , indicata con $\delta(H)$, la distanza tra la prima e l'ultima posizione fissata dello schema.

Ad esempio,

$$\delta(h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6) = \delta(01*0**) = 4 - 1 = 3$$

$$\delta(h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6) = \delta(1****) = 1 - 1 = 0$$

Gli schemi rappresentano uno strumento essenziale per l'analisi delle informazioni presenti in una popolazione di stringhe, poiché consentono di individuare strutture ricorrenti e caratteristiche comuni tra gli individui. Inoltre, offrono un metodo efficace per esplorare un numero di soluzioni potenziali significativamente superiore rispetto al numero di stringhe effettivamente presenti della popolazione. Per un alfabeto binario, una generica stringa di lunghezza l è istanza ³ di 2^l schemi diversi (ad esempio, se $l = 2$ e la stringa è 10, allora si possono avere 4 schemi diversi: **, 1*, 0*, 1*). Ciò implica che una popolazione di N stringhe contiene un numero di schemi compreso tra 2^l (nel caso in cui tutte le stringhe

³Un cromosoma è un'istanza di uno schema se la sua configurazione soddisfa le posizioni fissate nello schema stesso.

siano uguali - massima omogeneità) e $N2^l$ (nel caso in cui differiscano tutte tra loro - massima diversità). Di conseguenza, in ogni generazione, mentre l'algoritmo genetico valuta esplicitamente l'idoneità delle N stringhe della popolazione, in realtà sta esaminando implicitamente l'idoneità di un numero di schemi molto più elevato. Tale caratteristica è chiamata parallelismo implicito.

Effetto degli operatori genetici sul numero atteso di schemi

Una volta definite le proprietà di uno schema, è possibile analizzare gli effetti della selezione, del crossover e della mutazione sul numero atteso di schemi nella popolazione. Gli operatori di selezione non generano nuovi schemi, ma modificano la frequenza con cui quelli esistenti compaiono nella popolazione. Al contrario, gli operatori di ricombinazione e mutazione possono creare nuove istanze di schemi e farne estinguere altre.

Sia H uno schema con almeno un'istanza presente nella popolazione al tempo t (ovvero nella generazione t -esima). Si indichi con $m = m(H, t)$ il numero di istanze di H nella popolazione a quel tempo.

Si assume che ogni cromosoma abbia una probabilità di essere selezionato per la riproduzione proporzionale alla sua fitness, ovvero:

$$p_{sel,i} = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^n f_j}$$

Dunque, la probabilità che una stringa appartenente allo schema H venga selezionata è data da:

$$\sum_{i=1}^m p_{sel,i} = \frac{\sum_{i=1}^m f_i}{\sum_{j=1}^n f_j}$$

Dal momento che l'operatore di selezione viene applicato N volte, il numero atteso di istanze dello schema H nella generazione successiva ($t + 1$) è:

$$m(H, t + 1) = N \sum_{i=1}^m p_{sel,i} = n \frac{\sum_{i=1}^m f_i}{\sum_{j=1}^n f_j} = \frac{\sum_{i=1}^m f_i}{\bar{f}}$$

dove \bar{f} è la fitness media della popolazione al tempo t .

Moltiplicando entrambi i membri per $m(H, t)$ si ottiene:

$$m(H, t + 1) = \frac{m(H, t)}{m(H, t)} \frac{\sum_{i=1}^m f_i}{\bar{f}} = m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \quad (3.1)$$

dove $f(H)$ è la fitness media degli individui rappresentati dello schema H .

L'equazione 3.1 rappresenta la crescita riproduttiva dello schema nel tempo. Essa indica che, nella generazione successiva, il numero di istanze dello schema H aumenta se la loro fitness media è superiore alla quella della popolazione; al contrario, diminuisce se è inferiore.

È interessante notare che questo comportamento atteso si verifica in parallelo per ogni schema H contenuto in una particolare popolazione.

Si vuole determinare la velocità con cui varia il numero di rappresentanti dello schema nel tempo. A tal fine, si assuma che un particolare schema H abbia una fitness superiore alla media della popolazione di una quantità $c\bar{f}$, con $c > 0$ una costante reale. Sotto quest'assunzione, la formula precedente diventa:

$$m(H, t + 1) = m(H, t) \frac{\bar{f}(1 + c)}{\bar{f}} = m(H, t)(1 + c)$$

Partendo da $t = 0$ e assumendo un valore stazionario di c , si ottiene l'equazione:

$$m(H, t) = m(H, 0)(1 + c)^t$$

Si tratta di una progressione geometrica, il che significa che il numero di rappresentanti dello schema aumenta o diminuisce in modo esponenziale nel corso delle generazioni dell'algoritmo genetico, a seconda che la fitness media dello schema sia maggiore o minore di quella della popolazione.

Ora si consideri l'effetto del crossover sull'evoluzione degli schemi. Si assuma un crossover a un punto con distribuzione uniforme del punto di taglio.

Poiché il punto di crossover viene scelto casualmente tra $l - 1$ posizioni possibili, e dato che la distruzione dello schema avviene se il taglio cade in uno dei $\delta(H)$ punti interni allo schema, la probabilità teorica di distruzione è:

$$p_d(H) = \frac{\delta(H)}{l - 1}$$

Tuttavia, questa stima assume che ogni crossover che avviene all'interno dello schema lo distrugga sempre. In realtà, in alcuni casi, il materiale genetico potrebbe ricombinarsi senza alterare la struttura dello schema. Pertanto, si perviene alla seguente disuguaglianza:

$$p_d(H) \leq \frac{\delta(H)}{l-1}$$

Se il crossover viene applicato in modo casuale solo ad alcuni cromosomi, con una probabilità p_c , allora la probabilità di distruzione di uno schema diventa:

$$p_d(H) \leq p_c \frac{\delta(H)}{l-1}$$

e quindi la probabilità di sopravvivenza al crossover risulta:

$$p_s(H) \geq 1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1}$$

Questa disuguaglianza mostra che gli schemi con lunghezza di definizione ridotta hanno elevate probabilità di sopravvivere al crossover.

Incorporando l'effetto combinato di selezione e crossover, l'equazione 3.1 diventa:

$$m(H, t+1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1} \right) \quad (3.2)$$

Si passa ora alla considerazione dell'effetto dell'operatore di mutazione, il quale modifica casualmente un gene del cromosoma con una probabilità p_m . Affinché uno schema H sopravviva alla mutazione, tutte le sue posizioni fisse devono rimanere invariate. Poiché la probabilità che un singolo allele sopravviva è $(1 - p_m)$, e dato che le mutazioni avvengono in modo statisticamente indipendente, la probabilità che tutte le $o(H)$ posizioni fisse dello schema rimangano inalterate è data dal prodotto delle singole probabilità di sopravvivenza:

$$p_s(H) = (1 - p_m)^{o(H)}$$

Per valori piccoli di p_m ($p_m \ll 1$), la probabilità di sopravvivenza può essere

approssimata dall'espressione:

$$p_s(H) \approx 1 - o(H) p_m$$

Dunque, considerando gli effetti combinati di combinati di selezione, crossover e mutazione, l'equazione finale della crescita dello schema risulta:

$$\begin{aligned} m(H, t+1) &\geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1} \right) (1 - o(H)p_m) \\ &= m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \left(1 - o(H)p_m - p_c \frac{\delta(H)}{l-1} + p_c \frac{\delta(H)}{l-1} o(H)p_m \right) \end{aligned}$$

Il termine $p_c \frac{\delta(H)}{l-1} o(H)p_m$ può essere trascurato essendo sufficientemente piccolo, per cui la formula diventa:

$$m(H, t+1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1} - o(H)p_m \right) \quad (3.3)$$

Quest'equazione, nota come Teorema degli schemi, mostra che gli schemi brevi (con lunghezza di definizione ridotta), di basso ordine e con fitness superiore alla media crescono esponenzialmente nelle generazioni successive.

4 IL MODELLO

Nel seguente capitolo verrà presentato un modello per la costruzione di un'*asset allocation* dinamica per un generico aderente ad un fondo pensione a contribuzione definita multi-comparto, basato sul sistema finanziario della capitalizzazione.

Nei fondi pensione, al momento della sottoscrizione, l'aderente deve scegliere il comparto d'investimento più adatto alle proprie esigenze previdenziali e al proprio profilo di rischio. Tuttavia, questa scelta non dovrebbe essere statica. Con il passare del tempo, potrebbe infatti risultare opportuno riallocare il capitale per ottimizzare la strategia d'investimento, adattandola all'evoluzione delle condizioni individuali e di mercato.

Il modello proposto mira ad individuare annualmente il comparto ottimale tra quelli disponibili, sviluppando una strategia di investimento personalizzata, che tenga conto delle esigenze specifiche dell'individuo e segua un approccio integrato basato sui principi del *Goal-Based Investing* e del *Life-Cycle Investing*.

In linea con i principi del *Goal-Based Investing*, l'efficacia del piano di investimento sarà valutata in termini di probabilità di successo, definita come la probabilità che, investendo i flussi di cassa versati dall'aderente, si riesca a raggiungere l'obiettivo pensionistico desiderato.

4.1 Programmazione dinamica e algoritmi genetici: due approcci a confronto

Per implementare una strategia d'investimento dinamica che massimizzi la probabilità di successo, è necessario adottare un approccio metodologico efficace per la selezione dei comparti nel tempo. Una possibile soluzione considerata in letteratura è quella proposta da Das et al. (2019) [21], che prevede l'utilizzo

di un algoritmo di programmazione dinamica di tipo *backward*. Senza entrare troppo nel dettaglio, poiché ciò esulerebbe dagli obiettivi di questa tesi, di seguito formuliamo una breve descrizione di questo metodo.

Basandosi sulle equazioni di Bellman, si costruisce la strategia d'investimento ottimale in modo iterativo e retrospettivo, procedendo a ritroso nel tempo per determinare le decisioni più vantaggiose in ogni istante.

La programmazione dinamica affronta il problema decisionale suddividendolo in sottoproblemi più semplici, che vengono risolti in modo ricorsivo. Il processo inizia con la definizione di una funzione valore $V(W(t))$, che rappresenta la probabilità che un investitore con ricchezza attuale $W(t)$ riesca a raggiungere o superare il proprio obiettivo finanziario G entro l'orizzonte temporale T .

Per la risoluzione numerica, la variabile continua $W(t)$ viene discretizzata in una griglia di valori W_i , dove l'indice i rappresenta un nodo discreto della ricchezza e assume valori nell'insieme $i \in \{0, 1, \dots, i_{\max}\}$. Il nodo W_0 corrisponde alla ricchezza minima possibile W_{\min} , mentre il nodo $W_{i_{\max}}$ corrisponde alla ricchezza massima W_{\max} .

La condizione al tempo finale T è espressa come:

$$V(W_i(T)) = \begin{cases} 0, & \text{se } W_i(T) < G \\ 1, & \text{se } W_i(T) \geq G \end{cases}$$

Ad ogni istante t , la probabilità di raggiungere G dipende dalla strategia adottata nel periodo successivo. L'equazione di Bellman consente di calcolare iterativamente il valore ottimale in ogni stato:

$$V(W_i(t)) = \max_{\mu \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]} \sum_{j=0}^{i_{\max}} V(W_j(t+1)) p(W_j(t+1) | W_i(t), \mu)$$

dove $p(W_j(t+1) | W_i(t), \mu)$ rappresenta la probabilità di transizione tra stati di ricchezza successivi, data la ricchezza attuale e il rendimento atteso μ del portafoglio. Il valore μ che massimizza $V(W_i(t))$ determina l'allocazione ottimale in quel periodo.

Sebbene la programmazione dinamica sia una tecnica solida per la risoluzione di problemi decisionali sequenziali, essa presenta alcune limitazioni. La principale

è la necessità di definire esplicitamente le probabilità di transizione tra stati, imponendo una struttura rigida, che può risultare problematica nel contesto dei mercati finanziari, in cui le dinamiche sono spesso imprevedibili. Inoltre, il metodo è colpito dalla cosiddetta "maledizione della dimensionalità": all'aumentare del numero di stati e delle possibili decisioni di portafoglio, il costo computazionale cresce rapidamente, rendendone proibitiva l'applicazione a problemi di elevata complessità.

Per superare queste difficoltà, si preferisce seguire l'approccio proposto da Pomante et al. (2023) [41]. Questo metodo sfrutta simulazioni di scenari futuri relativi ai rendimenti dei comparti e definisce la probabilità di successo in base al rapporto tra i casi favorevoli - ossia quelli in cui viene raggiunto l'obiettivo target - e i casi possibili. In questo modo, si evita di dover definire le probabilità di transizione tra stati.

Inoltre, il metodo impiega un algoritmo genetico (GA) per individuare una strategia di investimento efficiente. I GA sono particolarmente adatti nella ricerca di soluzioni ottimali in spazi di elevata complessità e offrono numerosi vantaggi rispetto alla programmazione dinamica. A differenza di quest'ultima, non richiedono assunzioni rigide sul problema e sono liberi di esplorare lo spazio delle soluzioni in qualsiasi direzione, individuando anche soluzioni che a prima vista potrebbero non sembrare intuitive. Invece di analizzare in modo esaustivo l'intero spazio degli stati, adottano un approccio euristico e adattivo, concentrandosi su un insieme di soluzioni candidate che vengono progressivamente migliorate tramite selezione, mutazione e crossover. In questo modo, la ricerca risulta più flessibile e può, in molti casi, evitare di rimanere bloccata in soluzioni subottimali. Infine, i GA possono essere parallelizzati con relativa facilità, permettendo di ridurre i tempi di calcolo rispetto agli approcci ricorsivi tipici della programmazione dinamica.

Partendo dai promettenti risultati di Pomante et al. (2023) [41], in questa tesi si propongono due nuovi operatori genetici, uno di incrocio e uno di mutazione, appositamente sviluppati per generare soluzioni sempre ammissibili in ogni applicazione. Così facendo, il GA sviluppato migliora la capacità di ricerca di soluzioni ottimali rispetto alla procedura di riferimento, in cui l'ammissibilità doveva essere verificata volta per volta e, in caso negativo, la soluzione candidata

veniva eliminata, rendendo la procedura computazionalmente inefficiente.

4.2 Descrizione del modello

Si suppone che per il generico aderente siano noti: l'*holding period*, che si estende dall'inizio del versamento dei contributi fino all'epoca di pensionamento; l'importo dei contributi versati periodicamente; la retribuzione lorda annua al momento dell'adesione; e il tasso di sostituzione target.

4.2.1 Composizione dei comparti e dei profili di investimento

La composizione dei comparti di investimento è stata definita prendendo come riferimento quella adottata dal fondo pensione complementare Pegaso [40].

Si considera, quindi, un fondo pensione articolato in tre comparti, ciascuno caratterizzato da una specifica combinazione di rischio e rendimento:

- Comparto azionario: 70% investito in strumenti finanziari di natura azionaria e 30% in strumenti di natura obbligazionaria. Nell'ambito del comparto è previsto anche l'investimento in *private assets*, con finalità di diversificazione, entro il limite massimo del 20% previsto dal DM 166/2014 per i FIA (Fondi di Investimento Alternativo).
- Comparto bilanciato: 70% investito in strumenti finanziari di natura obbligazionaria e 30% in strumenti finanziari di natura azionaria. Anche in questo caso, è previsto un investimento in *private assets*, fino a un massimo del 12%.
- Comparto garantito: 95% investito in titoli obbligazionari (sia governativi che *corporate*) e 5% in titoli azionari.

Il fondo offre agli aderenti la possibilità di destinare i propri versamenti contributivi a uno dei seguenti profili di investimento, ottenuti tramite una combinazione predefinita di uno o due dei comparti di investimento sopra indicati. I profili disponibili sono:

1. Profilo Crescita: 100% azionario;

2. Profilo Dinamico: 50% azionario, 50% bilanciato;
3. Profilo Bilanciato: 100% bilanciato;
4. Profilo Prudente: 60% bilanciato, 40% garantito;
5. Profilo Garantito: 100% garantito.

Il modello richiede, come fase preliminare, l'identificazione delle *asset class* che compongono ciascun comparto. Dato un insieme di *asset class* disponibili, si è deciso di strutturare ciascun comparto come indicato nella Tabella 4.1.

Tabella 4.1: Allocazione degli asset per comparto di investimento (valori in %)

<i>Asset class</i>	Comparto azionario	Comparto bilanciato	Comparto garantito
Az. EMU	20	8	2
Az. mondo ex-EMU	20	8	2
Az. emergenti	20	8	2
Private equity	10	6	0
Obbl. EMU IG	5	9	11
Obbl. EMU HY	5	9	11
Obbl. mondo ex-EMU IG	5	9	11
Obbl. mondo ex-EMU HY	5	9	11
Obbl. gov. EMU lungo term.	5	17	25
Obbl. gov. mondo ex-EMU	5	17	25

Di conseguenza, i profili di investimento hanno la composizione rappresentata nella Tabella 4.2.

Tabella 4.2: Allocazione degli asset per profilo di investimento (valori in %)

<i>Asset class</i>	Crescita	Dinamico	Bilanciato	Prudente	Garantito
Az. EMU	20	14	8	5,6	2
Az. mondo ex-EMU	20	214	8	5,6	2
Az. emergenti	20	14	8	5,6	2
Private equity	10	8	6	3,6	0
Obbl. EMU IG	5	7	9	9,8	11
Obbl. EMU HY	5	7	9	9,8	11
Obbl. mondo ex-EMU IG	5	7	9	9,8	11
Obbl. mondo ex-EMU HY	5	7	9	9,8	11
Obbl. gov. EMU lungo term.	5	11	17	20,2	25
Obbl. gov. mondo ex-EMU	5	11	17	20,2	25

4.2.2 Simulazione degli scenari

Per misurare la bontà delle soluzioni di investimento, si è scelto di adottare uno *scenario-based approach*. Verranno simulati 1.000 scenari relativi ai rendimenti futuri delle *asset class* selezionate per l'intero periodo di investimento. In questo modo, sarà possibile ottenere i rendimenti simulati di tutti i profili di investimento e determinare in quanti di questi scenari ogni soluzione riuscirà a garantire il raggiungimento dell'obiettivo prefissato.

Il processo di simulazione è stato realizzato mediante l'impiego di un *Economic Scenario Generator* proprietario, sviluppato internamente all'azienda ospitante durante il tirocinio. Poiché lo strumento non è di pubblico dominio, il suo funzionamento non verrà descritto in dettaglio; per ulteriori approfondimenti si rimanda alla tesi "*L'Asset Liability Management per i fondi pensione*" [33], svolta presso l'azienda in questione.

In sintesi, per ciascuna delle *asset class* considerate sono state selezionate variabili rappresentative, per le quali è stato scelto un adeguato modello di proiezione tra quelli descritti nel capitolo precedente (ad esempio, per l'*asset class* "Azioni EMU" è stato scelto l'*Equity Index EU*, modellato tramite un moto browniano geometrico). La calibrazione dei modelli è stata effettuata a partire dalle serie storiche delle variabili considerate, così da stimare i parametri principali (media, varianza, correlazione). Successivamente, gli scenari sono stati prodotti mediante simulazioni Monte Carlo, supportate da tecniche di gestione della correlazione multivariata (come la decomposizione di Cholesky), in modo da garantire coerenza interna tra le diverse *asset class*.

Nella Tabella 4.3 sono illustrati i rendimenti delle *asset class* proiettati a 3, 10 e 30 anni, insieme alla volatilità, misurata tramite lo *standard error* della distribuzione del rendimento a 10 anni.

Tabella 4.3: Evoluzione futura dei rendimenti delle *asset class*

<i>Asset class</i>	$E(r) - 3 \text{ anni}$	$E(r) - 10 \text{ anni}$	$E(r) - 30 \text{ anni}$	σ
Az. EMU	5,53%	5,37%	5,30%	14,41%
Az. mondo ex-EMU	6,62%	6,44%	6,36%	17,40%
Az. emergenti	4,73%	4,78%	4,83%	15,45%
Private equity	9,10%	8,55%	8,53%	22,04%
Obbl. EMU IG	2,90%	3,33%	3,62%	3,59%
Obbl. EMU HY	4,75%	5,86%	6,32%	6,08%
Obbl. mondo ex-EMU IG	3,07%	3,68%	4,01%	3,63%
Obbl. mondo ex-EMU HY	4,94%	6,03%	6,49%	8,85%
Obbl. gov. EMU lungo term.	1,80%	2,43%	2,73%	6,45%
Obbl. gov. mondo ex-EMU	5,65%	3,80%	3,14%	5,69%

4.2.3 Definizione della funzione obiettivo

Il primo passo nella costruzione di un Algoritmo Genetico consiste nella definizione della funzione obiettivo (cd. funzione di *fitness* nell'ambito dei GA), attraverso la quale sarà poi possibile valutare la bontà delle soluzioni di investimento.

La sua impostazione si basa sull'idea che il generico aderente al fondo pensione persegue due obiettivi:

1. Garantire un'elevata probabilità di raggiungere il tasso di sostituzione target;
2. Ridurre il rischio che, in scenari estremamente avversi, l'*Internal Interest Rate* (IRR) dell'operazione finanziaria di investimento subisca una contrazione significativa, portando a risultati finanziari insoddisfacenti.

L'obiettivo principale è quindi garantire il raggiungimento del tasso di sostituzione target con una prefissata probabilità minima Pr_{Goal}^* . In subordine, se tale obiettivo viene soddisfatto, si cerca di limitare il verificarsi di un IRR basso. La funzione di *fitness* è allora così definita:

$$\max S \text{ con: } \begin{cases} S = Pr_{Goal} & \text{se } Pr_{Goal} < Pr_{Goal}^* \\ S = 2 + IRR_{ES} & \text{se } Pr_{Goal} \geq Pr_{Goal}^* \end{cases}$$

dove:

- $Pr_{Goal} = Pr(TS \geq TS \text{ target})$ è la probabilità di successo, ossia la probabilità

di conseguire almeno il tasso di sostituzione *target*. Per valutarla si osserva in quanti degli scenari simulati ogni soluzione riesce a garantire il raggiungimento dell'obiettivo prefissato;

- Pr_{Goal}^* è la probabilità di successo minima;
- IRR_{ES} è l'IRR medio conseguito nel $\alpha\%$ dei peggiori scenari.

La formula del tasso di sostituzione è la seguente:

$$\begin{aligned} \text{Tasso di sostituzione} &= \frac{\text{Prima rata pensione}}{\text{Ultimo reddito da lavoro}} = \\ &= \frac{\text{Montante contributivo} \times \text{Coefficiente di conversione in rendita}}{\text{Ultimo reddito da lavoro}} \end{aligned}$$

dove:

- Il montante contributivo è il capitale accumulato nel tempo dall'aderente, derivante dai contributi versati e dai rendimenti finanziari generati dagli investimenti, al netto dei costi di gestione, che per semplicità non verranno considerati. Considerato un orizzonte di investimento di T anni, la dinamica del montante contributivo è la seguente:

$$\begin{aligned} M_1 &= C_1(1 + r_1) \\ M_2 &= (M_1 + C_2)(1 + r_2) = C_1(1 + r_1)(1 + r_2) + C_2(1 + r_2) \\ &\vdots \\ M_T &= (M_{T-1} + C_T)(1 + r_T) \end{aligned}$$

La formula generale può essere espressa come:

$$M_T = \sum_{t=1}^T \left[C_t \prod_{j=t}^T (1 + r_j) \right]$$

dove r_j è il rendimento del profilo di investimento selezionato nel periodo j e C_t è il contributo versato al tempo t , considerato come un'aliquota della retribuzione annua lorda in quell'anno.

- Il coefficiente di conversione in rendita è un parametro utilizzato nel sistema previdenziale a contribuzione definita per trasformare il montante contributivo

accumulato in una rendita pensionistica annua. Esso dipende da più variabili:

- Età di pensionamento: maggiore è l'età di pensionamento, più alto sarà il coefficiente, poiché la rendita verrà erogata per un numero inferiore di anni in media;
- Sesso del pensionando: la speranza di vita differisce tra uomini e donne, influenzando il coefficiente;
- Speranza di vita: se la speranza di vita aumenta, i coefficienti di conversione diminuiscono, poiché il montante dev'essere distribuito su un periodo più lungo.

I coefficienti vengono aggiornati periodicamente per riflettere le variazioni della longevità della popolazione e possono differire in base alle regole adottate dalla compagnia assicuratrice che eroga la rendita.

- L'ultimo reddito da lavoro è stato calcolato in modo ricorsivo a partire da quello iniziale, considerato noto, e applicando anno dopo anno il tasso di crescita salariale del periodo. In questo modo, al tempo T si ottiene:

$$S_T = S_0 \prod_{j=1}^{T-1} (1 + g_j)$$

dove S_0 è il salario percepito al momento dell'adesione, S_T è l'ultimo salario percepito e g_j è il tasso di crescita salariale nell'anno j , per $j = 1, \dots, T - 1$. Quest'ultimo può variare nel tempo in base a diversi fattori, tra cui l'andamento dell'economia, le dinamiche del mercato del lavoro, il settore di appartenenza del lavoratore e la progressione di carriera individuale, nonché il verificarsi di eventi straordinari, come crisi economiche o riforme legislative.

4.2.4 Costruzione della dinamica del portafoglio mediante algoritmi genetici

Si procede ora con la definizione di un algoritmo genetico *ad hoc*, progettato per massimizzare la funzione obiettivo precedentemente definita.

Si considera un orizzonte di investimento di ampiezza T . Per ciascun sotto-periodo (anno) si può scegliere uno tra i 5 profili di investimento disponibili, ordinati in

senso decrescente in base alla rischiosità (dal profilo 1, il più rischioso, al profilo 5, il più prudente).

Le soluzioni possono allora essere rappresentate come nella Figura 4.1.

Figura 4.1: Rappresentazione della generica soluzione candidata

I_1	I_2	\dots	I_T
-------	-------	---------	-------

dove $I_1, I_2, \dots, I_T \in [1, 2, 3, 4, 5]$.

Affinché l'algoritmo rispetti il meccanismo *Life-Cycle* e garantisca una progressiva riduzione della rischiosità con l'avanzare dell'età dell'aderente, dev'essere verificata la disuguaglianza:

$$I_1 \leq I_2 \leq \dots \leq I_T \quad (\text{condizione di monotonia non-decrescente})$$

Essa assicura che, una volta allocati gli investimenti in un profilo con un determinato livello di rischio, non sia possibile passare ad un profilo più rischioso nelle fasi successive.

Il processo inizia con la generazione di una popolazione iniziale composta da n soluzioni candidate. Per garantire un'adeguata diversificazione, i geni di ciascuna soluzione vengono estratti in modo casuale con ripetizione da una distribuzione uniforme discreta $U(1, 5)$, dove 5 rappresenta il numero di profili disponibili. Successivamente, per assicurare coerenza con il principio *Life-Cycle*, tali sequenze vengono ordinate in modo non-decrescente. A titolo esemplificativo, la Figura 4.2 illustra una possibile soluzione candidata, considerando un orizzonte di investimento T di 20 anni.

Figura 4.2: Esempio di una possibile soluzione candidata ($T = 20$)

1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

A questo punto, per ogni soluzione della popolazione iniziale si calcola la funzione di *fitness* precedentemente definita e si procede alla selezione delle soluzioni migliori attraverso il metodo della *Binary Tournament Selection*: si estraggono casualmente due individui dalla popolazione e si sceglie quello con la *fitness* più elevata. Il processo viene ripetuto fino ad ottenere un numero n di individui pari

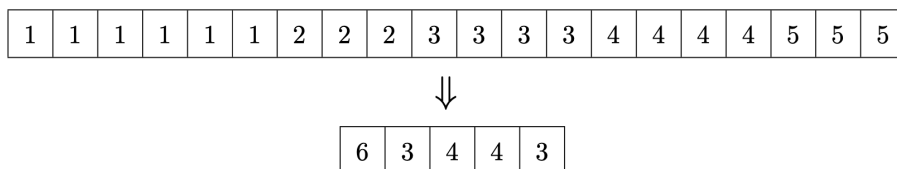
alla dimensione della popolazione iniziale.

Terminata la fase di selezione, si passa all'applicazione degli operatori genetici di crossover e di mutazione.

Il crossover è un operatore locale, il che significa che le nuove soluzioni generate devono mantenere una certa vicinanza a quelle di partenza, evitando cambiamenti troppo drastici. Questo principio è fondamentale per garantire una convergenza progressiva dell'algoritmo e per preservare le informazioni utili apprese nelle generazioni precedenti. Gli operatori presentati da Pomante et al. (2023) [41] si discostano da questa teoria, introducendo aggiustamenti consistenti che alterano eccessivamente la struttura delle soluzioni. Per superare queste limitazioni, si propone l'adozione di operatori più flessibili, capaci di introdurre variazioni graduali e bilanciare meglio l'esplorazione dello spazio delle soluzioni. Questi nuovi operatori non solo favoriscono un'ottimizzazione più efficace e coerente con il principio di ricerca locale, ma garantiscono anche la generazione diretta di soluzioni ammissibili, evitando alterazioni eccessive della struttura originale.

A tale scopo, si è introdotta una nuova codifica delle soluzioni, più compatta rispetto alla precedente. In questa rappresentazione, il numero di geni non corrisponde più all'ampiezza dell'orizzonte di investimento, né ciascun gene indica il profilo scelto ogni anno. Al contrario, il numero di geni è ora pari al numero di profili disponibili e ogni gene indica per quanti anni l'aderente rimane in quel profilo. Si indica con il termine *mask* il cromosoma ottenuto tramite questa ricodifica. Nella Figura 4.3 è rappresentata la ricodifica della soluzione illustrata nella Figura 4.2.

Figura 4.3: Ricodifica delle soluzioni per l'applicazione degli operatori genetici



Per quanto riguarda l'operatore di crossover, si propone una variante del crossover a due punti (descritto in 3.2.5), opportunamente adattato al contesto in esame. La procedura si articola nei seguenti passaggi:

- Si estraggono casualmente due soluzioni dall'insieme delle n soluzioni selezionate ($Mask1$ e $Mask2$);
- Si determinano due punti di taglio (punti di crossover), CP_1 e CP_2 , all'interno dei cromosomi. Essi sono selezionati casualmente secondo una distribuzione uniforme discreta:

$$CP_1, CP_2 \sim U(1, 5)$$

in modo che sia rispettato il vincolo:

$$1 \leq CP_1 < CP_2 \leq 5$$

- Per la generazione dei due figli, il segmento compreso tra CP_1 e CP_2 viene scambiato tra $Mask1$ e $Mask2$, mentre le porzioni antecedenti a CP_1 e successive a CP_2 vengono rimodulate in maniera proporzionale, in modo che la somma degli anni di permanenza nei profili continui ad essere pari all'ampiezza dell'orizzonte di investimento T .

In Figura 4.4 si riporta un esempio di applicazione del crossover proposto.

Figura 4.4: Esempio di applicazione dell'operatore di crossover

	a	b					
$Mask\ 1$	7	3	10	10	12	8	5
$Mask\ 2$	8	8	10	4	15	5	5
	a'	b'	↓				
$Figlio\ 1$	11	5	10	4	12	8	5

$CP_1 = 3, \quad CP_2 = 4$

Ad esempio, per determinare il primo allele del figlio, si segue la logica:

$$a : (a + b) = a'' : (a' + b'), \quad \text{quindi} \quad a'' = \frac{a \times (a' + b')}{a + b}$$

Di conseguenza risulta:

$$\text{round} \left(\frac{7 \times (8 + 8)}{7 + 3} \right) = 11$$

$$\text{round} \left(\frac{3 \times (8 + 8)}{7 + 3} \right) = 5$$

$$\text{round} \left(\frac{12 \times (15 + 5 + 5)}{12 + 8 + 5} \right) = 12$$

Per quanto concerne la mutazione:

- Si fissa una probabilità di mutazione (p_{mut});
- Per ogni soluzione della popolazione corrente, si genera un numero casuale u da una distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, 1)$.
- Se $u \leq p_{mut}$, allora viene eseguita la mutazione della soluzione in esame; altrimenti si passa alla successiva.

Nel caso in cui si proceda con la mutazione, si seleziona casualmente un gene all'interno del cromosoma, estraendo un numero da una distribuzione uniforme discreta $U(1, 5)$. A quel punto, l'operatore di mutazione riduce di 1 il valore del gene selezionato e aumenta di 1 quello del gene precedente o successivo, scelto anch'esso in modo casuale.

Se il gene selezionato è il primo, la modifica potrà agire solo sul gene successivo; viceversa, se viene selezionato l'ultimo gene, la modifica potrà riguardare solo il gene precedente.

Un esempio di applicazione della mutazione è mostrato nella Figura 4.5. A partire dalla soluzione iniziale, viene selezionato casualmente il secondo gene e il suo valore viene ridotto di 1, mentre quello del gene precedente aumenta di conseguenza, dando origine alla nuova soluzione figlia.

Figura 4.5: Esempio di applicazione dell'operatore di mutazione

14	9	12	5	2
↓				
15	8	12	5	2

Si noti che anche in questo caso la somma degli anni di permanenza nei vari profili è pari all'ampiezza dell'orizzonte di investimento.

Una volta generati i figli mediante l'applicazione degli operatori genetici, si valuta la loro *fitness*. Successivamente, i figli ottenuti vengono uniti alla popolazione iniziale. Gli individui vengono quindi ordinati in base al valore della *fitness* e si selezionano i migliori n , che costituiranno la nuova popolazione. Il processo si

ripete in modo iterativo a partire dalla popolazione appena formata e si arresta dopo 200 generazioni.

I parametri utilizzati nell'algoritmo genetico sono riportati nella Tabella 4.4.

Tabella 4.4: Parametri dell'algoritmo genetico

Dimensione della popolazione	100
Criterio di interruzione	Arresto dopo 200 generazioni
Criterio di selezione	<i>Binary Tournament</i>
Probabilità di crossover	100%
Probabilità di mutazione	20%

4.3 Analisi sperimentale

Quest'analisi sperimentale ha l'obiettivo principale di valutare l'efficienza e l'affidabilità dell'algoritmo genetico sviluppato, mentre l'approfondimento delle dinamiche di investimento e dei risultati previdenziali sarà limitato ad un breve inquadramento.

Dopo aver implementato il modello in MATLAB, sono stati condotti diversi esperimenti variando alcuni parametri chiave relativi al profilo dell'aderente e al piano contributivo. In particolare, l'analisi considera differenti combinazioni di età, livello salariale, contribuzione, tasso di sostituzione target e genere.

Si ipotizza il pensionamento a 67 anni (attuale età di accesso alla pensione di vecchiaia in Italia). I coefficienti di trasformazione in rendita per questa età, reperiti dalla documentazione della compagnia di assicurazione Generali relativa alla convenzione vigente con il fondo Pegaso [42], sono pari a 0,054307 per gli uomini e 0,044432 per le donne. Infine, il tasso di crescita annuo dei salari nominali è stato stimato coerentemente con l'andamento della produttività nominale del lavoro misurata sugli occupati, come riportato nel DEF 2024 [24].

Per ciascun esperimento sono stati valutati i seguenti elementi:

- Evoluzione dei profili lungo l'orizzonte temporale d'investimento;
- Probabilità di conseguire il tasso di sostituzione (TS) target, per valutare la capacità della strategia di investimento ottimale di raggiungere l'obiettivo

previdenziale prefissato;

- Media dei tassi di sostituzione ottenuti, che fornisce un'indicazione del risultato atteso della strategia adottata e del suo eventuale scostamento dal target;
- Deviazione standard dei tassi di sostituzione, che misura la dispersione dei risultati.

I casi sperimentali considerati sono quelli indicati nella Tabella 4.5.

Tabella 4.5: Descrizione degli esperimenti condotti

Esp.	Età	Genere	Contributo iniziale	Salario iniziale	Aliquota contrib.	TS target
1	25	M, F	5.000 €	20.000 €	6%, 8%, 10%	20%
2	25	M, F	5.000 €	30.000 €	6%, 8%, 10%	20%
3	35	M, F	15.000 €	40.000 €	6%, 8%, 10%	15%
4	35	M, F	15.000 €	50.000 €	26%, 8%, 10%	15%

La Tabella 4.6 riporta i risultati ottenuti in quanto a numero di anni trascorsi in ciascun profilo di investimento (Crescita, Dinamico, Bilanciato, Prudente, Garantito) per ogni esperimento condotto, distinguendo tra sesso maschile e femminile. Quest'analisi consente di comprendere la dinamica della strategia ottimale individuata dal modello e il modo in cui essa si adatta alle caratteristiche dell'aderente e ai diversi livelli di contribuzione. Come previsto, il modello prevede una progressiva riduzione del rischio nel tempo, coerente con l'approccio *life-cycle*, spostando gradualmente l'allocazione dagli asset più rischiosi (Crescita, Dinamico) verso quelli più stabili (Bilanciato, Prudente, Garantito).

Si osserva inoltre che livelli di contribuzione più bassi (aliquota contributiva del 6%), determinano una maggiore permanenza nei profili azionari (Crescita, Dinamico), nel tentativo di compensare il minor accumulo con rendimenti più elevati. Al contrario, livelli di contribuzione più alti (aliquota contributiva del 10%), favoriscono una transizione più rapida verso profili prudenti, riducendo progressivamente l'esposizione al rischio negli ultimi anni.

Infine, si nota che, in generale, le donne tendono a restare più a lungo nei profili a maggior rischio (Crescita, Dinamico) rispetto agli uomini, il che potrebbe influenzare la volatilità dei risultati finali. Ciò è dovuto al fatto che i coefficienti di trasformazione del montante in rendita per le donne sono meno favorevoli rispetto

a quelli degli uomini, a causa della loro maggiore speranza di vita. Di conseguenza, le donne devono rimanere più a lungo nei profili di investimento più rischiosi per raggiungere lo stesso obiettivo degli uomini.

Tabella 4.6: Evoluzione dei profili di investimento nel tempo

Esp.	Aliquota contrib.	MASCHI					FEMMINE				
		Cresc.	Din.	Bil.	Prud.	Gar.	Cresc.	Din.	Bil.	Prud.	Gar.
1	6%	22	9	3	8	0	30	10	2	0	0
	8%	3	9	5	16	9	26	6	3	6	1
	10%	6	3	7	13	13	5	4	5	20	8
2	6%	28	3	5	6	0	29	9	4	0	0
	8%	6	3	8	21	4	36	0	0	5	1
	10%	14	2	0	13	13	10	4	3	21	4
3	6%	17	4	4	7	0	21	6	5	0	0
	8%	7	3	0	12	10	18	5	1	8	0
	10%	8	6	3	6	9	8	1	3	10	10
4	6%	21	5	0	3	3	14	11	2	5	0
	8%	0	4	2	3	23	15	4	6	7	0
	10%	5	4	7	8	8	7	2	3	11	9

L'analisi dei risultati sperimentali, riportata nella Tabella 4.7, evidenzia che sono diversi i fattori che influenzano la probabilità di raggiungere il tasso di sostituzione target (TS target), il livello medio dei tassi di sostituzione e la volatilità dei risultati.

- Impatto dell'aliquota contributiva: l'aumento dell'aliquota contributiva ha un effetto diretto sulla probabilità di raggiungere il TS target, sul valore medio dei tassi e sulla loro variabilità. Si osserva ad esempio che, per quanto riguarda la probabilità di successo, per un'aliquota contributiva del 10% la probabilità di successo supera il 90% per gli uomini e l'80% per le donne; mentre per un'aliquota contributiva del 6%, la probabilità di successo massima per gli uomini è del 62% e del 42% per le donne. L'aumento della contribuzione riduce anche la dispersione dei risultati, stabilizzando i rendimenti attesi e garantendo maggiore sicurezza previdenziale.
- Impatto del salario iniziale: un salario iniziale più elevato offre un vantaggio in termini di capitale accumulato, ma non garantisce automaticamente il

raggiungimento del TS target. Ad esempio, un soggetto con 50.000€ di salario e un'aliquota contributiva del 6% (Esperimento 4) ha comunque una probabilità di successo relativamente bassa rispetto a chi contribuisce con una percentuale più elevata. Questo suggerisce che, come è per altro ragionevole, non è il livello salariale in sé, ma piuttosto l'aliquota contributiva a determinare la probabilità di successo previdenziale.

- Impatto del genere: a parità di aliquota contributiva, gli uomini tendono a ottenere probabilità di successo e un TS medi superiori rispetto alle donne. Questa differenza non è influenzata tanto dalle strategie di investimento adottate, ma più all'effetto dei coefficienti di conversione in rendita, che essendo più favorevoli per gli uomini, contribuiscono a rendere il loro obiettivo di tasso di sostituzione relativamente più facile da raggiungere rispetto alle donne.

Tabella 4.7: Risultati esperimenti

Esp.	Aliquota contrib.	MASCHI			FEMMINE		
		Prob. TS target	Media TS	Std TS	Prob. TS target	Media TS	Std TS
1	6%	58%	24%	10%	42%	21%	10%
	8%	80%	26%	8%	65%	25%	11%
	10%	95%	32%	9%	81%	26%	7%
2	6%	54%	23%	10%	37%	20%	9%
	8%	78%	26%	8%	63%	25%	10%
	10%	94%	31%	9%	80%	27%	8%
3	6%	62%	18%	6%	41%	15%	6%
	8%	86%	20%	5%	67%	18%	6%
	10%	97%	24%	6%	85%	20%	5%
4	6%	57%	17%	6%	35%	14%	5%
	8%	80%	18%	3%	62%	18%	6%
	10%	97%	24%	6%	83%	19%	4%

Le tendenze appena emerse sono chiaramente visibili nelle Figure 4.6 e 4.7, che illustrano rispettivamente la probabilità di raggiungere il tasso di sostituzione target e il valore medio dei tassi di sostituzione nei diversi esperimenti.

Figura 4.6: Probabilità di raggiungere il TS target corrispondente alla soluzione ottimale di ogni esperimento

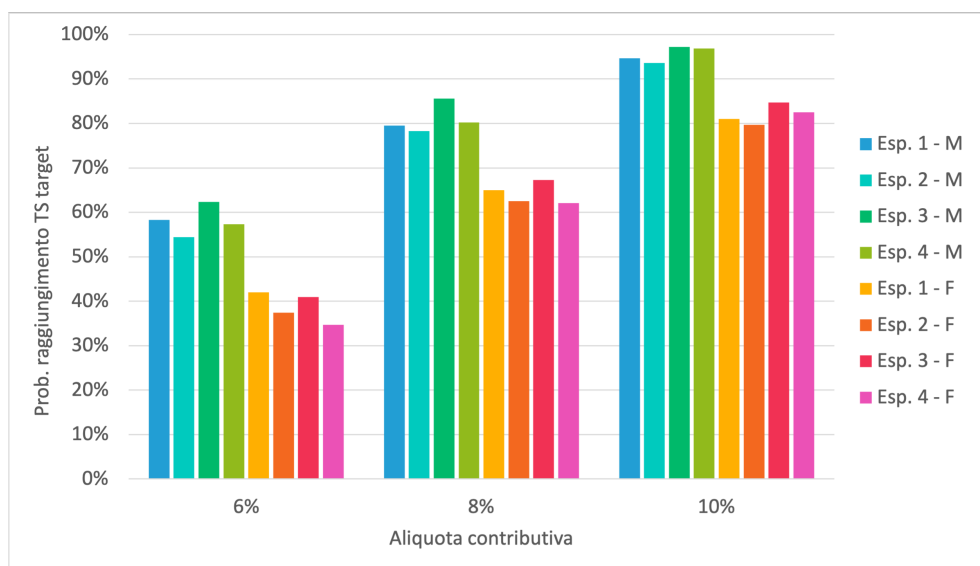
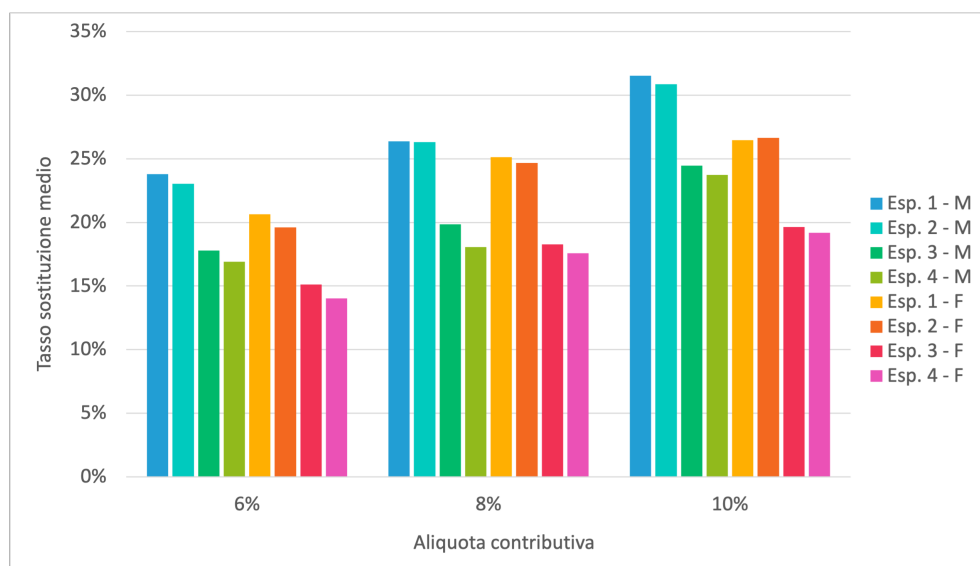


Figura 4.7: Tasso di sostituzione medio degli esperimenti



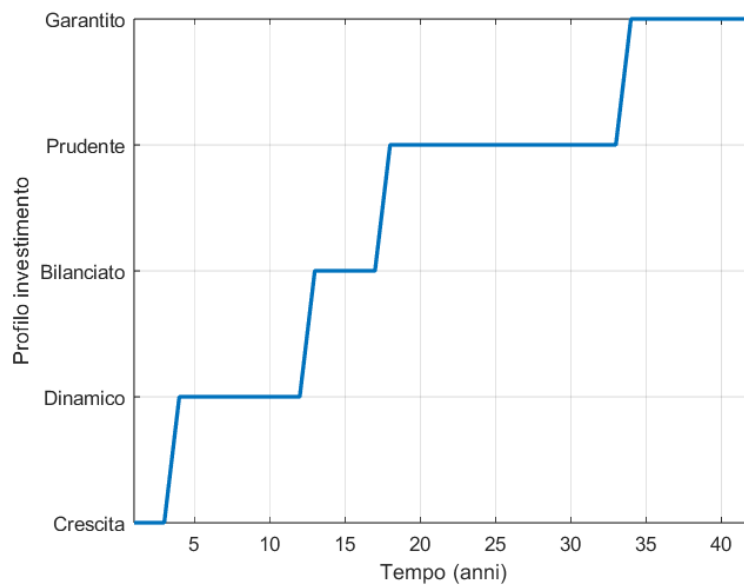
Dal questo grafico si nota che il tasso di sostituzione medio è sempre maggiore del tasso di sostituzione target, ad eccezione degli Esperimenti 2 - F e 4 - F, con aliquota contributiva del 6%, nei quali si colloca leggermente al di sotto.

Dopo aver esaminato i risultati generali, passiamo ora ad approfondire il caso dell'Esperimento 1, relativo ad un aderente di sesso maschile con un'aliquota contributiva dell'8%.

Le Figure 4.8 e 4.9 illustrano la dinamica dell'allocazione ottimale dell'investimento nel corso del periodo di contribuzione.

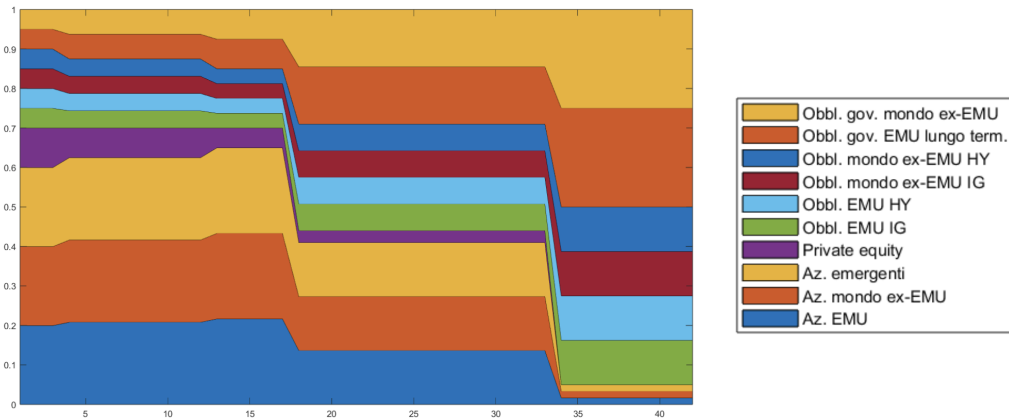
Il primo grafico mostra l'evoluzione dei profili selezionati anno per anno: l'aderente inizia con un'esposizione nel profilo più aggressivo (Crescita), seguito da una progressiva transizione verso profili più bilanciati e prudenti, fino a raggiungere il profilo garantito negli ultimi anni prima del pensionamento.

Figura 4.8: Evoluzione dei profili di investimento nel tempo



Il secondo grafico fornisce una visione complementare della dinamica dell'investimento in termini di *asset allocation*. Si osserva come la componente azionaria, inizialmente dominante, si riduca progressivamente nel tempo a favore di un incremento della componente obbligazionaria. Questo cambiamento è una diretta conseguenza della riallocazione tra profili mostrata nel primo grafico.

Figura 4.9: Evoluzione dell'*asset allocation* nel tempo

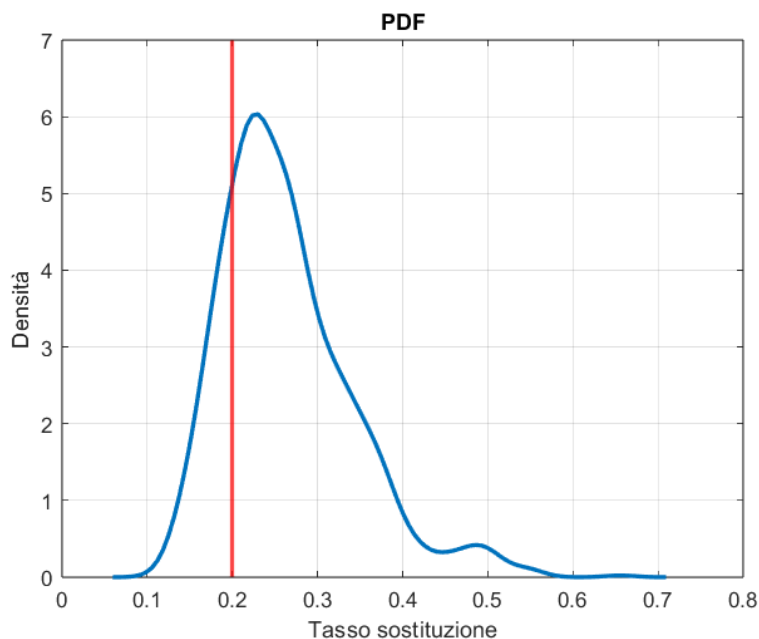


Affrontiamo ora l'aspetto centrale di quest'analisi sperimentale: la verifica dell'adeguatezza e dell'efficienza dell'algoritmo nella ricerca delle soluzioni ottimali. A tal fine, consideriamo sempre l'Esperimento 1.

La Figura 4.10 mostra la distribuzione di probabilità dei tassi di sostituzione, ottenuta applicando la strategia ottimale all'insieme di scenari simulati. La linea verticale rossa indica il tasso di sostituzione target, fissato al 20%. La distribuzione riflette l'andamento della strategia ottimale in condizioni di mercato differenti, evidenziando il livello di variabilità dei risultati.

Dal grafico, si osserva che la moda si colloca al di sopra al target. Inoltre, la presenza di una coda lunga a destra suggerisce l'esistenza di scenari particolarmente favorevoli con tassi di sostituzione significativamente più elevati. Tuttavia, esiste un rischio residuo di non raggiungimento del target, evidenziato dalla porzione della distribuzione a sinistra della soglia, che potrebbe richiedere ulteriori interventi correttivi, come ad esempio un aumento della contribuzione.

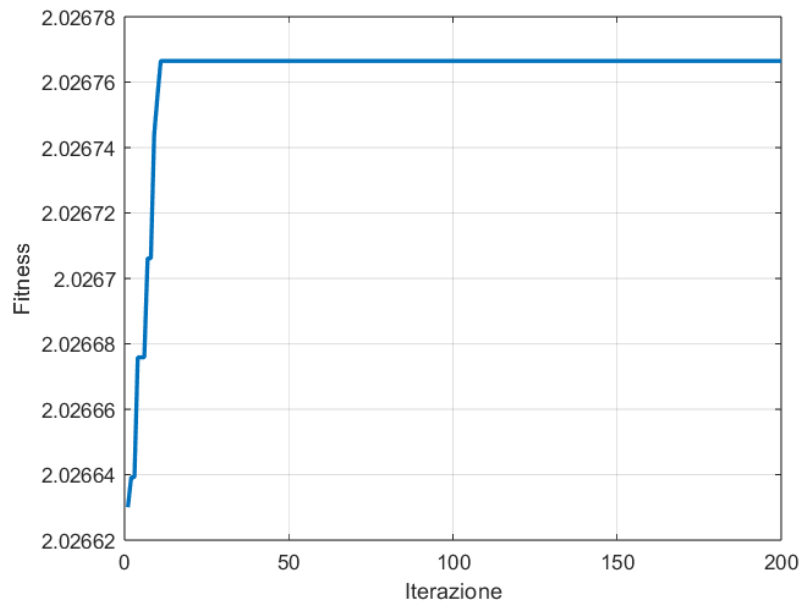
Figura 4.10: Distribuzione simulata dei tassi di sostituzione della soluzione ottimale



La Figura 4.11 mostra il miglioramento progressivo della soluzione, rappresentando per ogni generazione il valore dello *Score* (S) della soluzione di investimento con la fitness più elevata presente nella popolazione.

Sebbene siano state adottate 200 generazioni per garantire la qualità del risultato, come da prassi in letteratura, il grafico indica che la convergenza avviene molto prima. In particolare, l'algoritmo raggiunge la stabilità in meno di 30 generazioni, con un iniziale incremento della fitness seguito da una fase di assestamento sul valore massimo. Questo comportamento conferma l'elevata efficienza dell'algoritmo nel trovare soluzioni ottimali in tempi ridotti: gli operatori genetici hanno lavorato efficacemente nelle prime iterazioni, migliorando progressivamente la qualità delle soluzioni fino al raggiungimento di una configurazione ottimale.

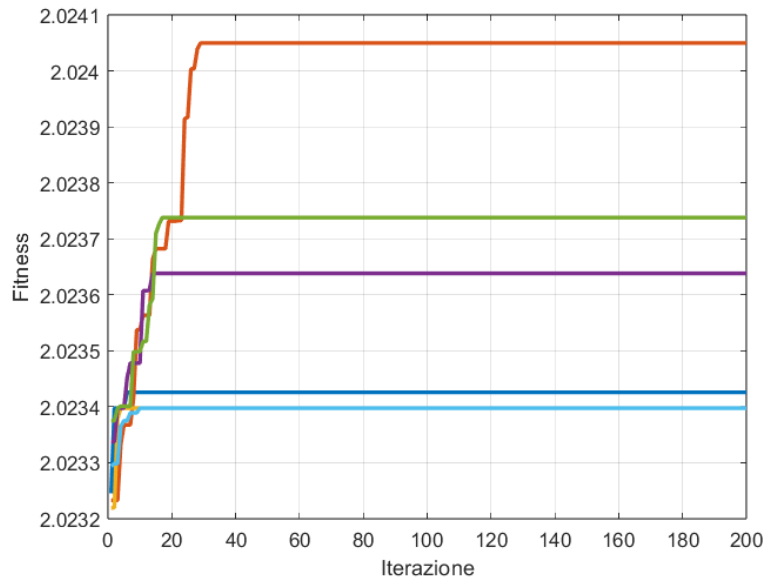
Figura 4.11: Evoluzione della fitness della migliore soluzione presente in ogni generazione



Per testare infine la robustezza dell'algoritmo genetico, sono state eseguite 30 *runs* indipendenti, in modo da analizzarne il comportamento in termini di convergenza e variabilità delle soluzioni.

La Figura 4.12 mostra l'andamento della fitness della soluzione migliore individuata in ogni generazione (in modo analogo alla Figura 4.11). Si osserva che, in tutte le iterazioni, l'algoritmo converge rapidamente, raggiungendo già dopo 30 generazioni un ottimo locale. Inoltre, molte curve si sovrappongono: su 30 esecuzioni distinte, se ne distinguono visivamente solo 5, evidenziando una bassa variabilità tra le diverse *runs* e confermando la stabilità dell'algoritmo.

Figura 4.12: Andamento della fitness in 30 lanci dell'algoritmo

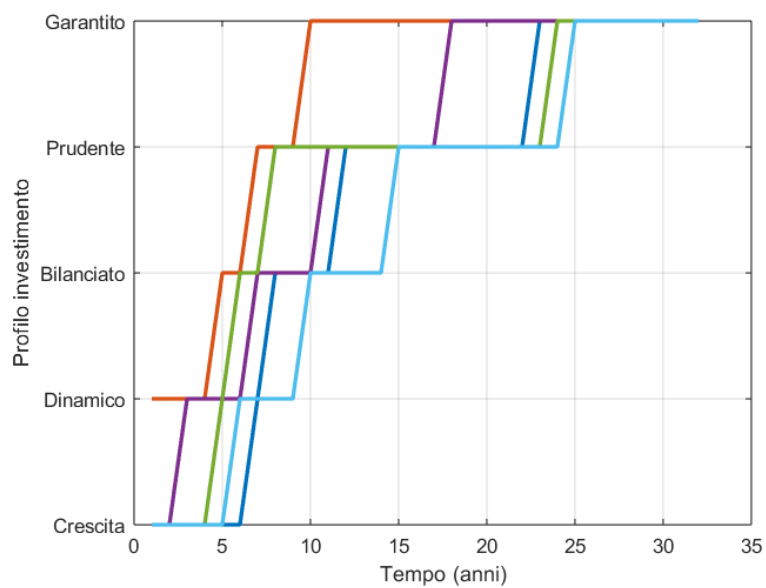


La Figura 4.13 evidenzia invece la diversità delle soluzioni di investimento individuate dall'algoritmo. Si nota che le transazioni tra i profili di investimento sono più eterogenee nelle fasi iniziali, mentre successivamente tendono a stabilizzarsi verso scelte più omogenee. Questo comportamento riflette una maggiore sensibilità dell'algoritmo nella determinazione dei primi passaggi del percorso di investimento.

In sintesi, l'algoritmo mostra una buona capacità di ricerca locale e una rapida convergenza. Tuttavia, per migliorare la ricerca globale e ridurre il rischio di stagnazione prematura, sarebbe necessario effettuare un *tuning*¹ più dettagliato.

¹La fase di *tuning* è il processo di ottimizzazione dei parametri di un algoritmo per migliorarne le prestazioni e l'efficacia nella ricerca della soluzione ottimale. Questo include la regolazione di parametri come la dimensione della popolazione, le probabilità di mutazione e crossover, e i criteri di selezione e terminazione.

Figura 4.13: Evoluzione dei profili di investimento nel tempo in 30 lanci dell'algorithm



CONCLUSIONI

Il presente lavoro ha analizzato il potenziale delle strategie di *asset allocation* dinamica nei fondi pensione, dimostrando come l'integrazione del *Life-Cycle Investing* con il *Goal-Based Investing* possa migliorare l'efficienza della gestione previdenziale complementare, consentendo una maggiore personalizzazione e favorendo il raggiungimento degli obiettivi pensionistici.

Per superare i limiti delle strategie statiche, è stato sviluppato un modello innovativo basato su algoritmi genetici. La sua struttura è ottimizzata per la risoluzione di problemi combinatori, grazie all'impiego di due operatori genetici appositamente concepiti per migliorare le prestazioni del processo evolutivo. Il modello seleziona nel tempo il profilo di investimento più adatto alle caratteristiche dell'aderente, massimizzando la probabilità di raggiungere l'obiettivo pensionistico e garantendo un processo decisionale più flessibile.

L'analisi sperimentale ha evidenziato la capacità del modello di adattarsi ai diversi profili degli aderenti, risultando efficace nel bilanciare la componente azionaria e obbligazionaria lungo il ciclo di vita dell'investitore, in linea con i principi *Life-Cycle*. Inoltre, l'algoritmo si è dimostrato in grado di esplorare in modo efficiente lo spazio di ricerca, garantendo una rapida convergenza e una robustezza complessivamente soddisfacente.

Nonostante i risultati positivi, vi sono ancora margini di miglioramento. Un'ulteriore calibrazione dei parametri genetici potrebbe rafforzare la capacità di ricerca globale ed evitare fenomeni di stagnazione prematura. Inoltre, per un'implementazione concreta nei fondi pensione, sarebbe necessaria una fase di sperimentazione su dati reali e un confronto con le strategie attualmente adottate nel mercato.

In sintesi, questo studio ha dimostrato come un modello di investimento previdenziale basato su obiettivi possa rappresentare un'alternativa valida ai

metodi tradizionali, contribuendo a una pianificazione più efficace e personalizzata per gli aderenti ai fondi pensione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. E. Baker. “Adaptive selection methods for genetic algorithms”. In: *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications*. A cura di J. J. Grefenstette. Erlbaum, 1985.
- [2] Augusto Bellieri dei Belliera, Stefania Buonanno e Ciriaco Serluca. *I fondi pensione: aspetti organizzativi, finanziari ed attuariali*. Insurance Sciences. Napoli: Edizioni scientifiche italiane, 2017.
- [3] Rabi Bhattacharya e Edward C. Waymire. *Random Walk, Brownian Motion, and Martingales*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2021. ISBN: 978-3-030-63078-9.
- [4] Zvi Bodie, Robert C. Merton e William F. Samuelson. “Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model”. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 16.3-4 (1992), pp. 427–449.
- [5] Riccardo Cesari. *I fondi pensione*. Vol. 47. Farsi un’idea. Bologna: Il Mulino, 2000.
- [6] Conning. *A User’s Guide to Economic Scenario Generation in Property/Casualty Insurance*. Rapp. tecn. Casualty Actuarial Society, CAS Research Papers, ott. 2020.
- [7] COVIP. *Relazione per l’anno 2022*. 2023.
- [8] COVIP. *Relazione per l’anno 2023*. 2024.
- [9] COVIP. *Deliberazione del 16 marzo 2012*. "Disposizioni sul processo di attuazione della politica di investimento".
- [10] COVIP. *I fondi pensione aperti*. https://www.covipit/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_fondi_pensione_aperti_.pdf.

- [11] COVIP. *I fondi pensione negoziali*. [hiips://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_evoluzione_del_sistema_pensionistico_in_italia_0.pdf](https://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_evoluzione_del_sistema_pensionistico_in_italia_0.pdf).
- [12] COVIP. *I fondi pensione preesistenti*. [hiips://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_fondi_pensione_preesistenti_.pdf](https://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_fondi_pensione_preesistenti_.pdf).
- [13] COVIP. *I Piani Individuali Pensionistici di tipo assicurativo (PIP)*. [hiips://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_pip_.pdf](https://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_pip_.pdf).
- [14] COVIP. *Informazioni sul trattamento fiscale della previdenza complementare*. [hiips://www.covip.it/per-il-cittadino/educazione-previdenziale/faq/trattamento-fiscale](https://www.covip.it/per-il-cittadino/educazione-previdenziale/faq/trattamento-fiscale). ultimo accesso: 26/10/2024.
- [15] COVIP. *L'evoluzione del sistema pensionistico in Italia*. [hiips://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_evoluzione_del_sistema_pensionistico_in_italia_0.pdf](https://www.covip.it/sites/default/files/per_saperne_di_piu_-_evoluzione_del_sistema_pensionistico_in_italia_0.pdf).
- [16] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll e Stephen A. Ross. "A Theory of the Term Structure of Interest Rate". In: *Econometrica* 53.2 (1985), pp. 385–408.
- [17] Banca d'Italia. *Indagini sull'alfabetizzazione finanziaria e le competenze di finanza digitale in Italia: adulti - 2023*. Rapp. tecn. Ultimo accesso: marzo 2025. 2023. URL: [hiips://www.bancaditalia.it/pubblicazioni/indagini-alfabetizzazione/2023-indagini-alfabetizzazione/statistiche_AFA_20072023.pdf](https://www.bancaditalia.it/pubblicazioni/indagini-alfabetizzazione/2023-indagini-alfabetizzazione/statistiche_AFA_20072023.pdf).
- [18] Banca d'Italia. *Finanza pubblica: fabbisogno e debito - agosto 2024*. pubblicato il 15 ottobre 2024.
- [19] Ankul Daga et al. *Vanguard's approach to target-date funds*. [hiips://corporate.vanguard.com/content/dam/corp/research/pdf/vanguards_approach_to_target_date_funds.pdf](https://corporate.vanguard.com/content/dam/corp/research/pdf/vanguards_approach_to_target_date_funds.pdf). 2022.
- [20] Sanjiv Das et al. "Portfolio optimization with mental accounts". In: *Journal of financial and quantitative analysis* 45.2 (2010), pp. 311–334.

- [21] Sanjiv R Das et al. “Dynamic portfolio allocation in goals-based wealth management”. In: *Computational Management Science* 17.4 (2020), pp. 613–640.
- [22] *Decreto 2 settembre 2014, n. 166*. "Regolamento di attuazione dell’articolo 6, comma 5-bis del decreto legislativo 5 dicembre 2005, n. 252, recante norme sui criteri e limiti di investimento delle risorse dei fondi pensione e sulle regole in materia di conflitti di interesse (in vigore dal 28 novembre 2014).".
- [23] *Decreto legislativo 5 dicembre 2005, n. 252*. "Disciplina delle forme pensionistiche complementari".
- [24] Ministero dell’Economia e delle Finanze. *Documento di economia e finanza 2024*. Governo Italiano. Accessibile online. 2024.
- [25] Terence C Fogarty. “Varying the probability of mutation in the genetic algorithm”. In: *Proceedings of the 3rd international conference on genetic algorithms*. 1989, pp. 104–109.
- [26] David E Goldberg. “Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning, Addison”. In: *Wesley Publishing Company, Reading, MA* 1.98 (1989), p. 9.
- [27] John H Holland. “Adaptation in natural and artificial systems”. In: *Ann Arbor: The University of Michigan Press* 32 (1975).
- [28] John Hull e Alan White. “Pricing interest-rate-derivative securities”. In: *The review of financial studies* 3.4 (1990), pp. 573–592.
- [29] INPS. *XXIII Rapporto annuale*. 23. 2024.
- [30] Allianz Global Investors. *Goal-Based Investing - Allianz GI*. Ultimo accesso: 26 febbraio 2025. 2025. URL: <https://it.allianzgi.com/it-it/b2b/le-nostre-competenze/formazione/goal-based-investing>.
- [31] ISTAT - Istituto Nazionale di Statistica. *Previsioni della popolazione residente e delle famiglie | Base 1/1/2023. Il Paese domani: crescerà lo squilibrio tra nuove e vecchie generazioni, aumenteranno le differenze*. luglio 2024.

- [32] ISTAT - Istituto Nazionale di Statistica. *Indicatori demografici*. <http://dati.istat.it/Index.aspx?QueryId=19668>. Accesso: 25 ottobre 2024.
- [33] Marco Lagovini. “L’Asset Liability Management per i fondi pensione”. Tesi di dott. Università degli Studi di Trieste, 2020.
- [34] Siew Mooi Lim et al. “Crossover and mutation operators of genetic algorithms”. In: *International journal of machine learning and computing* 7.1 (2017), pp. 9–12.
- [35] George Lindfield e John Penny. *Introduction to Nature-Inspired Optimization*. Elsevier, 2017, pp. 19–46.
- [36] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91.
- [37] Robert C. Merton. “Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case”. In: *Review of Economics and Statistics* 51.3 (1969), pp. 247–257.
- [38] Almerico Murli. *Matematica numerica: metodi, algoritmi e software*. Napoli: Liguori Editore, 2007.
- [39] Hal Pedersen et al. *Economic Scenario Generators - A Practical Guide*. United States, luglio 2016.
- [40] Fondo Pegaso. *Documento sulla politica di investimento*. In vigore dal 10 febbraio 2025. 2025.
- [41] Ugo Pomante et al. “Asset allocation dinamica per i fondi pensione: un modello basato sugli algoritmi genetici”. In: *Bancaria* 3 (2023), pp. 12–34.
- [42] Generali Italia S.p.A. *Convenzione per l’erogazione delle rendite vitalizie Generali Italia S.p.A.* La scadenza della convenzione è prevista per il 14 luglio 2029. Lug. 2009.
- [43] Hersh Shefrin e Meir Statman. “Behavioral portfolio theory”. In: *Journal of financial and quantitative analysis* 35.2 (2000), pp. 127–151.
- [44] Ragioneria Generale dello Stato. *Le tendenze di medio-lungo periodo del sistema pensionistico e socio-sanitario*. 25. 2024.
- [45] Anant J Umbarkar e Pranali D Sheth. “Crossover operators in genetic algorithms: a review.” In: *ICTACT journal on soft computing* 6.1 (2015).