



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO

DIPARTIMENTO DI DIRITTO, ECONOMIA,
MANAGEMENT E METODI QUANTITATIVI

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE E ATTUARIALI

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

in

Teoria del Rischio

Valutazione e copertura del rischio di longevità

RELATORE:

Ch.mo Prof.

NICOLINO ETTORE D'ORTONA

CANDIDATA:

ROBERTA LEO

MATR. 709000598

CORRELATORE:

Ch.mo Prof.

GIUSEPPE MELISI

Anno Accademico 2024/2025

Indice

1. Introduzione.....	1
2. I trend demografici e il longevity risk.....	5
3. Modelli di proiezione della mortalità.....	9
3.1 Il modello Lee Carter.....	12
3.2 Estensione del modello LC al modello Poisson log-bilineare di Brouhns et al.	17
3.3 Modelli multifattoriali	18
4. Il trasferimento del rischio di longevità al mercato finanziario	22
4.1 Survivor bonds.....	25
5. Analisi empirica.....	33
5.1 Analisi dei tassi di mortalità storici della popolazione italiana	33
5.2 Stima e proiezione della mortalità in Italia con il modello Lee-Carter	37
5.3 Valutazione del prezzo dell'inverse longevity bond.....	39
5.4 Aggiunta del premio per il rischio mediante la Wang Transform.....	43
5.5 Alternativa modellistica: il modello Cairns-Blake-Dowd	47
5.6 Estensione dell'analisi: decomposizione del rischio	47
5.6.1 Analisi del rischio demografico	47
5.6.2 Analisi del rischio finanziario	50
5.6.3 Analisi di ulteriori due scenari di rischio	56
6. Conclusioni.....	59
7. Bibliografia.....	61
8. Appendice grafica.....	65
8.1 Piramidi della popolazione per età e sesso	65
8.1.1 Codice R - Piramidi della popolazione per età e sesso	65
8.2 Struttura survivor bonds	68
8.2.1 Codice R - Struttura survivor bonds	69
8.3 Grafici descrittivi dei tassi di mortalità	70
8.3.1 Codice R - Grafici descrittivi dei tassi di mortalità	71
9. Appendice tecnica.....	74
9.1 Preparazione dei dati	74
9.1.1 Codice R - Preparazione dei dati	74

9.2 Stima e previsione del modello LC	76
9.3 Pricing inverse longevity bond	79
9.3.1 Codice R - Pricing inverse longevity bond	80
9.4 Aggiunta del premio per il rischio mediante Wang Transform.....	85
9.4.1 Codice R - Aggiunta del premio per il rischio mediante Wang Transform.....	85
9.5 Alternativa modellistica: modello Cairns-Blake-Dowd	86
9.5.1 Codice R - Modello di proiezione della mortalità CBD	87
9.6 Analisi del rischio demografico	89
9.6.1 Codice R - Analisi del rischio demografico	89
9.7 Analisi del rischio finanziario.....	91
9.7.1 Codice R - Analisi del rischio finanziario.....	92
9.8 Analisi di due ulteriori scenari di rischio.....	95
9.8.1 Codice R - Analisi di due ulteriori scenari di rischio.....	95

1. Introduzione

Negli ultimi decenni, in molti Paesi del mondo, la speranza di vita alla nascita è drasticamente aumentata. Il processo di riduzione della mortalità procede in modo rapido e regolare, consentendo ulteriori guadagni di sopravvivenza a tutte le età, comprese quelle più avanzate, secondo la regola empirica per cui la mortalità si riduce più velocemente laddove è più elevata. L'attenzione crescente verso la prevenzione, l'adozione di stili di vita salutari e i progressi della medicina hanno contribuito non solo a migliorare il rapporto dell'uomo con la vita, la morte e la malattia, ma anche a rendere il raggiungimento di età avanzate un traguardo sempre più accessibile.

L'andamento recente della mortalità per età ha mostrato due importanti trasformazioni della forma della curva di sopravvivenza: la prima è la cosiddetta "rettangolarizzazione", ovvero una maggiore concentrazione dei decessi intorno all'età in cui si registra il maggior numero di morti (nota anche come età modale alla morte o punto di Lexis); la seconda è l' "espansione", che indica un progressivo spostamento in avanti dell'età modale alla morte¹.

Queste trasformazioni, inevitabilmente, hanno implicazioni significative per l'attività assicurativa, soprattutto per i prodotti legati alla durata di vita.

Tra i principali rischi connessi all'attività assicurativa sulla durata della vita, riveste un ruolo di particolare rilievo il rischio demografico, legato all'incertezza sulle effettive durate di vita degli assicurati.

All'interno del rischio demografico è possibile distinguere tre categorie concettualmente interessanti²:

- il rischio di scarti accidentali del numero di decessi dal valore atteso, che deriva dalle normali fluttuazioni della mortalità nel portafoglio;
- il rischio di scarti sistematici, che si manifesta quando la mortalità ha una dinamica che si discosta in modo strutturale e persistente dalle ipotesi adottate. È in questo contesto che si colloca il *longevity risk*, in quanto si tratta di un rischio legato all'aleatorietà del *trend* di mortalità ad età elevate;

¹ Cfr., Maccheroni C., Barugola T., (2011), p. 1.

² Cfr., Pitacco E., (2022), p. 553.

- il rischio catastrofe, che causa una mortalità straordinaria in corrispondenza di eventi eccezionali, come guerre, pandemie o cataclismi naturali.

Tale rischio si manifesta in maniera differente a seconda della struttura contrattuale del prodotto assicurativo: in presenza di contratti a capitale sotto rischio positivo (come le assicurazioni temporanee caso morte), le conseguenze negative emergono qualora le frequenze dei decessi risultino superiori rispetto alle probabilità di morte realisticamente valutate; al contrario, nei contratti a capitale sotto rischio negativo (come le rendite vitalizie o i capitali differiti), l'effetto avverso si verifica quando le frequenze di decesso risultano inferiori alle ipotesi adottate, poiché gli assicurati sopravvivono più a lungo rispetto alle previsioni iniziali³.

In particolare, tra i contratti a capitale sotto rischio negativo le rendite vitalizie, in ragione della loro lunga durata attesa, risultano tra i prodotti più esposti al rischio sistematico e sono interessate dal *longevity risk*⁴: una riduzione della mortalità superiore a quella già incorporata nella tavola proiettata utilizzata per la tariffazione può compromettere la redditività del contratto e la solidità tecnica dell'impresa assicurativa.

È poi di fondamentale importanza sottolineare come il *longevity risk* è un rischio di tipo "non pooling": il suo effetto si amplifica all'aumentare della dimensione del portafoglio in quanto esso agisce nella stessa direzione su tutti i contratti⁵.

La gestione del rischio di longevità diventa, quindi, cruciale per garantire la sostenibilità prospettica dell'impresa.

Le compagnie assicurative, tuttavia, continuano a incontrare difficoltà nella gestione di questo rischio poiché uno scostamento sistematico tra le ipotesi attuariali adottate e la realtà osservata può compromettere il loro equilibrio tecnico-finanziario.

Una possibile soluzione consiste nel trasferire il rischio di longevità ai mercati finanziari, attraverso strumenti di cartolarizzazione.

La cartolarizzazione rappresenta un'opzione più flessibile ed economicamente efficiente rispetto alla riassicurazione tradizionale, spesso costosa e soggetta a rischio di controparte.

³ Cfr., Pitacco E., (2022), p. 552.

⁴ Cfr., Pitacco E., (2022), p. 558.

⁵ Cfr., Pitacco E., (2022), p. 555.

Questo approccio consente di trasformare i flussi di cassa legati alla sopravvivenza in titoli negoziabili, ampliando le opportunità di investimento e di gestione del rischio.

A tal fine, per garantire una quantificazione e gestione integrata del rischio di longevità, è fondamentale l'interazione tra strumenti di trasferimento del rischio e tecniche di proiezione demografica.

Le tecniche di proiezione demografica consentono di stimare l'evoluzione futura dei tassi di mortalità. In questo contesto, il modello di Lee e Carter (1992) si è affermato come uno dei modelli più influenti e utilizzati per la previsione della mortalità futura, in quanto combina metodi statistici e demografici per descrivere l'evoluzione temporale dei tassi di mortalità. La sua semplicità, unita alla capacità di adattarsi a una vasta gamma di dati empirici, lo ha reso uno *standard* di riferimento nella letteratura attuariale e demografica.

Dato che la sola proiezione della mortalità non è sufficiente, è necessario anche disporre di strumenti finanziari innovativi, come, ad esempio, i *survivor bonds*, proposti da Blake e Burrows (2001). Si tratta di strumenti finanziari legati alla sopravvivenza di una determinata coorte di riferimento e consentono di allineare i flussi di pagamento alle reali esigenze di fondi pensione e compagnie assicurative, offrendo una risposta concreta ed efficace alla copertura del rischio di longevità.

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è analizzare questi due aspetti complementari: da un lato, l'evoluzione dei modelli di mortalità; dall'altro la fattibilità e l'efficacia di strumenti finanziari innovativi per la copertura del rischio di longevità.

L'interesse per l'analisi e lo sviluppo di tale argomento è scaturito dal crescente rilievo che la longevità sta assumendo, ponendo sfide rilevanti per i sistemi pensionistici, le compagnie assicurative e gli investitori istituzionali.

La tesi è articolata in quattro capitoli. In particolare, i primi tre capitoli consentono di introdurre e approfondire i concetti teorici e metodologici necessari alla comprensione del tema e allo sviluppo dell'analisi empirica presentata nell'ultimo capitolo.

Si procede, inizialmente, ad esporre i concetti relativi ai *trend* demografici e al *longevity risk*, nonché le principali metodologie di proiezione della mortalità fino a giungere alla descrizione degli strumenti finanziari finalizzati al trasferimento del rischio di longevità ai mercati finanziari. Il quarto ed ultimo capitolo presenta un'analisi empirica basata

sull'applicazione del modello di Lee-Carter, impiegato per generare, a partire dai dati di mortalità italiani, una distribuzione stocastica della sopravvivenza futura che verrà poi utilizzata per implementare un metodo di progettazione dei *survivor bonds* basato su *tranche* percentili, con conseguente determinazione del prezzo dei titoli.

2. I trend demografici e il *longevity risk*

Entro il 2030, la popolazione mondiale raggiungerà quota 8,5 miliardi con un forte incremento degli over 65 che arriveranno a rappresentare un decimo dell'intera popolazione globale, salendo da 674 milioni (2018) a circa un miliardo.

Anche l'Italia è coinvolta in questa transizione, che non è solo demografica, ma anche sociale ed economica. La struttura delle famiglie, il mercato del lavoro e gli equilibri tra generazioni sono elementi sottoposti a grandi cambiamenti e influenzano direttamente le prospettive future del Paese.

Ciò che emerge dai dati ISTAT⁶, con circa 59 milioni di residenti al 1° gennaio 2024, è che l'Italia è il terzo Paese più popoloso dell'Unione Europea, dopo Germania (oltre 83 milioni) e Francia (circa 68 milioni). Insieme alla Spagna (oltre 48 milioni), questi quattro Paesi rappresentano quasi il 58% dell'intera popolazione europea.

L'Italia resta uno dei Paesi con la mortalità più bassa a livello globale, nonostante i picchi di mortalità registrati durante la pandemia (740 mila decessi nel 2020, 701 mila nel 2021 e 715 mila nel 2022). Nel 2024, il numero dei decessi è calato a circa 651 mila persone, un ritorno vicino ai livelli precedenti alla pandemia, con un tasso di mortalità pari all'11 per mille (dati ISTAT). Questo dato, pur migliorando rispetto agli anni pandemici, riflette l'invecchiamento della popolazione, poiché aumenta il numero di persone nelle fasce d'età più avanzate.

Parallelamente, la riduzione della mortalità ha contribuito a un significativo aumento della speranza di vita alla nascita che, nel 2024, ha toccato un nuovo picco di 83,4 anni a sessi congiunti. Volendo distinguere per genere, la speranza di vita alla nascita è stimata pari a 81,4 anni per gli uomini e 85,5 anni per le donne, con marcate differenze territoriali.

Tuttavia, a fronte dell'aumento della longevità, la natalità resta persistentemente bassa. Questo squilibrio accentua il fenomeno dell'invecchiamento, rendendo l'Italia uno dei Paesi più anziani al mondo. All'inizio del 2025, quasi un quarto della popolazione aveva più di 65 anni (24,7%), e tra questi, oltre 4,5 milioni si collocavano tra gli over 80.

⁶ Cfr., ISTAT, Rapporto annuale 2025. La situazione del Paese, pp. 63-68.

Quest'ultimi vengono chiamati i "grandi anziani" ed ormai superano in numero i bambini con meno di dieci anni di età.

Questi andamenti demografici danno origine a due dinamiche parallele: da un lato l'"invecchiamento dall'alto", con la crescita della fascia anziana della popolazione; dall'altro, l'"invecchiamento dal basso", dovuto alla persistente denatalità che riduce progressivamente la base della piramide demografica.

È un fenomeno che l'Italia vive in modo anticipato e accentuato rispetto ad altri Paesi europei e che, secondo le previsioni, continuerà nei prossimi decenni, ridefinendo profondamente la struttura demografica del Paese.

Quanto appena esposto, è chiaramente visibile nel confronto tra la piramide dell'età della popolazione al 1° gennaio 2025 (Figura 1) e alla stessa data del 2050 sulla base delle previsioni più recenti (Figura 2).

Figura 1: Piramide per età e sesso della popolazione al 1° gennaio 2025. Fonte: ISTAT., Demografia in cifre - Popolazione residente per sesso, età e stato civile al 1° gennaio 2025. Elaborazione personale tramite R.

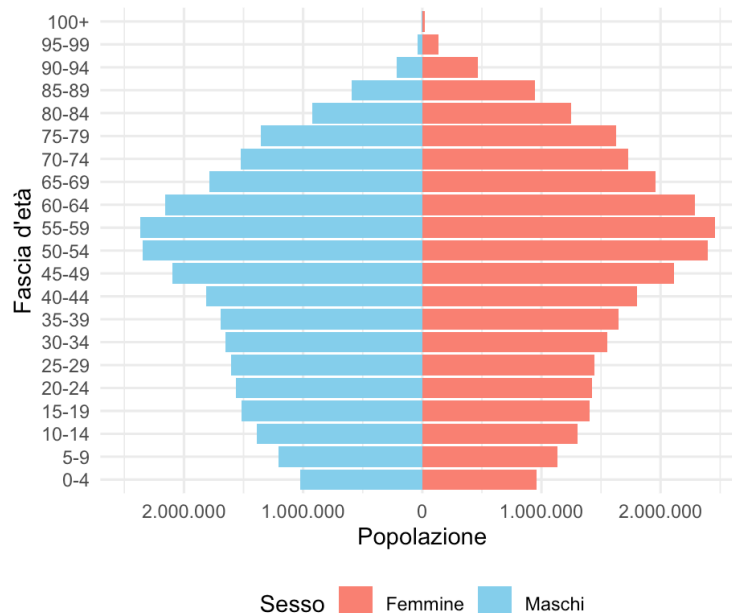
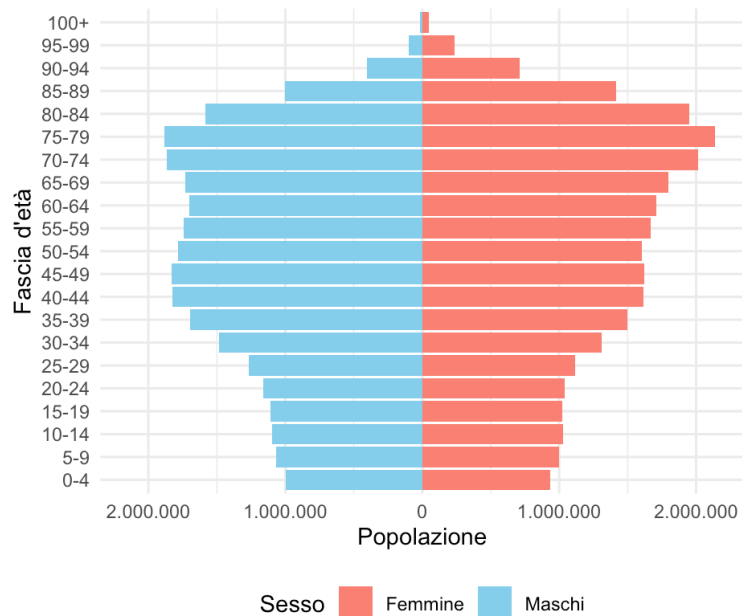


Figura 2: Piramide per età e sesso della popolazione prevista al 1° gennaio 2050. Fonte: ISTAT, Demografia in cifre - Previsioni della popolazione residente per sesso, età e regione - Base 1/1/2024. Elaborazione personale tramite R.



I dettagli degli *script* utilizzati per la realizzazione delle due figure sono riportati nell'Appendice grafica 8.1.

Queste trasformazioni demografiche non solo ridefiniscono la società, ma pongono anche significative sfide in termini di sostenibilità dei sistemi di welfare generando un crescente *longevity risk*, difficile da prevedere.

Questo scenario demografico in evoluzione comporta deviazioni del numero di morti dai valori attesi, che possono essere accidentali o sistematiche:

- le variazioni accidentali sono variazioni aleatorie intorno a una probabilità di morte nota e costituiscono un rischio assicurativo a tutti gli effetti, rischio che può essere mutualizzato consentendo l'aumento della protezione all'aumentare del numero di assicurati (si parla di *rischio pooling*);
- le variazioni sistematiche sono variazioni inattese delle tendenze della mortalità, ovvero differenze sistematiche a livello di singola coorte tra il numero di morti e il suo valore atteso e pertanto costituiscono un rischio collettivo. In particolare, qualora gli anni di vita effettivamente vissuti dagli individui appartenenti a una stessa coorte superino

quelli attesi, si parla di rischio di longevità che non può essere diversificato tra gli individui, poiché colpisce allo stesso modo l'intero gruppo dei potenziali assicurati (si parla, infatti, di rischio *non pooling*).

3. Modelli di proiezione della mortalità

Il confronto fra tavole di sopravvivenza relative ad uno stesso tipo di collettività (ad esempio la popolazione di un dato Paese o l'insieme di assicurati con una certa forma assicurativa) e costruite in diversi periodi di osservazione, rivela più o meno marcate tendenze nel fenomeno della mortalità. Tali tendenze si manifestano in diversi Paesi e si esprimono, in particolare, con una generale riduzione delle probabilità di decesso, uno spostamento in avanti del punto di Lexis e un allungamento della vita media sia alla nascita sia ad età avanzate.

Le tavole di mortalità periodali non possono essere utilizzate nella pratica attuariale per tutti i prodotti assicurativi sulla vita poiché tali tavole sono costruite sotto l'assunzione che il fenomeno della mortalità sia costante nel tempo. Il loro utilizzo, quindi, è limitato ai prodotti assicurativi a breve o medio termine, ovvero applicabili a un orizzonte temporale di cinque o dieci anni. Molti prodotti assicurativi sulla vita, come le rendite vitalizie e i piani pensionistici, richiedono di considerare orizzonti temporali più lunghi.

È allora immediato giungere alla seguente conclusione: una tavola di sopravvivenza, quantunque aggiornata, non permette di valutare oggi "esattamente" le probabilità di decesso tra dieci, quindici o vent'anni⁷.

Le tavole di mortalità utilizzate in questi casi devono essere costruite in modo da incorporare l'andamento osservato della mortalità, con l'obiettivo di anticiparne l'evoluzione futura. Una tavola di questo tipo è detta tavola di mortalità proiettata e si basa su tassi di mortalità previsti.

Il procedimento di proiezione richiede anzitutto alcune scelte preliminari:

- scelta del supporto statistico, cioè dell'insieme di tavole da impiegare nella procedura di estrapolazione;
- scelta del modello di proiezione, cioè della struttura matematica da impiegare per la procedura di estrapolazione;
- scelta dell'eventuale tavola base, cioè della tavola alla quale applicare il modello di proiezione.

⁷ Cfr., Pitacco E., (2022), pp. 106-107.

Il modello di proiezione, i cui parametri saranno stimati sulla scorta del supporto statistico scelto, genererà quindi la tavola proiettata.

È bene specificare che il supporto statistico non necessariamente coincide con l'insieme delle tavole disponibili: un eccessivo ampliamento del supporto statistico può infatti contribuire a determinare un *trend* in cui hanno peso relativamente scarso i fattori più recenti di diminuzione della mortalità, fattori il cui effetto si suppone proseguire nel tempo, a vantaggio di altri fattori i cui effetti possono invece considerarsi ormai estinti⁸.

A partire dagli anni '90, con l'obiettivo di rappresentare in modo più accurato i miglioramenti nel *trend* della sopravvivenza umana, sono stati sviluppati numerosi modelli stocastici. In questo contesto, data la molteplicità di approcci proposti nella letteratura, Hunt e Blake (2015) hanno introdotto una classificazione in grado di comprendere la maggior parte dei modelli esistenti. In particolare, la letteratura statistico-demografica ha individuato una macro-categoria di modelli stocastici per la previsione della mortalità, noti come Generalized Age-Period-Cohort (GAPC)⁹, ovvero modelli stocastici di mortalità generalizzati per età, periodo e coorte, caratterizzati da una serie di elementi, tutti riconducibili a quattro componenti fondamentali:

1. la componente casuale rappresentata dal numero di decessi $D(x, t)$ con distribuzione di tipo Poisson o di tipo Binomiale¹⁰,

$$D(x, t) \sim \text{Poisson}(E(x, t) \cdot m(x, t)) \text{ con } E\left(\frac{D(x, t)}{E(x, t)}\right) = m(x, t) \quad (1)$$

oppure

$$D(x, t) \sim \text{Binomiale}(E^0(x, t) \cdot q_x(t)) \text{ con } E\left(\frac{D(x, t)}{E^0(x, t)}\right) = q_x(t); \quad (2)$$

2. la componente sistematica costituita dal predittore $\eta_x(t)$ che cattura gli effetti legati all'età x , all'anno di calendario t e all'anno di nascita della coorte di riferimento $c = t - x$ ¹¹

⁸ Cfr., Pitacco E., (2022), pp. 110-111.

⁹ Cfr., Hunt A., Blake D., (2015), pp. 2-3.

¹⁰ Cfr., Burri G., (2023), p. 9.

¹¹ Cfr., Hunt A., Blake D., (2015), p. 4.

$$\eta(x, t) = a_x + \sum_{i=1}^N b_x^{(i)} k_t^{(i)} + b_x^{(0)} \gamma_{t-x} \quad (3)$$

dove:

- a_x è una funzione statica dell'età che descrive l'andamento della mortalità al variare dell'età x ;
- $N \geq 0$ rappresenta il numero (intero) di termini di età-periodo che riproducono l'andamento della mortalità;
- $k_t^{(i)}$ spiega l'evoluzione della mortalità nel tempo, $i = 1, \dots, N$;
- $b_x^{(i)}$ descrive, per ogni età x , come la mortalità varia al variare del parametro temporale $k_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$;
- γ_{t-x} è il parametro che cattura l'effetto legato alla coorte, se presente nel modello;
- $b_x^{(0)}$ descrive, per ciascuna età x , la variazione della mortalità al variare dell'effetto coorte.

I numerosi modelli stocastici di mortalità appartenenti alla famiglia GAPC, come il modello Lee-Carter, l'estensione di Brouhns et al. e il modello Cairns et al. possono essere ottenuti al variare di i nella formula del predittore $\eta(x, t)$ ¹².

I parametri $b_x^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ possono sia essere funzioni predefinite dell'età x da stimare, come nel modello di Cairns et al., che termini non parametrici che non necessitano di alcuna stima, come nel modello Lee-Carter¹³.

Nei modelli appartenenti alla famiglia GAPC, inoltre, gli indici temporali $k_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ e il parametro di coorte γ_{t-x} sono dei processi stocastici. È proprio quest'ultima la caratteristica chiave che consente di ricavare le proiezioni stocastiche nei modelli GAPC e quindi la produzione di previsioni probabilistiche dei tassi di mortalità futuri¹⁴;

3. una *link function* g che consente di associare la componente sistematica a quella casuale nel seguente modo¹⁵

¹² Cfr., Burri G., (2023), p. 10.

¹³ Cfr., Hunt A., Blake D., (2015), p. 5.

¹⁴ Cfr., Burri G., (2023), p. 10.

¹⁵ Cfr., Hunt A., Blake D., (2015), p. 4.

$$g\left(E\left(\frac{D(x,t)}{E(x,t)}\right)\right) = \eta_x(t). \quad (4)$$

Nonostante siano disponibili diverse *link functions*, si è soliti associare la distribuzione di Poisson con la *log-link function* e la distribuzione Binomiale con la *logit-link function*;

4. un insieme di vincoli sui parametri per l'identificabilità e la stima dei modelli¹⁶. Il numero e l'entità dei vincoli variano in base ai parametri presenti nell'espressione del predittore $\eta(x,t)$, anche se in alcuni casi, come per il modello di Cairns et al., il modello può essere identificabile senza la necessità di imporre condizioni aggiuntive sui parametri¹⁷.

La maggior parte dei modelli di mortalità proposti in letteratura appartiene alla famiglia dei modelli GAPC. Tra essi, si segnalano la versione originale del modello Lee-Carter (1992), l'estensione del modello Lee-Carter di Brouhns et al. (2002), il modello Renshaw-Haberman (2006) e il modello Cairns-Blake-Dowd originale (2006).

Nei paragrafi successivi si procederà con la descrizione dei modelli principali sopra citati, concentrandosi in particolare sul modello Lee-Carter, considerato un riferimento centrale nella letteratura sulla proiezione della mortalità.

3.1 Il modello Lee Carter

Il modello è stato introdotto da Ronald Lee e Lawrence Carter in un articolo del 1992 pubblicato sul *Journal of the American Statistical Association*. Esso presenta una struttura estremamente semplice da un punto di vista applicativo, ma allo stesso tempo è in grado di descrivere il fenomeno della mortalità con buona accuratezza. Si tratta di un modello puramente estrapolativo: non incorpora informazioni di tipo medico, sociale o comportamentale, ma si basa esclusivamente sull'evoluzione storica del fenomeno.

¹⁶ Cfr., Hunt A., Blake D., (2015), p. 46.

¹⁷ Cfr., Burri G., (2023), p. 11.

Il modello Lee Carter è divenuto, negli ultimi decenni, uno degli strumenti più usati da demografi ed attuari per l'analisi e la previsione della mortalità. La sua capacità di descrivere l'evoluzione della mortalità tramite un unico indice temporale si è rivelata particolarmente efficace nella previsione dei *trend* di mortalità, garantendo un'agevole gestione dei dati e una rappresentazione efficace dei miglioramenti nel *trend* stesso, grazie al suo meccanismo endogeno di generazione dei parametri di anno in anno: l'introduzione di nuovi dati consente di correggere la descrizione del fenomeno e di riflettere tempestivamente eventuali variazioni nel suo andamento¹⁸.

Tale modello rientra nella categoria di modelli nei quali l'andamento della mortalità è funzione sia del tempo t che dell'età x .

Come anticipato, viene stimato su dati storici e la stima del parametro che varia nel tempo è prevista come una serie storica stocastica, tramite l'approccio di Box-Jenkins. Sulla base della previsione del generale livello di mortalità, si ricavano poi i tassi specifici per età.

Si procede con la descrizione nel dettaglio del meccanismo di funzionamento del modello: la sua formulazione caratteristica, il processo di stima dei parametri e la procedura di proiezione.

Il modello prevede che il tasso centrale di mortalità $m(x, t)$ abbia un andamento esponenziale per ogni età x e durante l'anno t definito come segue:

$$m(x, t) = \frac{D(x, t)}{E(x, t)} \quad (5)$$

dove $D(x, t)$ è il numero di decessi registrati all'età x durante l'anno t e $E(x, t)$ è il numero di anni-persona (o popolazione media) in ciascuna età x vissuti da individui contemporanei viventi nell'anno t , chiamati esposti al rischio.

In particolare, in tale formula è implicita la distribuzione uniforme dei decessi $D(x, t)$ nel generico anno di calendario t , che equivale all'ipotesi di crescita lineare della popolazione.

Nella sua versione originale il modello è caratterizzato dalla seguente relazione¹⁹:

$$m(x, t) = e^{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}} \quad (6)$$

¹⁸ Cfr., D'Amato V., (2008), p. 26.

¹⁹ Cfr., Lee R. D., Carter L. R., (1992), p. 660.

L'andamento esponenziale del tasso centrale di mortalità ricalca perfettamente il fenomeno della decelerazione: la vita attesa per un soggetto di età x cresce nel tempo, ma la velocità alla quale ciò avviene tende a ridursi.

Con la trasformazione logaritmica, si procede a linearizzare il modello ottenendo l'espressione log-bilineare per il tasso centrale di mortalità²⁰

$$\ln m(x, t) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (7)$$

dove:

- $m(x, t)$ è il tasso centrale di mortalità calcolato per un individuo di età x al tempo t ;
- a_x è la media di $\ln m(x, t)$ lungo l'intero periodo di osservazione e descrive in media il comportamento del tasso centrale di mortalità per ogni età x (cattura le differenze di mortalità per età);
- k_t è un indice di mortalità nel tempo che mostra, per tutte le età insieme, come il fenomeno della mortalità si è evoluto nel passato, catturando, così, il *trend* generale della mortalità (il valore stimato di k_t è la componente dipendente dal tempo che rappresenta il livello generale di mortalità in un particolare anno t e questa componente è modulata dalla componente specifica per età b_x , al fine di determinare la variazione dell'intensità di mortalità);
- b_x è un parametro di sensitività volto a spiegare per ogni età come $\ln m(x, t)$ reagisce al trascorrere del tempo cogliendo il fatto che la mortalità diminuisce a tassi differenti a seconda dell'età (altro non è che la componente specifica per età che fornisce indicazioni sulla sensibilità di $\ln m(x, t)$ alle variazioni dell'indice temporale k_t);
- $\varepsilon_{x,t}$ rappresenta il termine di errore, con media zero e varianza costante $\sigma_\varepsilon < \infty$, che cattura la parte di mortalità non colta dal modello.

Quindi, il predittore di tale modello $\eta(x, t) = \ln m(x, t) = a_x + b_x k_t$ prevede di assumere che esista una funzione statica dell'età α_x , un unico termine non parametrico di età-periodo ($N = 1$) e nessun effetto coorte²¹.

L'implementazione di tale modello include innanzitutto la stima dei parametri partendo dai tassi di mortalità osservati e successivamente la proiezione della mortalità stimata.

²⁰ Cfr., Lee R. D., Carter L. R., (1992), p. 660.

²¹ Cfr., Burri G., (2023), p. 13.

I tassi di decesso relativi a una certa popolazione sono osservati con cadenza annuale, nel corso di un determinato periodo. Dopo di che, si procede alla costruzione della matrice $M(x, t)$ dei logaritmi naturali degli stessi, di righe pari al numero delle età considerate e di colonne pari agli anni di calendario, il cui generico elemento è il tasso di log-mortalità $\ln m(x, t) = \mu(x, t)$.

Al fine di stimare il modello per una data matrice di tassi mortalità $m(x, t)$, occorre risolvere l'equazione $\ln m(x, t) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$ imponendo i seguenti vincoli sui parametri e garantendo la loro identificabilità²²:

$$\sum_t k_t = 0 \qquad \sum_x b_x = 1. \qquad (8)$$

Dati i tassi di mortalità osservati, si determinano i parametri ottimali per il modello di mortalità mediante il processo di stima degli stessi, i cui passaggi sono di seguito illustrati²³.

La componente dell'indice temporale può essere calcolata come segue:

$$\sum_x \ln m(x, t) - a_x = \sum_x b_x k_t. \qquad (9)$$

Data l'indipendenza di k_t dall'età x , l'equazione può essere riscritta come:

$$\sum_x \ln m(x, t) - a_x = k_t \sum_x b_x. \qquad (10)$$

Usando il vincolo $\sum_x b_x = 1$, si procede alla stima di k_t :

$$k_t = \sum_x \ln m(x, t) - a_x. \qquad (11)$$

Con i valori k_t stimati, b_x può essere stimato facilmente moltiplicando $\ln m(x, t) - a_x = b_x k_t$ per k_t e sommando per t si ottiene:

$$\sum_t (\ln m(x, t) - a_x) k_t = \sum_t b_x k_t^2. \qquad (12)$$

Dato che b_x è indipendente da t , si ricava b_x :

$$b_x = \frac{\sum_t (\ln m(x, t) - a_x) k_t}{\sum_t k_t^2}. \qquad (13)$$

²² Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 9.

²³ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 10.

Inoltre, k_t può essere modellato tramite un *random walk with drift*, poiché tale metodo si adatta molto bene a questo caso particolare. Per diversi t , si assume che $(k_t - k_{t-1})$ sia distribuito in modo indipendente e identico, seguendo una distribuzione normale con media c e deviazione *standard* σ , ovvero $(k_t - k_{t-1}) \sim N(c, \sigma^2)$.

In riferimento al processo di previsione, il modello assume la costanza di a_x e b_x . L'unico parametro da proiettare è k_t attraverso una procedura Box - Jenkins che serve a determinare un appropriato ARIMA. Lee e Carter ottengono per l'indice di mortalità k_t un *trend* lineare sulla base di un ARIMA(0,1,0), che ben si adatta alla rappresentazione dell'evoluzione dell'indice nel tempo. Si richiama dunque per k_t il seguente modello: $k_t = k_{t-1} - x + \varepsilon_t^{24}$. Per quanto riguarda l'intervallo di confidenza, si definisce lo *standard error* associato ad s periodi di previsione come segue (Lee e Carter, 1992):

$$\hat{\sigma}_h = \sigma_1 \cdot \sqrt{h} \text{ con } 2 \leq h \leq s \text{ e } h \in N \quad (14)$$

dove $\hat{\sigma}_1$ è lo *standard error* della stima che indica l'incertezza associata ad un anno di previsione.

Si può chiaramente notare come, all'aumentare dell'orizzonte temporale di previsione, lo *standard error* aumenti secondo la radice quadrata dell'orizzonte stesso.

Avendo così proiettato k_t e sulla base della costanza di a_x e b_x , si possono ottenere dalla relazione caratteristica gli $m(x, t)$ per ogni età x e in ogni epoca t . Infine a partire dagli $m(x, t)$ si può risalire alle $q(x, t)$ attraverso la nota formula²⁵:

$$q(x, t) \approx \frac{2 \cdot m(x, t)}{2 + m(x, t)} \quad (15)$$

oppure equivalentemente nel seguente modo:

$$q(x, t) \approx 1 - e^{-m(x, t)}. \quad (16)$$

²⁴ Cfr., Lee R. D., Carter L.R., (1992), p. 663.

²⁵ Cfr., Burri G., (2023), p. 15.

3.2 Estensione del modello LC al modello Poisson log-bilineare di Brouhns et al.

Il modello Lee Carter rappresenta un punto di riferimento fondamentale nella modernizzazione e previsione della sopravvivenza umana. Esso presenta i seguenti vantaggi²⁶:

- l'esiguo numero di parametri e la loro semplice interpretazione demografica;
- l'utilizzo tanto nella letteratura accademica quanto nelle applicazioni pratiche, che ha fatto sì che il modello venisse considerato nel settore uno dei *benchmark* di riferimento;
- il fatto che per un dato valore del parametro k_t venga definito un *set* di probabilità di morte che consente la derivazione di un'intera tavola di mortalità.

Tuttavia, è possibile identificare tre altrettanti limiti²⁷:

- il modello ha bisogno di due vincoli sui parametri b_x e k_t per poter essere identificato;
- il parametro b_x potrebbe essere negativo per alcune età in corrispondenza delle quali la mortalità tende ad aumentare;
- il modello potrebbe non rivelarsi efficace per età molto avanzate a causa dell'esigua disponibilità di dati osservati.

L'ultimo limite scaturisce dall'assunzione nel modello di Lee-Carter di omoschedasticità dei termini di errori casuali $\varepsilon_{x,t}$, ovvero caratterizzati dalla stessa varianza al cambiare dell'età x e dell'anno di calendario t . Naturalmente, tale ipotesi sembra essere poco realistica per età elevate, dove si presenta una maggiore variabilità dovuta essenzialmente all'esiguo numero di decessi. Pertanto, la proposta di Brouhns et al. nel 2002 ha consentito di perfezionare il modello Lee-Carter andando a sostituire la componente erratica additiva $\varepsilon_{x,t}$ con una variazione casuale del numero di decessi di tipo Poisson²⁸.

L'assunzione poissoniana implica che il numero dei decessi all'età x nell'anno di calendario t è dato da²⁹:

$$D(x, t) \sim \text{Poisson} (E(x, t)m(x, t)) \quad (17)$$

dove $E(x, t)$ è il numero di esposti al rischio, come già definito.

²⁶ Cfr., Burri G., (2023), p. 16.

²⁷ Cfr., Burri G., (2023), p. 16.

²⁸ Cfr., Brouhns N., Denuit M., Vermut J. K., (2002), p. 378.

²⁹ Cfr., Brouhns N., Denuit M., Vermut J. K., (2002), p. 378.

Si tratta dell'unica modifica al modello LC precedentemente descritto, in quanto si assume sempre che il logaritmo dell'intensità di mortalità abbia la stessa struttura bilineare, ma senza il termine di errore³⁰:

$$\ln m(x, t) = a_x + b_x k_t \quad (18)$$

I parametri a_x , b_x , k_t sono determinati massimizzando la massima verosimiglianza ed il loro significato non varia. Anche le fasi successive di stima dei parametri e di previsione rimangono analoghe a quelle descritte per il modello base³¹.

Dunque, l'estensione del modello originale Lee-Carter proposta da Brouhns et al. aderisce meglio alla realtà in quanto la variazione casuale del numero di decessi segue una distribuzione di tipo Poisson, rendendo il modello più adeguato per le età elevate e capace di cogliere le variazioni casuali del fenomeno nonostante i pochi dati disponibili in concomitanza di tali età.

3.3 Modelli multifattoriali

Al fine di apportare miglioramenti relativi alle singole età, sono stati successivamente proposti altre due estensioni al modello LC originale di tipo multifattoriale³².

La prima estensione formulata da Renshaw ed Haberman nel 2003 prevede di introdurre due componenti temporali al fine di rappresentare, con maggiore flessibilità rispetto al modello base ad un solo fattore, l'evoluzione della mortalità.

Il modello descrive il logaritmo del tasso di mortalità come segue³³

$$\ln m(x, t) = b_x^{(1)} k_t^{(1)} + b_x^{(2)} k_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (19)$$

dove:

- $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$ sono due effetti relativi al periodo t e tra loro dipendenti;
- $b_x^{(1)}$ e $b_x^{(2)}$ sono i coefficienti di sensibilità per età che misurano come ciascun fattore incide sulle diverse età.

³⁰ Cfr., Brouhns N., Denuit M., Vermut J. K., (2002), p. 378.

³¹ Cfr., Brouhns N., Denuit M., Vermut J. K., (2002), pp. 378-379.

³² Cfr., Cairns A. J., Blake D., Dowd K., (2008), p. 93.

³³ Cfr., Cairns A. J., Blake D., Dowd K., (2008), p. 93.

Nel 2006 Cairns, Blake e Dowd hanno rappresentato la mortalità concentrandosi sulle fasce di età più avanzate (dai 60 agli 89 anni) utilizzando un modello più parsimonioso fondato sul logit della probabilità di morte piuttosto che sul logaritmo del tasso centrale di mortalità³⁴

$$\text{logit } q_x(t) = \log \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}x \quad (20)$$

dove:

- $\log \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}$ è nota come funzione logit;
- $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ è assunto essere un processo *random walk* bivariato con *drift*.

Questo modello a due fattori temporali prevede che il logaritmo degli *odds* assuma un andamento lineare rispetto all'età x per un periodo di tempo pari a t anni di calendario.

Spesso, anziché utilizzare la variabile x , si ricorre ad una variabile centrata, ossia $(x - \bar{x})$, giungendo al seguente modello³⁵:

$$\text{logit } q_x(t) = \log \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}). \quad (21)$$

L'effetto periodo viene catturato dai due predittori $b_x^{(1)} = 1$ e $b_x^{(2)} = (x - \bar{x})$.

Dalla (20) si ricava:

$$q_x(t) = \frac{e^{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}x}}{1 + e^{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}x}} \quad (22)$$

dove $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$ costituiscono due processi stocastici che rappresentano una serie temporale bivariata e governano la proiezione dei tassi di mortalità.

Nello specifico:

- $k_t^{(1)}$ misura come varia il livello di mortalità nel tempo e, in genere, decresce nel tempo come nel modello Lee-Carter, mostrando come i tassi di mortalità si riducano per tutte le età;

³⁴ Cfr., Burri G., (2023), p. 19.

³⁵ Cfr., Cairns A. J., Blake D., Dowd K., (2008), p. 93.

- $k_t^{(2)}$ determina la variazione della pendenza della mortalità nel tempo e aumenta nel tempo se, durante il periodo di osservazione dei dati, gli incrementi di mortalità sono più elevati in corrispondenza di età giovanili rispetto alle età più anziane.

Rispetto al modello Lee-Carter, il modello di Cairns et al. non pone alcun problema di identificabilità dei parametri, motivo per cui non è necessario imporre vincoli e, in aggiunta, mostra cambiamenti nei tassi di mortalità non perfettamente correlati con le età. Al fine di stimare i parametri del modello, è possibile seguire la procedura sperimentata da Renshaw e Haberman (2011) e assumere una distribuzione Binomiale del numero dei decessi, utilizzando una *log-link function*. In particolare, i parametri del modello di Cairns et al. sono stimati mediante il metodo dei minimi quadrati ordinari.

Si consideri il seguente modello di regressione lineare³⁶

$$\log \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}x + \varepsilon_{x,t} \quad (23)$$

i cui termini di errore sono indipendenti e identicamente distribuiti come una variabile aleatoria Normale a media nulla e varianza σ_ε^2 .

Occorre definire una funzione obiettivo da minimizzare, che consente la stima dei parametri temporali³⁷:

$$\Theta_t(k) = \sum_{x=x_1}^{x_n} \left(\log \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} - k_t^{(1)} + k_t^{(2)}x \right)^2. \quad (24)$$

Per produrre le previsioni sulla mortalità³⁸, occorre innanzitutto calibrare il modello parametrico sulla matrice dei dati di mortalità organizzati per età x e per anno di calendario t . In seguito, si ricorre ad un opportuno modello di serie storiche ARIMA(1,1,0) con intercetta, al fine di proiettare i parametri.

Per tale modello, si assume la seguente dinamica per i parametri $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$

$$\begin{cases} k_t^{(1)} = k_{t-1}^{(1)} + c_1 + v_t^{(1)} \\ k_t^{(2)} = k_{t-1}^{(2)} + c_2 + v_t^{(2)} \end{cases} \quad (25)$$

³⁶ Cfr., Burri G., (2023), p. 20.

³⁷ Cfr., Burri G., (2023), p. 20.

³⁸ Cfr., Burri G., (2023), p. 21.

con v_t^1, v_t^2 termini di errore indipendenti e normalmente distribuiti e c_1, c_2 termini di *drift*.

Successivamente, occorre costruire la matrice di varianze e covarianze

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

i cui generici elementi sono costituiti da:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{k}_t^{(i)} - \hat{k}_{t-1}^{(i)} - d_i)^2 \quad (27)$$

$$\hat{\sigma}_{1,2} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{h=t_1}^{t_n-1} \sum_{t=t_1}^{t_n-1} (\hat{k}_{t+1}^{(1)} - \hat{k}_h^{(1)} - \hat{d}_1)(\hat{k}_{t+1}^{(2)} - \hat{k}_h^{(2)} - \hat{d}_2). \quad (28)$$

Quindi, la stima del *drift* del processo ARIMA(1,1,0) risulta essere:

$$\hat{d}_i = \frac{\hat{k}_{t_n}^{(i)} - \hat{k}_{t_1}^{(i)}}{t_n - t_1}, \quad i = 1, 2. \quad (29)$$

4. Il trasferimento del rischio di longevità al mercato finanziario

L'aumento dell'aspettativa di vita costituisce una sfida crescente per le assicurazioni vita e i sistemi previdenziali, poiché determina una maggiore esposizione delle compagnie agli impegni finanziari nei confronti degli assicurati, aggravando la sostenibilità degli obblighi a lungo termine³⁹.

Trattandosi di un rischio sistematico, la diversificazione del portafoglio non si configura come la strategia più adeguata per mitigare il rischio di longevità.

Le tecniche attualmente messe in campo per mitigare tale rischio possono essere ricondotte a due metodi:

- la gestione del rischio in proprio, attraverso modelli attuariali prudentiali;
- il trasferimento del rischio a soggetti terzi.

La principale tecnica di gestione “interna” o “in proprio” si fonda sull'adozione di tavole di mortalità proiettate, che incorporano scenari futuri di sopravvivenza e consentono di accantonare riserve tecniche più coerenti con l'evoluzione demografica attesa. Questa prassi consente di prezzare in modo prudente i prodotti assicurativi e costituire margini di sicurezza contro l'aumento dell'aspettativa di vita.

Nel caso, invece, in cui il rischio di longevità venga trasferito all'esterno a soggetti terzi, il mercato offre oggi diverse opportunità: la riassicurazione, strumenti finanziari legati alla longevità e il trasferimento del rischio a collettività di assicurati.

La riassicurazione rappresenta uno dei meccanismi più tradizionali attraverso cui le compagnie assicurative cedono a riassicuratori specializzati parte dei propri rischi, inclusi quelli biometrici come la longevità, operando una riduzione della propria esposizione aleatoria⁴⁰.

Gli strumenti finanziari legati alla longevità, invece, sono di più recente diffusione e consentono il trasferimento del rischio di longevità ai mercati dei capitali. All'interno di questa categoria rientrano principalmente strumenti come i *longevity bonds* e i *survivor swaps*:

³⁹ Cfr., Barrieu P., Bensusan H.m El Karoui N., Hillairet C., Loisel S., Ravanelli C., Salhi Y., (2012), p.16.

⁴⁰ Cfr., Pitacco E., (2022), p. 607.

- i *longevity bonds* sono obbligazioni i cui *coupon* o il capitale rimborsato sono legati a un indice di sopravvivenza di una popolazione. Quindi, se la popolazione vive più a lungo rispetto al previsto, si potrebbe verificare che il rendimento dell'obbligazione o il capitale rimborsato si riducano;
- i *survivor swaps* sono contratti derivati in cui due controparti si scambiano flussi di cassa basati su tassi di mortalità o sopravvivenza. Ad esempio, una compagnia assicurativa paga un flusso di cassa fisso a fronte del quale riceverà un flusso di cassa variabile in quanto legato alla sopravvivenza effettiva di una determinata coorte.

Infine, i contratti con condivisione del rischio biometrico prevedono che una parte del rischio di longevità venga effettivamente “condiviso” con gli stessi assicurati. Alcune forme di rendite variabili o di piani pensione collettivi, ad esempio, possono adeguare i benefici in base all'esperienza di mortalità del gruppo, trasferendo così una quota del rischio dall'assicuratore agli stessi assicurati.

Tra gli strumenti finanziari citati, i *survivor bonds* rivestono particolare interesse poiché, pur non costituendo in senso stretto strumenti di cartolarizzazione, possono essere collocati all'interno di operazioni di cartolarizzazione sintetica del rischio di longevità, soprattutto quando vengono emessi attraverso una società veicolo (SPV) e strutturati in forma di titoli negoziabili sui mercati dei capitali.

Per tale motivo, si fornisce di seguito una breve illustrazione del quadro teorico della cartolarizzazione, con un focus sulla cartolarizzazione delle polizze vita. Successivamente, l'attenzione sarà rivolta al meccanismo di funzionamento degli *inverse survivor bonds*, oggetto dell'analisi empirica presentata nel capitolo successivo.

Il processo di cartolarizzazione comporta l'isolamento di un *pool* di attività o diritti su un insieme di flussi di cassa e il riconfezionamento dell'attività o dei flussi di cassa in titoli che vengono negoziati sui mercati dei capitali⁴¹ con l'obiettivo di diversificare il rischio.

La cartolarizzazione continua a rappresentare un tema di grande interesse sia per i fornitori di servizi finanziari che per le compagnie assicurative.

Nel settore bancario la cartolarizzazione ha raggiunto livelli molto elevati prima della crisi finanziaria ed è utilizzata per cedere in blocco portafogli di crediti (mutui, prestiti, ecc.) a

⁴¹ Cfr., Cummins J. D., (2004), p. 1.

una società veicolo (SPV), che li “trasforma” in titoli da collocare sul mercato. Questa pratica è disciplinata in Italia dalla Legge 130/1999, e consente alle banche di ottenere liquidità immediata e trasferire il rischio di credito agli investitori.

Nel ramo assicurativo, e in particolare nel ramo vita, l’atteggiamento delle compagnie di assicurazione vita è ancora molto prudente nei confronti di tali operazioni, nonostante i potenziali benefici. Nello specifico, la cartolarizzazione “vera” (detta *true sale* in quanto prevede la cessione effettiva) risulta poco praticabile per motivi regolamentari e operativi: i contratti assicurativi sono soggetti a vigilanza, legati alla credibilità dell’assicuratore, e hanno orizzonti temporali molto lunghi, per cui è improbabile che un'autorità permetta il passaggio diretto dei contratti a investitori privi di licenza assicurativa.

La forma più diffusa nel ramo vita è la cartolarizzazione sintetica, in cui il rischio, ma non l'attività sottostante, viene trasferito a investitori terzi. In questi casi, si costituisce una SPV che raccoglie capitale dagli investitori e funge da intermediario nei flussi di cassa tra questi ultimi e l’assicuratore. Il contratto assicurativo resta nel bilancio della compagnia (si parla più nel dettaglio di cartolarizzazione sintetica da bilancio - *balance sheet synthetic securitisation*), ma il rischio connesso può essere trasferito (totalmente o parzialmente) mediante obbligazioni strutturate o strumenti derivati⁴².

Le cartolarizzazioni legate al settore assicurativo hanno subito un'accelerazione negli anni '90 con lo sviluppo di obbligazioni e opzioni legate a rischi catastrofici (*CAT bond*) e un volume crescente di cartolarizzazioni di polizze vita e rendite. Tuttavia, il volume delle transazioni assicurative rimane modesto rispetto ad altri tipi di titoli garantiti da attività (noti come ABS)⁴³.

Secondo la letteratura⁴⁴, i benefici che derivano dalla cartolarizzazione sono:

- riduzione del costo del capitale e miglioramento del *return on equity* (ROE);
- possibilità di trasformare profitti latenti in liquidità immediata;
- alternativa al finanziamento tradizionale;
- maggiore trasparenza nella valutazione delle attività e passività iscritte in bilancio, tipicamente caratterizzate da un certo grado di illiquidità, complessità e opacità informativa;

⁴² Cfr., Kaya O., (2017), p. 2.

⁴³ Cfr., Cowley e Cummins J. D. (2005), p. 194.

⁴⁴ Cfr., Cowley e Cummins J. D. (2005), p.194; Lin e Cox (2008), p. 629.

- diversificazione del rischio per gli investitori istituzionali: la cartolarizzazione nel ramo vita introduce una nuova classe di attività con una correlazione molto bassa con gli altri investimenti dei tradizionali mercati finanziari (la speranza di vita non è influenzata dall'andamento delle curve dei rendimento o dei mercati azionari).

Inoltre, secondo quanto previsto dalla normativa Solvency II⁴⁵, ai fini della determinazione del requisito patrimoniale, la cartolarizzazione può essere trattata in modo analogo alla riassicurazione.

In conclusione, sebbene la cartolarizzazione del rischio vita non abbia ancora raggiunto la diffusione osservata nel settore bancario, essa rappresenta una frontiera promettente per il trasferimento del rischio di longevità ai mercati finanziari. Strumenti come i *longevity bonds* e i *survivor swaps*, se strutturati attraverso SPV, possono essere considerati forme di cartolarizzazione sintetica in quanto permettono agli investitori di assumere esposizioni legate a variabili biometriche, senza gestire direttamente i contratti assicurativi.

Nella sezione successiva si procede ad esaminare nel dettaglio il funzionamento degli *inverse survivor bonds*, strumenti innovativi che rappresentano un esempio concreto di trasferimento del rischio di longevità mediante soluzioni finanziarie avanzate.

4.1 Survivor bonds

La cartolarizzazione del rischio di longevità è relativamente più economica e meno sopravvalutata rispetto alla riassicurazione e pertanto, gli assicuratori possono considerarla come una valida alternativa alla riassicurazione per coprire il rischio di longevità.

I *survivor bonds* costituiscono un esempio di cartolarizzazione del rischio di longevità.

Si tratta di obbligazioni i cui pagamenti cedolari futuri dipendono dalla percentuale della popolazione totale in età pensionabile alla data di emissione che è ancora in vita alle date future di pagamento delle cedole. Ad esempio, se l'obbligazione è stata emessa nel 2007 utilizzando come base una coorte di persone di 65 anni, allora il pagamento della cedola

⁴⁵ Cfr., Cummins J. D., Trainor P., (2009), p. 489.

nel 2017 dovrebbe essere proporzionale alla frazione di quegli uomini di 65 anni che sono sopravvissuti fino ai 75 anni.

Essi sono emessi dalla *Special Purpose Vehicles* (SPV) con lo scopo non solo di trasferire i rischi sottostanti di mortalità e longevità al mercato dei capitali, ma anche di offrire nuove opportunità agli investitori. Blake e Burrows (2001) hanno suggerito che i governi dovrebbero aiutare le compagnie assicurative a coprire il rischio di mortalità emettendo *survivor bonds* (in tal caso, la SPV sarebbe rappresentata dal governo).

Le compagnie di assicurazione vita vendono rendite vitalizie e al contempo emettono *survivor bonds*. Se i decessi effettivi risultano inferiori rispetto a quanto atteso, le compagnie assicurative dovrebbero erogare rendite per periodi più lunghi, ma, in cambio, ricevono pagamenti compensativi resi possibili da una riduzione dei pagamenti cedolari dei loro *survivor bonds* corrisposti agli investitori.

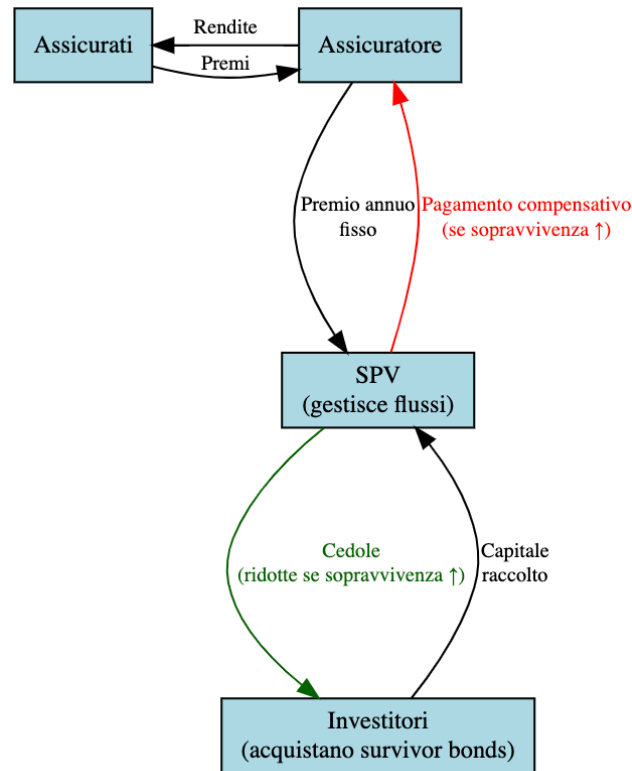
Per quest'ultimi, i *survivor bonds* possono rappresentare una scelta d'investimento alternativa, ma altrettanto interessante. A causa del rischio intrinseco, di solito sono venduti con uno sconto. Di conseguenza, a parità di tasso d'interesse e tasso cedolare, il prezzo di un *survivor bond* sarà inferiore rispetto a quello di un'obbligazione tradizionale (*straight bond*). Inoltre, per offrire agli investitori diverse opzioni in base alle loro preferenze di rischio, solitamente vengono utilizzate strutture flessibili a *tranche* applicate alla distribuzione della probabilità di sopravvivenza. Gli investitori possono acquistare *survivor bonds* per ottenere rendimenti più elevati o per diversificare il proprio portafoglio.

Suddividendo la distribuzione della probabilità di sopravvivenza in *tranche*, gli emittenti possono soddisfare meglio le preferenze di rischio degli investitori. Ad esempio, si può progettare un *survivor bond* con 4 *tranche*, in cui gli investitori della *tranche* 1 ricevono la protezione minore: se il tasso di sopravvivenza della coorte risulta superiore alle attese, sono i primi a perdere i pagamenti cedolari. Questo maggiore rischio è compensato da un prezzo di acquisto dell'obbligazione più basso.

È proprio la tecnica delle *tranche* basate sui percentili della distribuzioni di probabilità di sopravvivenza a rappresentare la base per la determinazione del prezzo dei *survivor bonds*.

Di seguito si descrivono le entità coinvolte nei *survivor bonds* e il relativo meccanismo di funzionamento.

Figura 3: Struttura dei *survivor bonds*. Fonte: Choi Y. e Kim C., (2009), p.5. Elaborazione personale tramite R (*script* riportato nell'Appendice grafica 8.2).



I soggetti coinvolti nel processo di emissione dei *survivor bonds* sono:

- gli assicurati che hanno acquistato una rendita vitalizia;
- la compagnia di assicurazione sulla vita che riceve i premi e assume inizialmente il rischio di longevità;
- gli investitori acquirenti dei *survivor bonds* sul mercato dei capitali, che, in cambio di potenziali rendimenti, si assumono parte del rischio di longevità;
- la *Special Purpose Vehicle* (SPV - società veicolo), ovvero un'entità giuridica indipendente che emette i *survivor bonds*, raccoglie fondi dagli investitori e gestisce i flussi di cassa.

Il meccanismo di funzionamento è il seguente:

- l'assicuratore vende i prodotti di rendita vitalizia agli assicurati e incassa i premi assicurativi;

- la SPV (*Special Purpose Vehicle*) svolge un ruolo importante di intermediazione tra l'assicuratore e gli investitori dei mercati finanziari. Essa emette *survivor bonds* sul mercato, raccoglie fondi dagli investitori e investe il ricavato in titoli obbligazionari privi di rischio, generando un flusso di cassa stabile e sicuro;
- alla scadenza, la SPV rimborsa il capitale agli investitori dei *survivor bonds*, mantenendo una posizione di flusso di cassa netto pari a zero;
- l'assicuratore paga un premio annuo fisso alla SPV, affinché quest'ultima possa erogare un pagamento compensativo all'assicuratore nel caso si verifichi una contingenza, ovvero che più persone sopravvivano rispetto a quanto previsto;
- gli investitori sopportano il rischio di una riduzione dei pagamenti cedolari futuri. Si tratta di un rischio intrinseco che comporta la vendita dei *survivor bonds* a un prezzo inferiore rispetto alle obbligazioni tradizionali e tale prezzo varia in base alla *tranche* acquistata⁴⁶.

Dopo aver descritto i soggetti coinvolti e il meccanismo di funzionamento degli *inverse survivor bonds*, si procede ad analizzare i vantaggi e gli svantaggi per ciascuna parte in relazione ai diversi scenari della mortalità.

Nel caso in cui la mortalità effettiva risulti inferiore a quella attesa, il rischio di longevità si materializza e gli assicurati vivono più a lungo rispetto alle proiezioni demografiche impiegate per il *pricing* degli *inverse survivor bonds*.

Per la compagnia di assicurazione vita, si generano flussi in uscita maggiori, dovuti ai pagamenti delle rendite corrisposti agli assicurati per un periodo più lungo. A fronte del premio fisso pagato alla SPV, la compagnia riceve un flusso compensativo in entrata. Il rischio di longevità è così efficacemente mitigato.

In questo scenario, gli investitori ricevono cedole ridotte e il rimborso certo del capitale alla scadenza. Per loro si materializza il rischio intrinseco assunto e ottengono un rendimento inferiore al previsto, agendo da riassicuratori del rischio di longevità.

La SPV eroga il pagamento compensativo all'assicuratore, finanziandolo con il premio fisso ricevuto e con la riduzione delle cedole dovute agli investitori. Svolge il ruolo di

⁴⁶ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), pp. 3-5.

intermediario neutrale, mantenendo un saldo netto pari a zero e non assumendo alcuna perdita.

Nel caso in cui la mortalità effettiva risulti superiore a quella attesa, gli assicurati vivono meno a lungo rispetto alle proiezioni, per cui il rischio di longevità non si materializza.

La compagnia di assicurazione eroga rendite per un periodo più breve, realizzando così un utile tecnico, ma dovendo comunque sostenere il costo del premio fisso da corrispondere alla SPV per una protezione che non è stata necessaria.

Gli investitori ricevono cedole piene, oltre al rimborso del capitale a scadenza. Dunque, il rendimento risulta massimo, poiché il rischio assunto non si è concretizzato.

La SPV, analogamente allo scenario precedente, svolge il ruolo di intermediario finanziario, mantenendo un saldo netto finale pari a zero.

Di seguito, sulla base dell'approccio di Choi e Kim (2009), si illustrano i passaggi per progettare un particolare tipo di *survivor bond*, ovvero l'*inverse survivor bond*, chiamato così in quanto l'ammontare delle cedole risulta essere inversamente proporzionale all'ammontare delle perdite eccedenti.

1. A partire dal modello di proiezione della mortalità di Lee-Carter, si simulano le probabilità di sopravvivenza e, successivamente, si definiscono i percentili della distribuzione di probabilità di sopravvivenza. Ad esempio, si può immaginare di definire 4 *tranche* come nella Tabella 1 che segue⁴⁷.

⁴⁷ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 17.

Tabella 1: Definizione delle *tranche* basate sui percentili. Fonte: Choi Y., Kim C., (2009), p. 17. Elaborazione personale.

<i>Tranche</i>	1	2	3	4
Caratteristiche	<i>Tranche</i> molto rischiosa	<i>Tranche</i> rischiosa	<i>Tranche</i> moderatamente rischiosa	<i>Tranche</i> poco rischiosa
Percentili della distribuzione delle probabilità di sopravvivenza	[50° - 60° percentile]	[60° - 75° percentile]	[75° - 90° percentile]	[90° - 99° percentile]

Si nota come più alto è il percentile, minore è il rischio per gli investitori in quanto più bassa è la probabilità di subire perdite elevate.

Si tratta di una struttura molto intuitiva che consente all'emittente di progettare i titoli e calcolare i prezzi dei *survivor bonds* per tutte le *tranche*.

Una configurazione di questo tipo viene chiamata “*tailor-made*“, ovvero “su misura” in quanto offre agli investitori la flessibilità di scegliere la *tranche* che meglio si adatta alla loro preferenza di rischio: coloro i quali sono più propensi al rischio, possono puntare a cedole più elevate scegliendo la *tranche* 1; viceversa, chi è più avverso al rischio può scegliere una *tranche* come la 4, molto simile a un'obbligazione tradizionale (*straight bond*).

2. Sia $L_{x+t}^{(j)}$ la perdita eccedente per gli investitori della *tranche* j al tempo t , definita come⁴⁸

$$L_{x+t}^{(j)} = [l_{x+t} - l_{x+t}^{(j-1)}]^+ - [l_{x+t} - l_{x+t}^{(j)}]^+ \quad (30)$$

dove:

- l_{x+t} numero di sopravvissuti;
- $l_{x+t}^{(j-1)}$ percentile inferiore (punto di attacco della *tranche* j);
- $l_{x+t}^{(j)}$ percentile superiore (punto di stacco della *tranche* j);
- $(\cdot)^+$ funzione parte positiva, ovvero $\max(\cdot, 0)$.

⁴⁸ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 18.

In modo equivalente, possiamo riscrivere la formula (30) come segue:

$$L_{x+t}^{(j)} = \min(\max(l_{x+t} - l_{x+t}^{(j-1)}, 0), l_{x+t}^{(j)} - l_{x+t}^{(j-1)}) . \quad (31)$$

La funzione $\max()$ assicura non vi siano perdite sotto il punto di attacco, mentre la funzione $\min()$ impone un tetto alla perdita, che non può superare l'intervallo tra i due percentili.

La formula garantisce che:

- se i sopravvissuti sono minori del percentile inferiore, non c'è perdita per la *tranche*;
- se i sopravvissuti sono oltre il percentile superiore, la *tranche* subisce la perdita massima;
- se i sopravvissuti sono tra i due percentili, la *tranche* assorbe parte della perdita in modo proporzionale.

3. Qualora si verifichi l'ultimo caso (sopravvissuti tra i due percentili), è necessario definire un fattore proporzionale $\Lambda_{x+t}^{(j)}$ per ogni *tranche* j ⁴⁹:

$$\Lambda_{x+t}^{(j)} = \frac{L_{x+t}^{(j)}}{l_{x+t}^{(j)} - l_{x+t}^{(j-1)}} \quad \text{con } 0 \leq \Lambda_{x+t}^{(j)} \leq 1. \quad (32)$$

4. Si definisce con $C_{x+t}^{(j)}$ l'ammontare della cedola per ciascuna *tranche* j in modo tale che sia inversamente proporzionale all'ammontare delle perdite o al numero dei sopravvissuti:

$$C_{x+t}^{(j)} = (1 - \Lambda_{x+t}^{(j)})F \cdot c \quad (33)$$

dove $c^{(j)}$ è il tasso cedolare specificato al momento dell'emissione dell'obbligazione e $C_{x+t}^{(j)}$ è una variabile aleatoria il cui valore dipende dalla distribuzione delle perdite e può variare da 0 (quando la probabilità di sopravvivenza effettiva supera il punto di distacco, detto *detachment point*) fino al pagamento completo della cedola pari a $F \cdot c$ (quando la probabilità di sopravvivenza effettiva è inferiore al punto di attacco, detto *attachment point*).

⁴⁹ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 19.

5. Il *survivor bond* viene prezzato secondo la seguente equazione generale di valutazione delle obbligazioni⁵⁰

$$P^{(j)} = Fv^T + \sum_{t=1}^T v^t E(C_{x+t}^{(j)}) \quad (34)$$

dove:

- $P^{(j)}$ è il prezzo, al tempo 0, del *survivor bond* a T anni relativo alla *tranche j*;
- T è la scadenza dell'obbligazione;
- F è il valore nominale (o valore facciale) del *bond*;
- v è il fattore di sconto, calcolato con un tasso d'interesse fisso;
- $E(C_t^{(j)})$ è il valore atteso del pagamento cedolare futuro al tempo t per la *tranche j*.

Conclusa l'analisi del quadro teorico degli *inverse survivor bonds*, si procede, nel capitolo successivo, all'analisi empirica volta al *pricing* di questi strumenti finanziari.

⁵⁰ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 19.

5. Analisi empirica

L'analisi empirica che segue adatta l'approccio proposto da Kim e Choi (2009) per la determinazione del prezzo di un *inverse longevity bond* ai dati demografici della popolazione italiana. Tale analisi si basa sull'implementazione di una *routine* di calcolo tramite il *software* statistico R, applicando le fasi operative descritte nel capitolo precedente.

5.1 Analisi dei tassi di mortalità storici della popolazione italiana

La valutazione empirica dell'*inverse longevity bond* richiede la raccolta e l'analisi di dati demografici relativi alla popolazione italiana. I dati utilizzati provengono dall'*Human Mortality Database* (HMD), una banca dati che raccoglie serie storiche dei tassi di mortalità di numerosi paesi, tra cui anche l'Italia. Sono stati utilizzati i tassi di mortalità totali della popolazione suddivisi per età e per anno di calendario, considerando congiuntamente entrambi i generi. L'orizzonte temporale scelto per l'analisi storica copre gli anni 1950-2022, al fine di garantire una base solida per la stima dei modelli previsivi e l'età è stata limitata all'intervallo compreso tra 0 e 104 anni.

I dettagli relativi alla preparazione preliminare dei dati sono riportati nell'Appendice tecnica 9.1.

Si procede, di seguito, con un'analisi descrittiva dei tassi storici di mortalità in Italia.

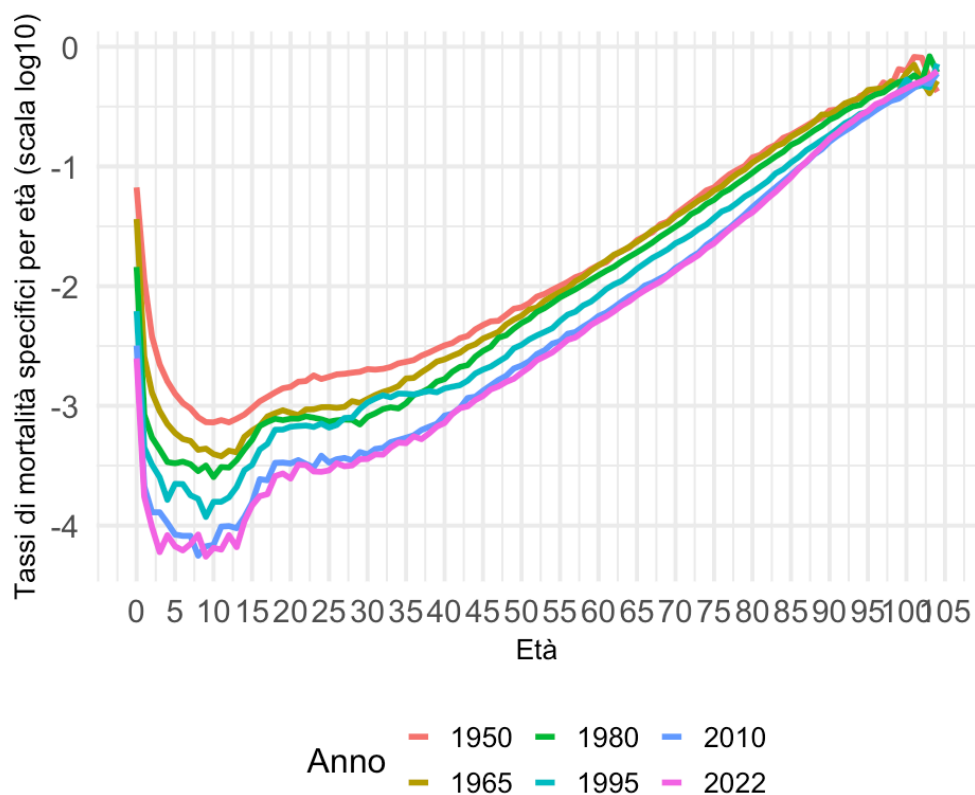
L'evoluzione di tali tassi è rappresentata nel Grafico 1. Sono stati scelti sei anni chiave tra il 1950 e il 2022 al fine di osservare i diversi stadi della transizione demografica e sanitaria: dal secondo dopoguerra all'epoca contemporanea.

In particolare:

- il 1950 è l'inizio del periodo di osservazione, anno caratterizzato da alta mortalità infantile e più bassa aspettativa di vita;
- il 1965 è l'anno della fase avanzata del periodo post-bellico e coincide con l'inizio del boom economico;
- il 1980 è il periodo in cui è in corso la transizione epidemiologica che comporta la riduzione della mortalità per malattie infettive, le quali lasciano il posto a decessi per

- malattie degenerative (tumori, malattie cardiovascolari, diabete) e per malattie dette “*man-made*”, ovvero create dall’uomo (suicidi, incidenti stradali, inquinamento ecc ...);
- il 1995 è caratterizzato da un ulteriore calo della mortalità con conseguente longevità in crescita;
 - il 2010, epoca più recente, caratterizzata da una mortalità molto bassa nelle fasce di età più giovani;
 - il 2022, anno scelto per osservare eventuali effetti post-pandemici. Si nota che gli effetti della pandemia da COVID-19 non emergono in modo marcato, a conferma del rientro della mortalità rispetto ai picchi anomali osservati negli anni 2020 e 2021.

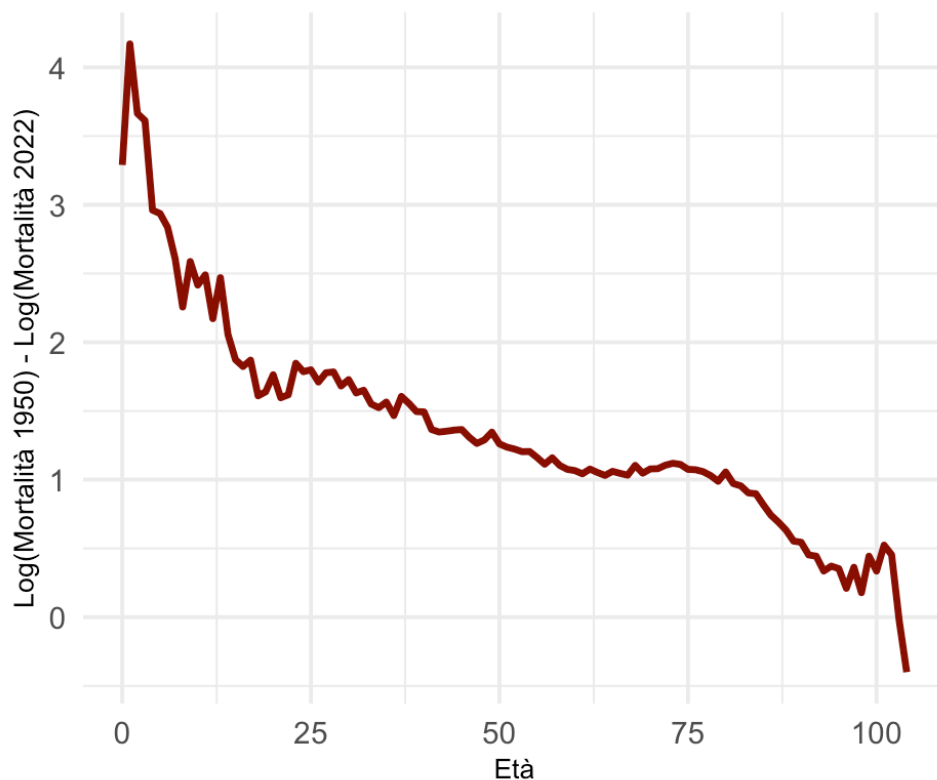
Grafico 1: Andamento dei tassi storici di mortalità in Italia (scala logaritmica). Fonte: *Human Mortality Database*. Elaborazione personale tramite R.



L'utilizzo della scala logaritmica consente di evidenziare i cambiamenti più marcati nel corso degli anni. In particolare, si rileva un drastico calo della mortalità infantile e un progressivo spostamento della mortalità verso le età più avanzate.

Per quantificare il progresso dei tassi di mortalità per età, in un periodo di oltre 70 anni, è possibile rappresentare la differenza logaritmica di tali tassi tra il 1950 e il 2022. Si tratta di un confronto diretto per età, utile per cogliere le età in cui la riduzione della mortalità è stata più marcata.

Grafico 2: Riduzione logaritmica dei tassi di mortalità tra il 1950 e il 2022. Fonte: *Human Mortality Database*. Elaborazione personale tramite R.

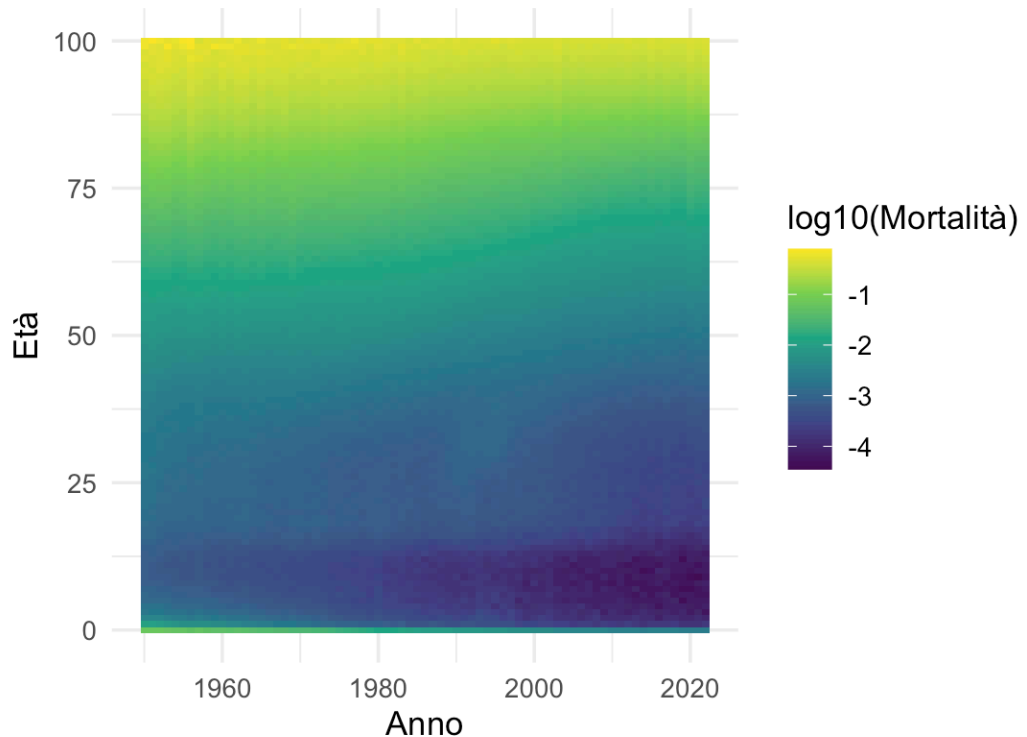


I valori positivi indicano che nel 1950 i tassi di mortalità erano più elevati rispetto al 2022. Il calo più marcato si registra nella fascia di età 0-10 anni, a testimonianza della drastica diminuzione della mortalità infantile e pediatrica, resa possibile dai progressi sanitari, dalle vaccinazioni e dal miglioramento delle condizioni socio-economiche. Anche nella fascia d'età 10-79 anni la riduzione è ancora marcata, ma più contenuta. Oltre gli 80 anni di età, la riduzione persiste per la regola empirica che prevede che la mortalità si riduce più velocemente laddove è più alta, ovvero alle età anziane.

L'*heatmap* dei tassi di mortalità, nota anche come superficie di mortalità, è un'ulteriore rappresentazione grafica particolarmente intuitiva per visualizzare l'intera evoluzione dei tassi di mortalità per età e anno di calendario.

Grafico 3: *Heatmap* dell'evoluzione dei tassi di mortalità in Italia nel periodo 1950-2022.

Fonte: *Human Mortality Database*. Elaborazione personale tramite R.



Ogni *pixel*, determinato dall'incrocio tra età e anno di calendario, è colorato a seconda del livello di mortalità: la scala cromatica vira dal blu scuro (bassa mortalità) al giallo (alta mortalità). Nel tempo si osserva un'espansione dell'area blu, a testimonianza di un miglioramento generale della sopravvivenza a tutte le età, ma specialmente alle età più giovani. Dunque, la transizione epidemiologica appare evidente, con un drastico abbattimento della mortalità infantile e una diminuzione progressiva anche alle età più avanzate.

I tre grafici fin qui riportati derivano da elaborazioni personali: gli *script* implementati su R sono riportati nel dettaglio nell'Appendice grafica 8.3.

5.2 Stima e proiezione della mortalità in Italia con il modello Lee-Carter

L'analisi prosegue con la stima e la proiezione dei tassi di mortalità italiani mediante l'applicazione del modello di Lee-Carter, il cui impianto teorico è stato già descritto nel capitolo dedicato alla proiezione della mortalità (cfr. Capitolo 3).

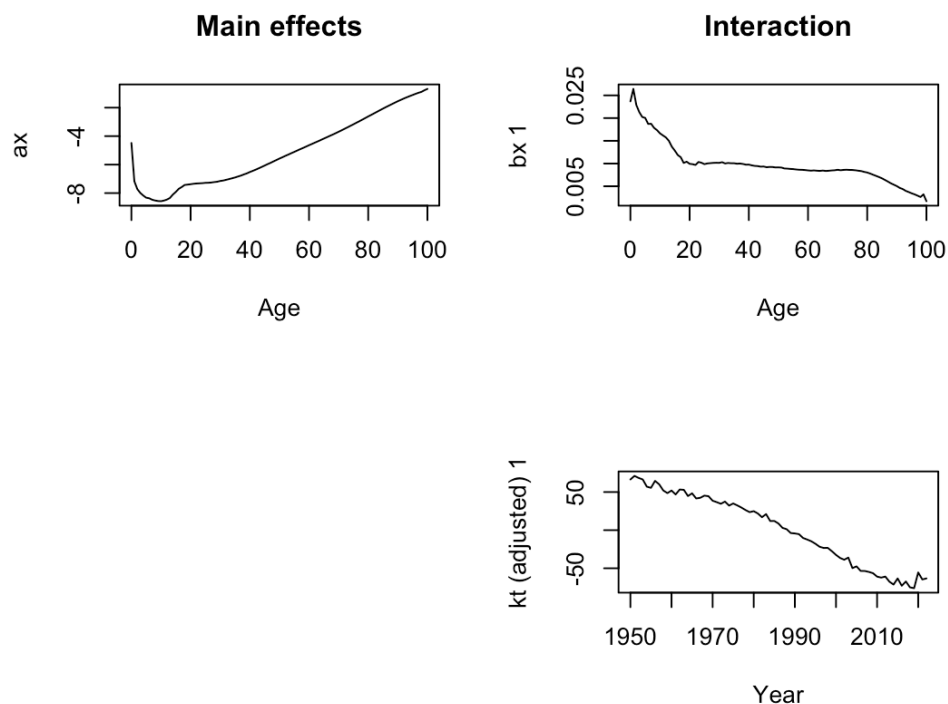
Il modello è stato applicato ai tassi di mortalità italiani nel periodo 1950-2022, considerando la popolazione aggregata per genere e suddivisa in età 0-104 anni.

La stima ha permesso di ottenere le tre componenti fondamentali del modello:

- a_x che rappresenta il profilo medio della mortalità per età;
- b_x che misura la sensibilità delle età alle variazioni della mortalità nel tempo;
- k_t , parametro temporale che riflette l'evoluzione generale della mortalità nel tempo.

Nei *plot* seguenti sono riportati i risultati della stima del modello Lee-Carter.

Grafico 4: Andamento delle componenti stimate mediante il modello Lee-Carter. Fonte: *Human Mortality Database*. Elaborazione personale tramite R.



Dal grafico di a_x si osserva un andamento crescente della mortalità all'aumentare dell'età, con una curva a "U" dovuta all'elevata mortalità nelle fasce di età infantili e giovani.

Il grafico di b_x evidenzia che le età in cui la mortalità si riduce più velocemente nel tempo sono proprio quelle in cui la mortalità è più elevata, ovvero le età giovani e anziane.

Il grafico di k_t mostra una chiara tendenza decrescente, coerente con il miglioramento della sopravvivenza nel tempo.

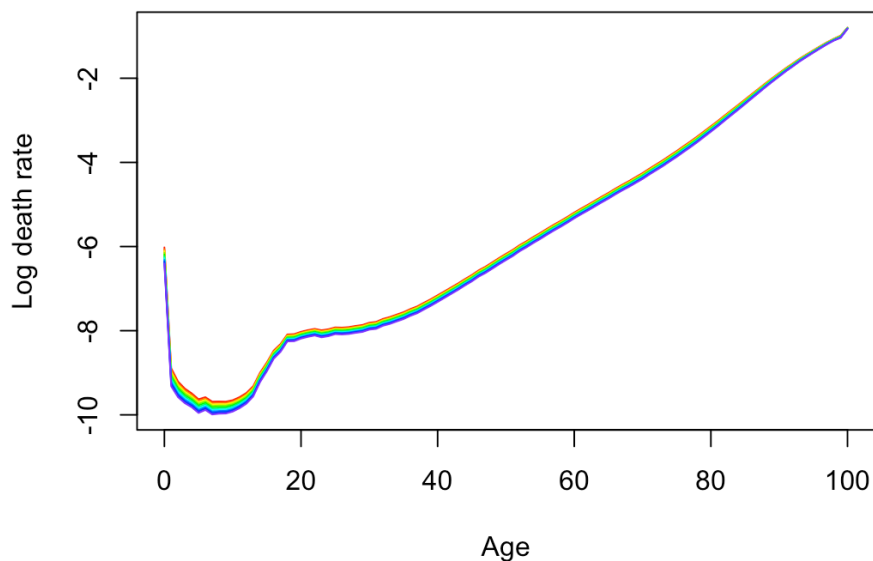
A partire dal modello di Lee-Carter appena stimato, si procede con la previsione dei tassi di mortalità futuri. Con i valori stimati di a_x , b_x e k_t , è possibile ricostruire facilmente i tassi di mortalità previsti ricorrendo all'espressione log-bilineare $\ln m(x, t) = a_x + b_x k_t$, dove k_t è una variabile casuale, proiettata nel futuro utilizzando un *random walk* con *drift*.

In particolare, è stata effettuata una previsione su un orizzonte temporale di 10 anni.

Il grafico risultante mostra le proiezioni dei tassi di mortalità per ciascuna età nel periodo di previsione considerato. In generale, come ci si aspetta, il tasso di sopravvivenza migliora nel lungo periodo per ciascun gruppo di età.

Grafico 5: Previsione dei tassi di mortalità 2023-2032. Fonte: *Human Mortality Database*.

Elaborazione personale tramite R.



I dettagli tecnici relativi all'implementazione del modello, inclusa la fase di stima e di previsione, sono riportati nell'Appendice tecnica 9.2.

5.3 Valutazione del prezzo dell'*inverse longevity bond*

Al fine di prezzare gli *inverse longevity bonds*, è necessario fare ricorso alle probabilità di sopravvivenza generate dal modello Lee-Carter, per poi definire le *tranche* e determinare il prezzo.

Si consideri una coorte iniziale di 100 000 assicurati di 65 anni d'età in vita al tempo 0.

La stima dell'evoluzione della sopravvivenza è stata ottenuta a partire dalle simulazioni su k_t che hanno poi consentito di ricostruire i tassi di mortalità simulati e, di conseguenza, le probabilità di sopravvivenza e i sopravvissuti.

Dato che i *survivor bonds* altro non sono che titoli indicizzati alla sopravvivenza, è stata effettuata la suddivisione della distribuzione dei sopravvissuti in 4 *tranche*, definite attraverso i percentili della distribuzione empirica delle simulazioni:

- *tranche* 1 = tra il 50-esimo e 60-esimo percentile
- *tranche* 2 = tra il 60-esimo e 75-esimo percentile
- *tranche* 3 = tra il 75-esimo e 90-esimo percentile
- *tranche* 4 = tra il 90-esimo e 99-esimo percentile

Successivamente, sono state calcolate le perdite in ciascuna *tranche* secondo la formula (31). La perdita osservata, opportunamente divisa per la capacità massima di perdita della *tranche* (data dalla differenza tra punto di stacco e di attacco), restituisce un fattore proporzionale dato dalla formula (32), che rappresenta la quota di perdita coperta dalla *tranche* e che riduce il valore della cedola effettiva per ogni *tranche*, secondo quanto descritto nella formula (33).

A questo punto è possibile calcolare il prezzo del *survivor bond* in ciascuna *tranche* come il valore attuale delle cedole attese e del rimborso del capitale.

Come *benchmark* è stato preso in considerazione il prezzo di uno *straight bond*, cioè un'obbligazione tradizionale che paga cedole fisse indipendentemente dalla sopravvivenza.

Sono state costruite delle tabelle di sensitività per ciascuna *tranche*, sia per i *survivor bonds* che per gli *straight bonds*, al variare del tasso cedolare (dal 5% al 12%) e del tasso d'interesse di mercato (dal 3% al 10%). Si riportano di seguito i risultati ottenuti.

Tabella 2: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 1*. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	97.92	89.91	82.68	76.13	70.19	64.82	59.93	55.49
6%	102.62	94.38	86.93	80.18	74.07	68.51	63.47	58.88
7%	107.33	98.86	91.19	84.24	77.94	72.21	67.01	62.27
8%	112.03	103.33	95.45	88.30	81.81	75.91	70.54	65.65
9%	116.73	107.80	99.70	92.36	85.68	79.61	74.08	69.04
10%	121.43	112.27	103.96	96.41	89.55	83.31	77.62	72.43
11%	126.14	116.74	108.22	100.47	93.43	87.01	81.16	75.82
12%	130.84	121.21	112.47	104.53	97.30	90.71	84.70	79.20

Tabella 3: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 2*. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	103.30	95.03	87.54	80.77	74.62	69.04	63.98	59.36
6%	109.08	100.52	92.77	85.75	79.38	73.59	68.32	63.53
7%	114.85	106.01	98.00	90.74	84.14	78.13	72.67	67.69
8%	120.63	111.51	103.23	95.72	88.89	82.68	77.02	71.85
9%	126.41	117.00	108.46	100.71	93.65	87.22	81.36	76.01
10%	132.19	122.49	113.69	105.69	98.41	91.77	85.71	80.17
11%	137.97	127.99	118.92	110.68	103.17	96.31	90.06	84.34
12%	143.74	133.48	124.15	115.66	107.92	100.86	94.40	88.50

Tabella 4: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 3*. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	109.80	101.21	93.43	86.37	79.97	74.16	68.86	64.04
6%	116.88	107.94	99.83	92.48	85.80	79.72	74.19	69.14
7%	123.96	114.67	106.24	98.59	91.63	85.29	79.51	74.24
8%	131.03	121.40	112.65	104.69	97.46	90.86	84.84	79.34
9%	138.11	128.13	119.05	110.80	103.28	96.43	90.16	84.44
10%	145.19	134.86	125.46	116.91	109.11	101.99	95.49	89.53
11%	152.27	141.59	131.87	123.01	114.94	107.56	100.81	94.63
12%	159.34	148.32	138.28	129.12	120.77	113.13	106.14	99.73

Tabella 5: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 4*. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	115.10	106.25	98.23	90.95	84.34	78.33	72.86	67.87
6%	123.24	113.99	105.59	97.97	91.04	84.74	78.98	73.74
7%	131.37	121.72	112.96	105.00	97.75	91.14	85.11	79.60
8%	139.51	129.46	120.33	112.02	104.45	97.54	91.23	85.46
9%	147.65	137.20	127.70	119.04	111.15	103.94	97.36	91.33
10%	155.79	144.94	135.06	126.06	117.85	110.35	103.48	97.19
11%	163.93	152.68	142.43	133.09	124.55	116.75	109.60	103.05
12%	172.06	160.41	149.80	140.11	131.25	123.15	115.73	108.92

Tabella 6: Prezzi *Straight Bond*. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	117.06	108.11	100.00	92.64	85.95	79.87	74.33	69.28
6%	125.59	116.22	107.72	100.00	92.98	86.58	80.75	75.42
7%	134.12	124.33	115.44	107.36	100.00	93.29	87.16	81.57
8%	142.65	132.44	123.17	114.72	107.02	100.00	93.58	87.71
9%	151.18	140.55	130.89	122.08	114.05	106.71	100.00	93.86
10%	159.71	148.67	138.61	129.44	121.07	113.42	106.42	100.00
11%	168.24	156.78	146.33	136.80	128.09	120.13	112.84	106.14
12%	176.77	164.89	154.05	144.16	135.12	126.84	119.25	112.29

Si evince che, a parità di tasso d'interesse e tasso cedolare, il prezzo del *survivor bond* è sempre inferiore rispetto al corrispondente *straight bond*. In aggiunta, man mano che ci si muove dalle *tranche* più rischiose a quelle meno rischiose, il prezzo del *survivor bond* tende ad aumentare e ad avvicinarsi a quello dello *straight bond*.

La relazione tra i prezzi è la seguente: $P^{(1)} < P^{(2)} < P^{(3)} < P^{(4)} < P_{\text{straight bond}}$

Dato che gli importi delle cedole sono casuali, l'investitore potrebbe non ottenere informazioni sufficienti sulle proprie scelte di investimento semplicemente confrontando i prezzi delle obbligazioni. A tal proposito, è necessaria un'analisi del profilo rischio-rendimento facendo ricorso alla distribuzione dei rendimenti (*yield distribution*) sia dei *survivor bonds* per ciascuna *tranche* che dello *straight bond*.

Il tasso di rendimento y è un tasso d'interesse costante calcolato mediante la seguente equazione⁵¹

$$P^{(j)} = F \frac{1}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+y)^t} C_{x+t}^{(j)} \quad (35)$$

dove:

⁵¹ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 21.

- $P^{(j)}$ è il prezzo del *survivor bond* a 10 anni;
- T è la scadenza (10 anni);
- $C_{x+t}^{(j)}$ è l'importo della cedola al tempo t .

Si calcola il rendimento massimo quando gli importi delle cedole sono massimi pari a $C_{x+t}^{(j)} = F \cdot c$ con $t = 1, 2, \dots, 10$, il rendimento minimo quando gli importi delle cedole sono tutti nulli $C_{x+t}^{(j)} = 0$ con $t = 1, 2, \dots, 10$ e il rendimento medio con valore delle cedole pari al valor medio $C_{x+t}^{(j)} = E[C_{x+t}^{(j)}]$ con $t = 1, 2, \dots, 10$.

Tabella 7: Distribuzione degli *yield* per ciascuna *tranche* (in %). Fonte: elaborazione personale tramite *script R*

<i>Tranche</i>	<i>Yield min</i>	<i>Yield medio</i>	<i>Yield max</i>
<i>Tranche 1</i>	1.92%	5%	7.53%
<i>Tranche 2</i>	1.34%	5%	6.75%
<i>Tranche 3</i>	0.68%	5%	5.89%
<i>Tranche 4</i>	0.18%	5%	5.23%
<i>Straight bond</i>	5%	5%	5%

I calcoli sono stati effettuati, esclusivamente a titolo illustrativo, per le obbligazioni con tasso di sconto e tasso cedolare pari al 5% e valore nominale pari a 100.

Tutti i rendimenti medi sono pari al 5%, come il rendimento fisso dello *straight bond*, mentre per le *tranche* più rischiose, i rendimenti sono superiori rispetto a quelli delle *tranche* meno rischiose. Si tratta di una distribuzione intuitiva e utile per gli investitori per individuare la classe di rischio più appropriata in base alle preferenze di rischio.

5.4 Aggiunta del premio per il rischio mediante la Wang Transform

La determinazione del prezzo di strumenti finanziari e assicurativi richiede un operatore di distorsione che modifica la distribuzione di probabilità del rischio oggetto di valutazione.

Nella letteratura attuariale, questo operatore è noto come la trasformazione di Wang (*Wang Transform*), introdotta da Shaun Wang nel 2000⁵².

Tale trasformazione, quindi, consente di modificare la probabilità reale associata ad un evento (come la probabilità di sopravvivenza di una coorte) al fine di tener conto dell'avversione al rischio degli investitori e del premio per il rischio sistematico.

La trasformazione è definita come segue⁵³

$$p^{(\lambda)} = \Phi(\Phi^{-1}(p) + \lambda) \quad (36)$$

dove:

- Φ è la funzione di ripartizione della normale standard;
- Φ^{-1} è la sua inversa (quantile);
- $\lambda \geq 0$ è il parametro di distorsione (chiamato *market price of risk*) e riflette il livello del rischio sistematico.

Un valore di $\lambda > 0$ implica una sovrastima delle probabilità associate agli esiti sfavorevoli, spostando quindi la probabilità verso esiti più rischiosi per gli investitori. Quindi, nel caso della longevità, si ipotizza una maggiore sopravvivenza della coorte, con conseguente aumento del prezzo degli strumenti finanziari legati alla sopravvivenza, come i *survivor bonds*.

Si riportano, di seguito, i risultati ottenuti.

⁵² Cfr., Pelsser A., (2008), p. 171.

⁵³ Cfr., Wang S., (2002), p. 216.

Tabella 8: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 1* con trasformazione di Wang. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	98.50	90.46	83.20	76.62	70.67	65.27	60.36	55.91
6%	103.31	95.04	87.56	80.78	74.63	69.06	63.99	59.38
7%	108.13	99.62	91.92	84.94	78.60	72.85	67.61	62.85
8%	112.95	104.20	96.28	89.09	82.57	76.64	71.24	66.32
9%	117.77	108.78	100.64	93.25	86.53	80.43	74.86	69.79
10%	122.58	113.36	105.00	97.41	90.50	84.21	78.49	73.26
11%	127.40	117.94	109.36	101.56	94.47	88.00	82.11	76.73
12%	132.22	122.52	113.72	105.72	98.43	91.79	85.73	80.20

Tabella 9: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 2* con trasformazione di Wang. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	104.18	95.86	88.34	81.53	75.35	69.74	64.64	60.00
6%	110.13	101.53	93.73	86.66	80.25	74.42	69.12	64.29
7%	116.09	107.19	99.12	91.80	85.15	79.11	73.60	68.58
8%	122.04	112.85	104.51	96.94	90.06	83.79	78.08	72.87
9%	128.00	118.51	109.90	102.08	94.96	88.47	82.56	77.16
10%	133.95	124.17	115.29	107.21	99.86	93.16	87.04	81.45
11%	139.90	129.83	120.68	112.35	104.76	97.84	91.52	85.73
12%	145.86	135.49	126.07	117.49	109.67	102.52	96.00	90.02

Tabella 10: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 3* con trasformazione di Wang. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	110.65	102.01	94.19	87.10	80.67	74.82	69.50	64.65
6%	117.89	108.90	100.75	93.36	86.64	80.52	74.95	69.87
7%	125.14	115.79	107.31	99.61	92.60	86.22	80.40	75.09
8%	132.39	122.68	113.87	105.86	98.57	91.92	85.86	80.31
9%	139.64	129.58	120.43	112.12	104.54	97.62	91.31	85.53
10%	146.88	136.47	126.99	118.37	110.50	103.32	96.76	90.75
11%	154.13	143.36	133.55	124.62	116.47	109.02	102.21	95.97
12%	161.38	150.25	140.11	130.87	122.44	114.73	107.66	101.19

Tabella 11: Prezzi *Survivor Bond* della *tranche 4* con trasformazione di Wang. Importi in euro. Fonte: elaborazione personale tramite *script R*.

Tasso d'interesse								
Tasso cedolare	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
5%	115.58	106.70	98.66	91.37	84.74	78.71	73.22	68.22
6%	123.81	114.53	106.12	98.47	91.52	85.19	79.42	74.15
7%	132.05	122.36	113.57	105.58	98.30	91.67	85.61	80.08
8%	140.28	130.19	121.02	112.68	105.08	98.14	91.81	86.01
9%	148.51	138.02	128.48	119.79	111.86	104.62	98.01	91.95
10%	156.75	145.85	135.93	126.89	118.64	111.10	104.20	97.88
11%	164.98	153.68	143.39	134.00	125.42	117.58	110.40	103.81
12%	173.22	161.51	150.84	141.10	132.20	124.06	116.59	109.74

Si rimanda all'Appendice Tecnica 9.4 per i dettagli relativi all'implementazione in R.

Si conclude l'analisi empirica relativa all'approccio proposto da Choi e Kim e, nelle sezioni successive, verranno esaminati alcuni approfondimenti dell'analisi finora condotta.

5.5 Alternativa modellistica: il modello Cairns-Blake-Dowd

In una prima fase dell'analisi è stato seguito fedelmente l'approccio proposto da Choi e Kim (2009), basato sull'applicazione del classico modello di Lee-Carter, considerato uno standard consolidato nella letteratura attuariale e demografica. Successivamente, al fine di fornire ulteriori valutazioni di carattere demografico sul prodotto considerato, è stata presa in considerazione l'applicazione di un modello alternativo di proiezione della mortalità: il modello Cairns-Blake-Dowd (CBD), più parsimonioso e in grado di apportare miglioramenti nella rappresentazione della mortalità ad età più elevate. Entrambi i modelli sono stati calibrati sui dati storici di mortalità della popolazione italiana e utilizzati per simulare i tassi futuri di sopravvivenza della coorte considerata.

In termini di *output* finanziari, ovvero in termini di prezzi dei *survivor bonds*, non si osservano differenze tra i due approcci. I due modelli forniscono valutazioni pressoché analoghe, con scostamenti minimi a livello decimale. Ciò conferma che, pur con differente formulazione parametrica, entrambi i modelli offrono una rappresentazione comparabile e stabile dell'evoluzione della mortalità, catturando efficacemente la tendenza al miglioramento sistematico della mortalità in età avanzata, che rappresenta la componente dominante nella valutazione del rischio di longevità.

Il codice R relativo all'implementazione del modello è riportato nell'appendice tecnica 9.5.

5.6 Estensione dell'analisi: decomposizione del rischio

Si propone un'estensione dell'analisi di *pricing* degli *inverse survivor bonds* volta a valutare separatamente il rischio demografico e quello finanziario, in modo tale da fornire una visione più completa su come tali rischi influenzino le strategie di investimento.

5.6.1 Analisi del rischio demografico

Al fine di cogliere pienamente l'impatto del rischio demografico sulla valutazione dei titoli, si privilegia l'approccio simulato rispetto alla struttura attesa dei flussi di cassa

(cedole medie): per ciascuna delle 1 000 traiettorie di sopravvivenza simulate, si calcola il corrispondente flusso cedolare e, conseguentemente, il relativo prezzo.

L'espressione teorica di riferimento è data dalla formula (34), che prevede il calcolo del prezzo del *survivor bond* sulla base del valore atteso dei flussi cedolari futuri. Tuttavia, per isolare l'impatto del rischio demografico, tale formulazione deve essere riadattata in chiave simulativa: invece di utilizzare il valore atteso $E(C_{x+t}^{(j)})$, si considerano direttamente le 1 000 traiettorie simulate di $C_{x+t}^{(j)}$ e per ciascuna simulazione si determina il relativo prezzo. In questo modo, la struttura attesa dei flussi viene sostituita da una distribuzione empirica dei prezzi, ottenuta simulando la sopravvivenza anno per anno e *tranche* per *tranche*.

Di seguito, si riporta la formula del prezzo della *tranche j* per ogni simulazione s ⁵⁴

$$P_s^{(j)} = \sum_{t=1}^T C_{x+t,s}^{(j)} v^t + F v^T \quad (37)$$

dove:

- $P_s^{(j)}$ è il prezzo della *tranche j* alla simulazione s ;
- $C_{x+t,s}^{(j)}$ è il flusso cedolare della *tranche j* al tempo t , simulato alla traiettoria s ;
- v è il fattore di sconto;
- F è il valore nominale;
- T è la scadenza.

Si ottengono così 1 000 stime per ciascuna *tranche*, che rappresentano la distribuzione di prezzo associata esclusivamente alla componente demografica.

L'analisi delle distribuzioni di prezzo ottenute consente di valutare le caratteristiche statistiche associate al rischio demografico. Per ciascuna *tranche*, si riportano le statistiche descrittive di primo e secondo ordine, nonché gli indicatori di asimmetria e curtosi.

A titolo illustrativo, i risultati sono stati ottenuti considerando tasso cedolare e tasso d'interesse pari al 5%.

⁵⁴ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 19: formula adattata in chiave simulativa demografica.

Tabella 12: Statistiche descrittive delle 1 000 distribuzioni di prezzo per singola *tranche* ottenute da cedole simulate, con tasso cedolare e tasso d’interesse pari al 5%. Fonte: elaborazione personale tramite R.

<i>Tranche</i>	Media	Varianza	Asimmetria	Curtosi
<i>Tranche 1</i>	82.67526	249.66942	-0.2134697	1.362925
<i>Tranche 2</i>	87.54251	214.51261	-0.7373004	1.921750
<i>Tranche 3</i>	93.42633	130.71510	-1.6941317	4.491785
<i>Tranche 4</i>	98.22702	31.28811	-3.9401791	19.112001

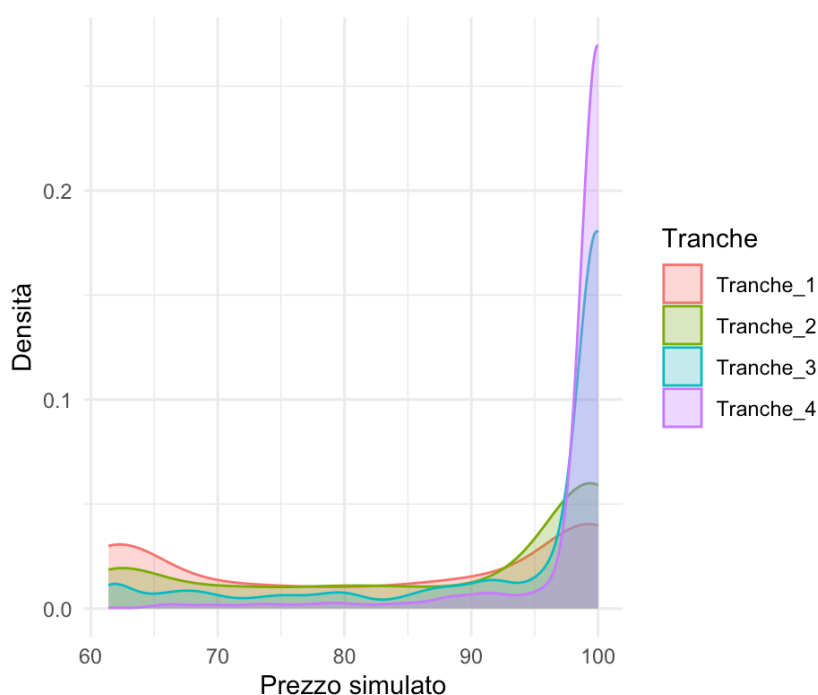
Le medie delle 1 000 simulazioni per ogni *tranche* convergono ai valori attesi teorici calcolati in precedenza: è sufficiente confrontare le medie ottenute con i prezzi riportati nelle Tabelle 1– 4 in corrispondenza del tasso cedolare e d’interesse 5%.

Inoltre, si nota una varianza decrescente, che cala fortemente dalla *tranche 1* alla *tranche 4*. Questo andamento riflette esattamente la logica delle *tranche* basate sui percentili: la 1 è la *tranche* più rischiosa da un punto di vista demografico a cui è associata una varianza maggiore, mentre la *tranche 4* è quella meno rischiosa.

La forma delle distribuzioni simulate è rappresentata nel *density plot* riportato nel grafico 6. Tutte le distribuzioni mostrano asimmetria a sinistra, con code lunghe e pesanti verso prezzi più bassi. In particolare, è interessante notare che le *tranche* più *senior* presentano distribuzioni dei prezzi con valori più elevati di asimmetria e curtosi. Ciò può essere spiegato ricorrendo alla struttura dello strumento finanziario: le *tranche junior* assorbono le perdite iniziali, mentre quelle *senior* sono “protette” e subiscono perdite solo in casi estremi, generando code pesanti a sinistra. Si tratta di risultati coerenti con quanto osservato nella letteratura finanziaria⁵⁵.

⁵⁵ Cfr., Lenhart N., Altrock F., Rachev S. T., Truck S., Wilch A., (2005), p. 19.

Grafico 6: *Density plot* delle 1 000 distribuzioni di prezzo per ciascuna *tranche*. Fonte: elaborazione personale tramite R.



Il codice R relativo all'intero processo appena descritto è riportato nell' Appendice tecnica 9.6, a supporto della replicabilità e della verifica dei risultati presentati.

5.6.2 Analisi del rischio finanziario

Per isolare il rischio finanziario, si è ipotizzato un flusso cedolare deterministico, rappresentato dal valore atteso delle cedole calcolato precedentemente. L'incertezza sui prezzi è dunque legata esclusivamente alla variabilità dei tassi di interesse futuri, che possono essere simulati mediante modelli di equilibrio (*equilibrium models*)⁵⁶. Tali modelli partono da assunzioni sulle variabili economiche, ricavano un processo per il tasso d'interesse a breve termine r e, successivamente, esaminano cosa implica tale processo per i prezzi delle obbligazioni e delle opzioni.

In un modello di equilibrio a un fattore, il processo per il tasso d'interesse a breve termine r coinvolge una sola fonte di incertezza. Solitamente, il processo *risk-neutral* per il tasso a breve è descritto da un processo di Itô: $dr = m(r)dt + s(r)dz$.

⁵⁶ Cfr., Hull J.C. (2015), pp. 707-708.

Si assume che il *drift* istantaneo m e la deviazione *standard* istantanea s siano funzioni di r , ma indipendenti dal tempo. L'ipotesi di un singolo fattore non è così restrittiva come potrebbe sembrare. Un modello a un fattore implica che tutte le velocità si muovano nella stessa direzione in un qualsiasi breve intervallo di tempo, ma non che si muovano tutte della stessa entità. La forma della curva dei tassi zero quindi può cambiare con il passare del tempo.

Per la parte applicativa, si considerano due modelli di equilibrio a un fattore:

- modello di Vasicek in cui $m(r) = a(b - r)$ e $s(r) = \sigma$;
- modello di Cox, Ingersoll and Ross in cui $m(r) = a(b - r)$ e $s(r) = \sigma\sqrt{r}$.

Nel modello di Vasicek, il processo *risk-neutral* per r è descritto da un processo di diffusione a media reversibile (*mean reversion*), secondo la dinamica⁵⁷:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (38)$$

dove a , b e σ sono costanti non negative. In particolare:

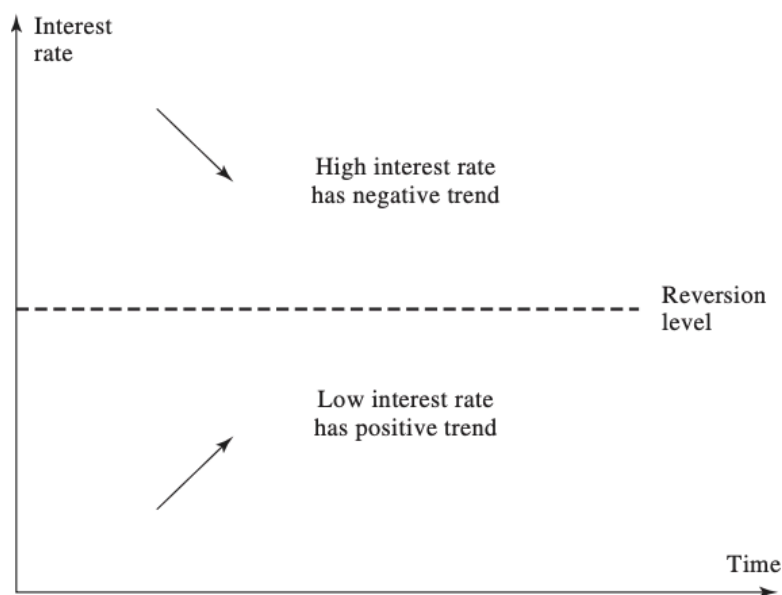
- a è la velocità di aggiustamento;
- b è il livello medio di lungo periodo;
- σ è la volatilità.

Il tasso a breve r viene attratto verso il livello b con la velocità a . Sovrapposto a questa “forza di attrazione”, vi è un termine stocastico normalmente distribuito dz .

Il fenomeno noto come *mean reversion*, raffigurato nel grafico 7, prevede che quando r è elevato, la reversione verso la media tende a causare un *drift* negativo, invece quando r è basso, tende a causare un *drift* positivo.

⁵⁷ Cfr., Hull J.C. (2015), p. 708.

Grafico 7: Fenomeno di *mean reversion*: Fonte: Hull J. C., (2015), p. 709



Esistono argomentazioni economiche convincenti a favore della reversione verso la media: quando i tassi sono alti, l'economia tende a rallentare e la domanda di fondi da parte dei prestatori è bassa e di conseguenza i tassi diminuiscono; quando i tassi sono bassi, la domanda di fondi da parte dei prestatori aumenta e i tassi tendono, quindi, a salire⁵⁸.

Un modello alternativo è stato proposto da Cox, Ingersoll e Ross (CIR)⁵⁹:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad (39)$$

dove a , b e σ sono costanti non negative.

Questo modello presenta lo stesso *drift* a reversione verso la media del modello di Vasicek, ma la deviazione *standard* della variazione del tasso a breve è proporzionale a \sqrt{r} . Ciò significa che, al crescere del tasso d'interesse a breve termine, aumenta anche la deviazione *standard*, mentre quando i tassi sono più bassi, si riduce anche la volatilità e in questo contesto il termine \sqrt{r} garantisce la positività dei tassi, rendendo il modello più realistico in contesti di mercato con bassi tassi d'interesse⁶⁰.

⁵⁸ Cfr., Hull J.C. (2015), p. 708.

⁵⁹ Cfr., Hull J.C. (2015), p. 710.

⁶⁰ Cfr., Hull J.C. (2015), p. 710.

Entrambi i modelli sono stati implementati per simulare 1 000 traiettorie di tassi di interesse su un orizzonte temporale decennale⁶¹. I parametri utilizzati per la calibrazione dei modelli derivano dalle stime ottenute nel *LEM Working Paper Series*, No. 2002/02⁶² a partire da un *set* di dati costituito dai rendimenti dei BOT a tre mesi nel periodo 1981-2001, per un totale di 470 osservazioni. La scelta di questi modelli non deriva da un processo di adattamento ai dati, ma ha l'obiettivo di fornire una valutazione del prezzo del prodotto considerato nell'ambito della riassicurazione finanziaria.

I parametri stimati a partire dai dati finanziari sono i seguenti:

- $a = 0.032$; $b = 0.0622$ e $\sigma = 0.0115$ per il modello Vasicek;
- $a = 0.1079$, $b = 0.0748$ e $\sigma = 0.0439$ per il modello CIR.

In entrambi i modelli, i parametri hanno un'interpretazione economica ben precisa:

- a è la velocità di aggiustamento e misura la rapidità con cui il tasso di interesse tende a ritornare verso il suo livello di equilibrio di lungo periodo (un valore più alto implica un ritorno più veloce);
- b è il livello di lungo periodo, ovvero il valore medio di equilibrio verso cui il tasso converge nel lungo periodo;
- σ è la volatilità e riflette le fluttuazioni casuali del tasso (valori più alti implicano traiettorie più variabili).

Secondo le stime, nel modello Vasicek la velocità di aggiustamento è relativamente bassa, per cui i tassi d'interesse si muovono lentamente verso il loro livello di lungo periodo. Inoltre, anche la volatilità stimata è contenuta, suggerendo fluttuazioni casuali dei tassi relativamente ridotte.

Nel modello CIR, invece, la velocità di aggiustamento risulta più elevata, indicando una dinamica dei tassi più reattiva al livello di equilibrio di lungo periodo. La volatilità stimata è più alta, il che comporta traiettorie più variabili e in linea con l'idea che il modello CIR catturi meglio l'eteroschedasticità dei tassi.

In sintesi, mentre il modello Vasicek genera traiettorie più stabili ma meno variabili, il modello CIR appare più adatto a descrivere la dinamica osservata nei dati storici, grazie a una maggiore volatilità stimata e al vincolo di non negatività dei tassi.

⁶¹ Cfr., Appendice tecnica 9.7: simulazione dei tassi d'interesse in \mathbb{R} mediante discretizzazione dei due modelli considerati.

⁶² Cfr., Gentile M., Renò R., (2002), p. 18.

È bene specificare come la scelta di un'epoca d'osservazione e di condizioni di mercato differenti darebbe luogo a valutazioni diverse degli stessi parametri.

Le traiettorie simulate dei tassi d'interesse sono state successivamente utilizzate per la valutazione dei prezzi per ogni *tranche* considerata.

Nella pratica, per ogni simulazione s e per ogni *tranche* j , si attualizzano cumulativamente le cedole attese di ogni *tranche* $E(C_{x+t}^{(j)})$ con i tassi simulati $r_{1:h}^{(s)}$ e il valore nominale a scadenza, ottenendo il relativo prezzo⁶³

$$P_s^{(j)} = \sum_{t=1}^h \left[E(C_{x+t}^{(j)}) \cdot \prod_{u=1}^t \frac{1}{1 + r_u^{(s)}} \right] + F \cdot \prod_{u=1}^h \frac{1}{1 + r_u^{(s)}}. \quad (40)$$

In forma compatta è possibile scrivere

$$P_s^{(j)} = \sum_{t=1}^h E(C_{x+t}^{(j)}) v_{s,t} + F v_{s,h} \quad (41)$$

dove $v_{s,t} = \prod_{u=1}^t \frac{1}{1 + r_u^{(s)}}$ è il fattore di sconto cumulativo fino al tempo t costruito dalla

traiettoria simulata s . In alternativa, usando lo sconto nel continuo discretizzato (come nel codice R riportato nell'Appendice tecnica 9.6) si ottiene $v_{s,t} = \exp\left(-\sum_{u=1}^t r_u^{(s)} \cdot \Delta t\right)$.

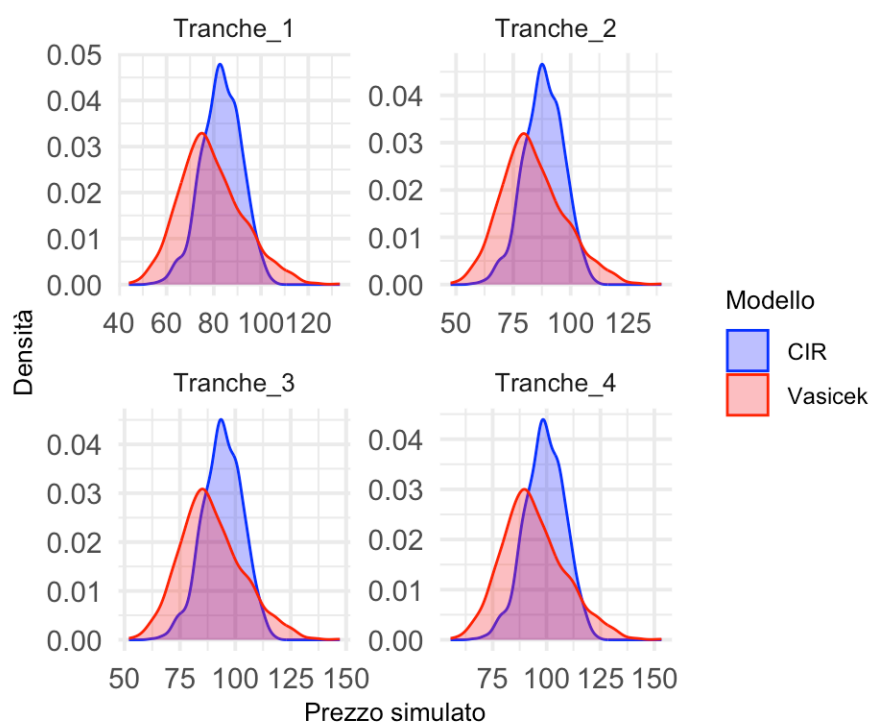
Per ogni modello, si ricava così una distribuzione di 1 000 prezzi per ogni *tranche*.

Il grafico 8 riporta un *overlay* delle densità di prezzo simulate consentendo di confrontare la forma delle distribuzioni tra i due modelli per ogni *tranche*.

⁶³ Cfr., Choi Y., Kim C., (2009), p. 19: formula adattata in chiave simulativa finanziaria.

Grafico 8: *Overlay* delle distribuzioni dei prezzi ottenute con i modelli Vasicek e CIR.

Fonte: elaborazione personale tramite R.



I risultati empirici confermano le evidenze teoriche. Il modello di Vasicek, con la possibilità di tassi negativi, introduce maggiore rischio nei prezzi. Il modello di CIR, più realistico per prodotti obbligazionari e pensionistici, riduce la volatilità dei prezzi. Questo suggerisce che, in un contesto prudenziale o assicurativo, il modello CIR è preferibile se si desidera evitare la sottostima del rischio legata a scenari con tassi irrealistici. Infatti, dal grafico di confronto si nota come il modello di Vasicek mostra code più lunghe e curve leggermente più appiattite, il che significa maggiore incertezza dei tassi e quindi maggiore variabilità dei prezzi. Il modello di CIR produce distribuzioni più strette e spostate a destra rispetto al Vasicek, indicando prezzi in media più alti, ma meno volatili.

Al fine di rafforzare quantitativamente le evidenze grafiche, nella tabella seguente sono riportate le principali statistiche descrittive dei prezzi simulati per ciascuna *tranche*, ottenute con i modelli Vasicek e CIR.

Tabella 13: Statistiche descrittive delle 1 000 distribuzioni di prezzo per *tranche* ottenute da cedole attese, con tasso cedolare 5% e tassi d'interesse simulati con i modelli di Vasicek e CIR. Fonte: elaborazione personale tramite R.

<i>Tranche</i>	Vasicek				CIR			
	Media	Varianza	Asimmetria	Curtosi	Media	Varianza	Asimmetria	Curtosi
<i>Tranche 1</i>	83.43799	92.598066	0.3445285	3.075275	88.10040	5.123423	-0.1472727	2.988443
<i>Tranche 2</i>	88.32206	98.220559	0.3420949	3.072646	93.20387	5.436728	-0.1468035	2.991367
<i>Tranche 3</i>	94.22627	105.266672	0.3393583	3.069714	99.37335	5.829822	-0.1461987	2.994634
<i>Tranche 4</i>	99.04344	111.147338	0.3372995	3.067513	104.40526	6.158227	-0.1456786	2.997057

I risultati mostrano che la variabilità dei prezzi è più elevata quando si considera esclusivamente il rischio demografico. Questo suggerisce che la componente demografica ha un impatto più rilevante sulla valutazione dei *survivor bonds* rispetto al rischio finanziario, specialmente nelle *tranche junior*, più sensibili alla longevità residua della popolazione assicurata.

I modelli di tasso di interesse, pur introducendo incertezza, risultano avere un impatto più contenuto e, in particolare, il modello CIR appare più prudente e realistico per contesti assicurativi. Tali evidenze rafforzano l'importanza di un'accurata modellazione della longevità nella valutazione di strumenti finanziari legati alla vita residua degli individui.

Inoltre, anche evidenze di mercato, come il ritiro del *longevity bond* EIB-BNP del 2004 a seguito di una domanda non sufficiente perchè il rischio base era troppo grande, supportano l'ipotesi che gli investitori percepiscono il rischio demografico come più critico rispetto a quello finanziario.

L'implementazione del codice in R è presentata nell'Appendice tecnica 9.7.

5.6.3 Analisi di ulteriori due scenari di rischio

Dopo aver analizzato in modo isolato il rischio demografico (primo caso) e il rischio finanziario (secondo caso), è possibile introdurre altri due scenari:

- il terzo, in cui le cedole sono simulate (derivanti dal rischio demografico) e il tasso d'interesse è calcolato come media dei tassi simulati con il modello CIR;

- il quarto, in cui sia le cedole che i tassi d'interesse sono simulati, combinando così entrambe le fonti di rischio.

Nel terzo scenario, l'utilizzo del tasso d'interesse medio simulato rappresenta un'alternativa valida e più coerente con la dinamica dei tassi rispetto al primo caso, in cui è stato assunto un tasso fisso arbitrario pari al 5%.

Si mantiene comunque la separazione concettuale tra rischio demografico e rischio finanziario: si isola il rischio demografico e si mantiene quello finanziario in forma deterministica attraverso un unico vettore di sconto per tutte le simulazioni.

Le statistiche descrittive di questo scenario sono riportate nella Tabella 14.

Tabella 14: Statistiche descrittive delle 1 000 distribuzioni di prezzo per *tranche* ottenute da cedole simulate e tasso d'interesse medio simulato con il modello CIR. Fonte: elaborazione personale tramite R.

<i>Tranche</i>	Media	Varianza	Asimmetria	Curtosi
<i>Tranche 1</i>	82.69363	260.24434	-0.2134228	1.361233
<i>Tranche 2</i>	87.66044	223.55297	-0.7371358	1.920066
<i>Tranche 3</i>	93.66422	136.21622	-1.6948501	4.492811
<i>Tranche 4</i>	98.56217	32.61507	-3.9433728	19.137262

Dal confronto tra il primo e il terzo approccio emerge che i prezzi medi delle *tranche* risultano pressoché inalterati, confermando che la scelta tra tasso fisso e tasso medio non altera il valore atteso dei prezzi dei titoli. Tuttavia, in questo terzo caso, si osservano varianze leggermente maggiori non dovute alla variabilità dei tassi simulati, che è stata rimossa introducendo la media, ma alla forma del vettore di sconto: l'attualizzazione continua è applicata cumulativamente anno per anno e di conseguenza i flussi futuri vengono scontati in modo esponenziale (e quindi non lineare) rispetto al primo caso di tasso d'interesse fisso e arbitrario. Questo fa sì che simulazioni con flussi più lontani temporalmente risultino più sensibili alle piccole variazioni nei tassi, causando una varianza dei prezzi più elevata.

Nel quarto e ultimo caso analizzato, le due componenti di rischio vengono considerate simultaneamente: le cedole simulate riflettono l'incertezza demografica, mentre i tassi CIR simulati riflettono l'incertezza sui tassi futuri.

Rispetto al caso precedente la differenza risiede nel modo in cui vengono trattati i tassi d'interesse: i flussi vengono scontati in modo più realistico e la variabilità tendenzialmente si riduce (fatta eccezione per la *tranche* 4).

I risultati di questo scenario sono riportati nella tabella che segue.

Tabella 15: Statistiche descrittive delle 1 000 distribuzioni di prezzo per *tranche* ottenute da cedole simulate e tassi d'interesse simulati con modello CIR. Fonte: elaborazione personale tramite R.

<i>Tranche</i>	Media	Varianza	Asimmetria	Curtosi
<i>Tranche 1</i>	82.34953	132.96760	-0.04458075	1.652946
<i>Tranche 2</i>	87.41003	119.19776	-0.34728661	1.935748
<i>Tranche 3</i>	93.66050	91.25016	-0.67396890	2.746432
<i>Tranche 4</i>	98.90112	68.96773	-0.52804232	3.034813

In questo scenario, ogni simulazione ha il suo vettore di sconto e si crea una sorta di effetto compensazione tra flussi e sconto. Pertanto, la varianza si riduce rispetto al caso precedente in cui un unico vettore di sconto medio è applicato a tutte le simulazioni e le differenze nei flussi si riflettono pienamente nel prezzo, con conseguente aumento della variabilità.

6. Conclusioni

Negli ultimi anni, l'allungamento dell'aspettativa di vita in molte nazioni ha generato nuove sfide per i sistemi pensionistici, le compagnie assicurative e gli investitori istituzionali. Alla luce di ciò, la stesura dell'elaborato è stata incentrata sul tema della valutazione e della copertura del rischio di longevità.

Il lavoro presentato ha seguito l'approccio proposto da Kim e Choi (2009), che prende in esame la cartolarizzazione, un'alternativa innovativa rispetto alla riassicurazione, per far fronte a tale rischio, aprendo così anche nuove prospettive di investimento per gli investitori.

Coerentemente con l'obiettivo della tesi, che prevedeva di analizzare la fattibilità e l'efficacia di strumenti finanziari innovativi per coprire il rischio di longevità, l'analisi si è concentrata sulla cartolarizzazione di tale rischio mediante gli *inverse survivor bonds*.

Dal punto di vista operativo, l'analisi empirica ha mirato al *pricing* di tali strumenti ed è stata condotta mediante una *routine* di calcolo implementata in R, strutturata in fasi sequenziali. In particolare, a partire dai dati forniti dall'*Human Mortality Database*, sono state generate le probabilità di sopravvivenza attraverso il modello di proiezione della mortalità di Lee-Carter che hanno, successivamente, consentito di definire le *tranche* basate sui percentili e di prezzare i *survivor bonds*.

I *survivor bonds* si distinguono dalle obbligazioni tradizionali (*straight bonds*) in quanto le cedole future non sono fisse, ma dipendono dalla quota di popolazione in età pensionabile presente al momento dell'emissione che risulterà ancora in vita alla data del pagamento.

È questa la ragione alla base del loro prezzo di vendita inferiore rispetto a quello degli *straight bonds*. Infatti, attraverso i risultati empirici, è stato dimostrato come il prezzo dei *survivor bonds* aumenti all'aumentare della *tranche*, ovvero passando dalla *tranche* più rischiosa a quella meno rischiosa, il cui prezzo è prossimo a quello degli *straight bonds*.

Questo approccio risulta particolarmente semplice da applicare per l'emittente e trasparente per gli investitori, che possono orientarsi facilmente nella scelta delle *tranche*, ognuna con un proprio rischio/rendimento, in base alla loro propensione al rischio.

In aggiunta all'approccio di Kim e Choi, l'analisi è stata estesa inizialmente alla valutazione dei singoli rischi coinvolti, ovvero il rischio demografico e quello finanziario. È stato evidenziato come le *tranche junior* subiscano in misura maggiore gli effetti delle

fluttuazioni legati alla componente demografica, mentre nelle *tranche senior* il rischio demografico si manifesta principalmente come *tail risk*. Per quanto concerne il rischio finanziario, se modellato mediante Vasicek, aggiunge volatilità sulle *tranche junior* e moderate oscillazioni sulle *tranche senior*, mentre il modello CIR consente di mantenere i prezzi molto stabili in tutte le *tranche*.

Successivamente, sono stati analizzati ulteriori due scenari da cui emerge che la scelta tra tasso fisso e tasso medio simulato non modifica i prezzi medi delle *tranche*, confermando la robustezza del valore atteso. È inevitabile, però, che il diverso trattamento dei tassi d'interesse incida sulla variabilità: ne risulta che l'utilizzo di un unico vettore di sconto medio introduce maggiore varianza, mentre la simulazione congiunta di flussi e tassi produce un effetto compensazione che tende a ridurre la dispersione dei prezzi.

Oggigiorno, l'allungamento dell'aspettativa di vita rappresenta un tema attuale di grande rilevanza e, al contempo, costituisce una sfida per il mondo degli attuari, poiché si ripercuote sul sistema pensionistico della società contemporanea. Il lavoro di tesi ha evidenziato come i *survivor bonds* rappresentino validi strumenti finanziari innovativi per far fronte a questo tema. È inevitabile che tali strumenti portino con sé incertezze legate ai rischi demografici e finanziari, ma possono sicuramente essere considerati un punto di partenza per ulteriori approfondimenti futuri.

7. Bibliografia

- [1] Barrieu P., Bensusan H., El Karoui N., Hillairet C., Loisel S., Ravanelli C., Salhi, Y., 2012, *Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges*. Scandinavian actuarial journal, 2012(3).
- [2] Blake D., Cairns A. J., Dowd K., 2006, *Living with mortality: Longevity bonds and other mortality-linked securities*. British Actuarial Journal, 12, pp. 153-197.
- [3] Blake D., Burrows W., 2001, *Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk*. The Journal of Risk and Insurance, Vol. 68, No. 2, 339-348.
- [4] Brouhns N., Denuit M., Vermunt J. K., 2002, *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*. Insurance: Mathematics and economics, 31(3), 373-393.
- [5] Burri G., 2023, *Approccio di riconciliazione alla mortalità per causa: un'applicazione ai dati italiani*. Tesi di Laurea Magistrale in Scienze Attuariali e finanziarie, Università La Sapienza di Roma, Relatore: Prof.ssa S. Levantesi.
- [6] Cairns A. J., Blake D., Dowd K., 2008, *Modelling and management of mortality risk: a review*. Scandinavian Actuarial Journal, 2008(2-3), 79-113.
- [7] Choi Y., Kim C., 2009, *Securitization of Longevity Risks Using Percentile Tranche Methods*. Australian School of Business, The University of New South Wales, Research Paper No. 2009ACTL02.
- [8] Commissione Nazionale per le Società e la Borsa (CONSOB), *La "securitisation"*. Disponibile su: <https://www.consob.it/web/investor-education/la-securitisation->
- [9] Cowley A. & Cummins, J. D., 2005, *Securitization of life insurance assets and liabilities*. Journal of Risk and Insurance, 72(2), 193-226.

- [10] Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A, 1985, “*A Theory of the Term Structure of Interest Rates*”. *Econometrica*, 53: pp. 385–407.
- [11] Cummins, J. D., 2004, *Securitization of life insurance assets and liabilities*. Financial Institutions Center Working Paper 04-03, The Wharton School, Philadelphia.
- [12] Cummins J. D. & Trainar P., 2009, *Securitization, insurance, and reinsurance*. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3), 463-492.
- [13] D’Amato V., 2008, *Il fenomeno della longevità ed il rischio di modello: analisi e misura*. Tesi di Dottorato in Matematica per l’Analisi economica e la Finanza - XX Ciclo, Coordinatore Tutor: Prof.ssa Di Lorenzo E.
- [14] Gentile M., Renò R., 2002, *Which model for the Italian interest rates?*. Working Paper Series No. 2002/02, LEM Working Paper Series.
- [15] Hunt A., Blake D. P., 2015, *Identifiability in Age/Period/Cohort Mortality Models*. Pensions Institute Discussion Paper PI-1509.
- [16] Hyndman R., Booth H., Tickle L., Maindonald J., Wood S., R Core Team, 2025, *Forecasting Mortality, Fertility, Migration and Population Data*. CRAN R package manual, versione 1.24. Disponibile su: <https://cran.r-project.org/web/packages/demography/demography.pdf>
- [17] Hull J.C., 2015, *Options, futures, and other derivatives*, 9th edition, Pearson.
- [18] Human Mortality Database (HMD), 2025, *Italy: Death Rates and Exposure-to-risk*. University of California, Berkeley e Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock (Germania). Disponibili su: <https://www.mortality.org/Country/Country?cntr=ITA>
- [19] ISTAT, 2025, *Demografia in cifre – Popolazione residente per sesso, età e stato civile al 1° gennaio 2025*. Disponibile su: <https://demo.istat.it/app/?i=POS>

- [20] ISTAT, 2025, Demografia in cifre – Previsioni della popolazione residente per sesso, età e regione al 1° gennaio 2050.. Disponibile su: <https://demo.istat.it/app/?i=PPR&l=it>.
- [21] ISTAT, 2025, *Rapporto annuale 2025. La situazione del Paese*. Disponibile su: <https://www.istat.it/wp-content/uploads/2025/05/Rapporto-Annuale-2025-integrale.pdf>
- [22] Kaya O., 2017, *Synthetic securitisation*. Deutsche Bank Research. EU Monitor. Frankfurt am Main.
- [23] Lee R.D., Carter L.R., 1992, *Modeling and forecasting US mortality*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 87, No.419, pp- 659-671.
- [24] Lenhert N., Altrock F., Rache S., Trueck S., Wilch A., 2005, *Implied correlations in CDO tranches*. Working Paper, West LB & Universitäten Karlsruhe, Queensland und Santa Barbara.
- [25] Lin Y. & Cox S. H., 2008, *Securitization of catastrophe mortality risks*. Insurance: Mathematics and Economics, 42(2), 628-637.
- [26] Lorson J., Wagner J., 2012, *The pricing of hedging longevity risk with the help of annuity securitizations: an application to the German market*. Institute of Insurance Economics, University of St. Gallen, Working Papers on Risk Management and Insurance No. 118.
- [27] Maccheroni C., Barugola T., 2011, *E se l'aspettativa di vita continuasse la sua crescita? Alcune ipotesi per le generazioni italiane 1950-2005*. Working Paper 97/10 CeRP.
- [28] Pelsser A, 2008, *On the applicability of the Wang transform for pricing financial risks*. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 38(1), 171-181.

[29] Pitacco E., 2022, *Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita*, Prima Edizione, Luglio Editore.

[30] Ulrich E., *Moderni sviluppi degli studi sulla sopravvivenza*. Tesi di laurea in Scienze Statistiche, Attuariali ed Economiche, Università Cattolica del Sacro Cuore di Milano, Relatore: Prof.ssa P. Mazzoleni.

[31] Vasicek O. A., 1977, *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*. Journal of Financial Economics, 5: pp. 177–88.

[32] Visco I., 2015, *Il rischio di longevità e i cambiamenti dell'economia*. Disponibile su: <https://www.bancaditalia.it/pubblicazioni/interventi-governatore/integov2015/visco-11122015.pdf>

[33] Wang S. S., 2002, *A universal framework for pricing financial and insurance risks*. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA 32.2, pp. 213-234.

8. Appendice grafica

La seguente appendice riporta gli *script* implementati in R utilizzati per la produzione di alcune elaborazioni grafiche presenti nel corpo principale dell'elaborato.

Nel dettaglio, si procede a fornire i codici relativi alle seguenti Figure:

- le Figure 1 e 2 (capitolo 2) sono piramidi per età e sesso della popolazione al 1° Gennaio 2025 e al 1° gennaio 2050;
- la Figura 3 (capitolo 4, paragrafo 4.1) rappresenta la struttura dei *survivor bonds*;
- i Grafici 1–3 (capitolo 5, paragrafo 5.1) riguardano l'analisi descrittiva dei tassi di mortalità condotta nella fase preliminare del lavoro empirico.

Le restanti rappresentazioni grafiche, direttamente connesse allo *script* dell'analisi empirica, sono riportate nell'appendice tecnica (Capitolo 9), che ne documenta anche l'elaborazione metodologica.

8.1 Piramidi della popolazione per età e sesso

Dopo aver caricato le librerie necessarie per la realizzazione dei *plot*, si procede con l'importazione dei dati relativi alla popolazione italiana residente al 1° gennaio 2025 e a quella prevista al 1° gennaio 2050, precedentemente scaricati dal sito dell'ISTAT e salvati in un file Excel.

In entrambi i casi, i dati vengono opportunamente preparati, ovvero trasformati e aggregati in classi quinquennali. Per costruire le piramidi della popolazione (riportate nel capitolo 2), la componente maschile viene rappresentata con valori negativi, in modo tale da ottenere un grafico simmetrico a barre orizzontali, distinto per sesso.

8.1.1 Codice R - Piramidi della popolazione per età e sesso

```
library(ggplot2)
library(dplyr)
library(tidyr)
library(readxl)
library(scales)
```

```

# Popolazione 1° gennaio 2025

# Caricamento dei dati
dati_popolazione <- read_excel("~/Desktop/Popolazione
                                residente.xlsx", sheet = "Pop
                                residente 2025")

# Preparazione dei dati e raggruppamento in classi
quinquennali

dati_raggruppati <- dati_popolazione %>%
  select(Età, `Totale maschi`, `Totale femmine`) %>%
  pivot_longer(
    cols = c(`Totale maschi`, `Totale femmine`),
    names_to = "Sesso_raw",
    values_to = "Popolazione"
  ) %>%
  mutate(
    Età = gsub("[^0-9]", "", Età),
    Età = as.numeric(Età),
    Sesso = case_when(
      Sesso_raw == "Totale maschi" ~ "Maschi",
      Sesso_raw == "Totale femmine" ~ "Femmine",
      TRUE ~ as.character(Sesso_raw)
    ),
    Classe_eta_start = floor(Età / 5) * 5,
    Classe_eta = case_when(
      Classe_eta_start < 100 ~ paste0(Classe_eta_start, "-",
                                       Classe_eta_start + 4),
      Classe_eta_start >= 100 ~ "100+"
    )
  ) %>%
  group_by(Classe_eta, Sesso) %>%
  summarise(Popolazione_aggregata = sum(Popolazione, na.rm =
                                       TRUE)) %>%
  ungroup() %>%
  mutate(Popolazione_plot = ifelse(Sesso == "Maschi",
                                   -Popolazione_aggregata, Popolazione_aggregata))

order_age_classes <- c(paste0(seq(0, 95, by = 5), "-", seq(4,
99, by = 5)), "100+")
dati_raggruppati$Classe_eta <-
  factor(dati_raggruppati$Classe_eta,
         levels = order_age_classes)

# Piramide delle età

ggplot(dati_raggruppati, aes(x = Classe_eta, y =
  Popolazione_plot, fill = Sesso)) +
  geom_bar(stat = "identity") +
  scale_y_continuous(

```

```

    labels = function(x) scales::label_comma(big.mark = ".",
      decimal.mark = ",",) (abs(x)),
    limits = max(dati_raggruppati$Popolazione_aggregata,
      na.rm = TRUE) * c(-1, 1)
  ) +
  coord_flip() +
  labs(
    title = "Popolazione per età e sesso - 1° gennaio 2025",
    x = "Fascia d'età",
    y = "Popolazione",
    fill = "Sesso"
  ) +
  scale_fill_manual(values = c( "Femmine" = "salmon",
    "Maschi" = "skyblue")) +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "bottom")

# Popolazione prevista 1° gennaio 2050

# Caricamento dei dati

dati_popolazione50 <- read_excel("~/Desktop/Popolazione
residente.xlsx", sheet = "Pop residente 2050")

# Preparazione dei dati e raggruppamento in classi
quinquennali

dati_raggruppati_50 <- dati_popolazione50 %>%
  select(Età, `Totale maschi`, `Totale femmine`) %>%
  pivot_longer(
    cols = c(`Totale maschi`, `Totale femmine`),
    names_to = "Sesso_raw",
    values_to = "Popolazione"
  ) %>%
  mutate(
    Età = gsub("[^0-9]", "", Età),
    Età = as.numeric(Età),

    Sesso = case_when(
      Sesso_raw == "Totale maschi" ~ "Maschi",
      Sesso_raw == "Totale femmine" ~ "Femmine",
      TRUE ~ as.character(Sesso_raw)
    ),

    Classe_eta_start = floor(Età / 5) * 5,
    Classe_eta = case_when(
      Classe_eta_start < 100 ~ paste0(Classe_eta_start, "-",
        Classe_eta_start + 4),
      Classe_eta_start >= 100 ~ "100+"
    )
  ) %>%

```

```

group_by(Classe_eta, Sesso) %>%
summarise(Popolazione_aggregata = sum(Popolazione,
      na.rm = TRUE)) %>%
ungroup() %>%
mutate(Popolazione_plot = ifelse(Sesso == "Maschi",
      -Popolazione_aggregata, Popolazione_aggregata))

order_age_classes <- c(paste0(seq(0, 95, by = 5), "-"), seq(4,
99, by = 5)), "100+")
dati_raggruppati_50$Classe_eta <-
      factor(dati_raggruppati_50$Classe_eta,
      levels = order_age_classes)

# Piramide delle età

ggplot(dati_raggruppati_50, aes(x = Classe_eta, y =
      Popolazione_plot, fill = Sesso)) +
geom_bar(stat = "identity") +
scale_y_continuous(
      labels = function(x) label_comma(big.mark = ".",
      decimal.mark = ",")(abs(x)),
      limits = max(dati_raggruppati_50$Popolazione_aggregata,
      na.rm = TRUE) * c(-1, 1)
) +
coord_flip() +
labs(
      title = "Popolazione per età e sesso - Previsioni al 1°
      gennaio 2050",
      x = "Fascia d'età",
      y = "Popolazione",
      fill = "Sesso"
) +
scale_fill_manual(values = c("Maschi" = "skyblue",
      "Femmine" = "salmon")) +

theme_minimal() +
theme(legend.position = "bottom")

```

8.2 Struttura *survivor bonds*

Per rappresentare in modo schematico la struttura e il meccanismo di funzionamento dei *survivor bonds*, è stato costruito un diagramma ispirato a quello proposto da Choi e Kim (2009). Il diagramma, riportato nel paragrafo 4.1 del capitolo 4, realizzato grazie al pacchetto `library(DiagrammeR)` e alla funzione `grViz()`, consente di mostrare le relazioni tra i soggetti coinvolti (assicurati, assicuratore, SPV, investitori) e i flussi finanziari che si generano in funzione della sopravvivenza della coorte assicurata.

8.2.1 Codice R - Struttura *survivor bonds*

```
library(DiagrammeR)

grViz("
digraph schema_survivor_bond {
  graph [rankdir=TB, layout=dot, ranksep=1.5, splines=true]

  node [shape=box, style=filled, fontname=Times, fontsize=12,
fillcolor=lightblue]

  Assicurati [label=' Assicurati']
  Assicuratore [label=' Assicuratore']
  SPV [label=' SPV \\n (gestisce flussi)']
  Investitori [label=' Investitori \\n (acquistano survivor
bonds)']

  // { rank = same; SPV; Investitori } <-- rimosso

  Assicurati -> Assicuratore [
    label='Premi',
    fontcolor=black,
    fontsize=10,
    arrowsize=1,
    color=black,
    constraint=false,
    minlen=2
  ]

  Assicuratore -> Assicuratati [
    label='Rendite',
    fontcolor=black,
    fontsize=10,
    arrowsize=1,
    color=black,
    constraint=false,
    minlen=2
  ]

  Assicuratore -> SPV [
    label='Premio annuo \\n fisso',
    fontcolor=black,
    fontsize=10,
    arrowsize=1,
    color=black
  ]

  SPV -> Assicuratore [
    label='Pagamento compensativo \\n (se sopravvivenza ↑)',
    fontcolor=red,
```

```

    fontsize=10,
    arrowsize=1,
    color=red
]

Investitori -> SPV [
    label='Capitale \\n raccolto',
    fontcolor=black,
    fontsize=10,
    arrowsize=1,
    color=black
]

SPV -> Investitori [
    label='Cedole \\n(ridotte se sopravvivenza ↑)',
    fontcolor=darkgreen,
    fontsize=10,
    arrowsize=1,
    color=darkgreen
]
}
")

```

8.3 Grafici descrittivi dei tassi di mortalità

Si riportano gli *script* che hanno consentito la rappresentazione dei tre grafici descrittivi, riportati nel paragrafo 5.1 del capitolo 5, volti a sintetizzare l'andamento e l'evoluzione dei tassi di mortalità specifici per età in Italia, utilizzando i dati scaricati dall'*Human Mortality Database* (HMD).

Le rappresentazioni grafiche proposte consentono una prima valutazione empirica del fenomeno della longevità, fornendo spunti interessanti per interpretare le principali dinamiche demografiche che caratterizzano la popolazione italiana nel periodo considerato 1950-2022.

Il primo grafico è la rappresentazione dell'andamento dei tassi di mortalità per età, su scala logaritmica ed evidenzia le trasformazioni nel profilo di mortalità nel corso di sei anni selezionati.

Il secondo grafico mostra la riduzione della mortalità tra il 1950 e il 2022, misurata tramite la differenza logaritmica.

Il terzo ed ultimo grafico consiste nell'*heatmap* che consente di visualizzare in maniera intuitiva l'evoluzione dei tassi di mortalità considerando congiuntamente età e anno di calendario.

8.3.1 Codice R - Grafici descrittivi dei tassi di mortalità

```
# Grafico 1

# Preparazione dei dati

Mx <- read.table("~/Desktop/Mx_1x1 Italia.txt", header=TRUE,
quote="\")
head(Mx)

Mx_total <- Mx[,-c(3:4)]
head(Mx_total)
tail(Mx_total)

Mx_total$Age <- as.integer(Mx_total$Age)

Mx_total <- Mx_total %>% filter (Age <= 104)
head(Mx_total)
tail(Mx_total)

Mx_total$Age <- as.integer(Mx_total$Age)
Mx_total$Total <- as.numeric(Mx_total$Total)

# Selezione degli anni da plottare e preparazione del dataset

years_to_plot <- c(1950,1965,1980,1995, 2010, 2022)

plot_data <- Mx_total %>%
  filter(Year %in% years_to_plot) %>%
  mutate(
    Year = factor(Year, levels = years_to_plot),
    LogTotal = log10(Total)
  )

# Grafico dell'andamento dei tassi di mortalità su scala
logaritmica

ggplot(plot_data, aes(x = Age, y = LogTotal, color = Year)) +
  geom_line(size = 1) +
  scale_y_continuous() +
  scale_x_continuous(breaks = seq(0, 105, 5)) +
  labs(
    title = "Tassi di mortalità storici in Italia ",
```

```

    x = "Età",
    y = "Tassi di mortalità specifici per età (scala log10)",
    color = "Anno"
  ) +
  theme_minimal(base_size = 14) +
  theme(
    axis.title.x = element_text(size = 10),
    axis.title.y = element_text(size = 10),
    legend.position = "bottom",
    legend.text = element_text(size=10),
    legend.title = element_text(size=12),
    legend.key.size= unit(0.6, "lines")
  )

# Grafico 2

# Estrazione dei dati 1950 e 2022
mort_1950 <- Mx_total %>% filter(Year == 1950) %>%
  arrange(Age)
mort_2022 <- Mx_total %>% filter(Year == 2022) %>%
  arrange(Age)

# Calcolo della log-differenza
diff_log <- log(mort_1950$Total) - log(mort_2022$Total)

diff_data <- data.frame(
  Age = mort_1950$Age,
  LogDifference = diff_log
)

# Grafico della riduzione logaritmica dei tassi di mortalità

ggplot(diff_data, aes(x = Age, y = LogDifference)) +
  geom_line(color = "darkred", size = 1.2) +
  labs(
    title = "Riduzione logaritmica dei tassi di mortalità
            (1950 vs 2022)",
    x = "Età",
    y = "Log(Mortalità 1950) - Log(Mortalità 2022)"
  ) +
  theme_minimal(base_size = 14)+
  theme(
    plot.title = element_text(size=12),
    axis.title.x = element_text(size = 10),
    axis.title.y = element_text(size = 10)
  )

```

```

# Grafico 3

# Preparazione dei dati

heat_data <- Mx_total %>%
  filter(Age <= 100) %>% # Per leggibilità
  mutate(log_mort = log10(Total))

# Heatmap dell'evoluzione dei tassi di mortalità in Italia

ggplot(heat_data, aes(x = Year, y = Age, fill = log_mort)) +
  geom_tile() +
  scale_fill_viridis_c(name = "log10(Mortalità)",
    option = "D") +
  labs(
    title = "Evoluzione dei tassi di mortalità in Italia
      (1950-2022)",
    x = "Anno",
    y = "Età"
  ) +
  theme_minimal(base_size = 13)+
  theme(
    plot.title =element_text(size=12),
    axis.title.x = element_text(size = 11),
    axis.title.y = element_text(size = 11),
    legend.title = element_text(size=11)
  )

```

9. Appendice tecnica

La presente appendice raccoglie il codice prodotto usando il *software* statistico R per l'elaborazione dei dati, per la stima del modello di Lee-Carter e per la valutazione del prezzo dei *survivor bonds* ed, inoltre, tutte le visualizzazioni grafiche connesse ai risultati presentati nel capitolo 5 e non riportate nell'appendice grafica (Capitolo 8).

Il codice è accompagnato da commenti essenziali che rendono agevole la comprensione e la riproducibilità di tutte le operazioni svolte.

9.1 Preparazione dei dati

Dall'*Human Mortality Database*, sono stati scaricati i seguenti dati:

- i tassi di mortalità per età e anno, aggregati per entrambi i sessi;
- gli esposti al rischio (popolazione media) per età e anno, anch'essi aggregati.

Il *dataset* originale considerava come fascia d'età 0-110 anni. Tuttavia, per garantire stabilità statistica e coerenza con le proiezioni future, l'analisi è stata limitata alle età 0-104 anni. I dati sono stati successivamente riorganizzati in matrici in cui le righe rappresentano le età e le colonne gli anni di calendario, al fine di renderli compatibili con la funzione `demogdata()` del pacchetto `demography` di R, che ha consentito la creazione dell'oggetto `demog_data`.

È stata inoltre effettuata una verifica sull'assenza di valori mancanti, infiniti o nulli e sono stati applicati controlli per l'identificazione e l'eliminazione di eventuali anomalie.

9.1.1 Codice R - Preparazione dei dati

```
# Caricamento delle librerie necessarie

library(demography)
library(forecast)
library(dplyr)
library(tidyr)
library(ggplot2)
```

```

# Importazione dei tassi di mortalità totali

Mx <- read.table("~/Desktop/Mx_1x1 Italia.txt", header=TRUE,
quote="\")
Mx_total <- Mx[,-c(3:4)]
Mx_total$Age <- as.integer(Mx_total$Age)
Mx_total <- Mx_total %>% filter(Age <= 104)

# Importazione degli esposti al rischio totali

Exposures <- read.table("~/Desktop/Exposures_1x1 Italia.txt",
header=TRUE, quote="\")
Exposures_total <- Exposures[,-c(3:4)]
Exposures_total$Age <- as.integer(Exposures_total$Age)
Exposures_total <- Exposures_total %>% filter (Age <= 104)

# Riorganizzazione dei dati in matrici: righe = età, colonne
= anni

Mx_total_matrix <- Mx_total %>%
  pivot_wider(names_from = Year, values_from = Total) %>%
  select(-Age) %>%
  as.matrix()

Exposures_total_matrix <- Exposures_total %>%
  pivot_wider(names_from = Year, values_from = Total) %>%
  select(-Age) %>%
  as.matrix()

# Controllo della qualità dei dati

Mx_total$Total <- as.numeric(Mx_total$Total)
Exposures_total$Total <- as.numeric(Exposures_total$Total)

#Verifica valori NA e valori infiniti

any(is.infinite(Mx_total$Total))
any(is.nan(Mx_total$Total))
any(is.infinite(Exposures_total$Total))
any(is.nan(Exposures_total$Total))

# Creazione dell'oggetto demogdata per l'analisi demografica

demog_data <- demogdata(
  data = Mx_total_matrix,
  pop = Exposures_total_matrix,
  type= "mortality",

```

```

label= "Italy",
name= "Total",
ages = sort(unique(Mx_total$Age)),
years = sort(unique(Mx_total$Year))
)

# Controllo del range delle età nell'oggetto demogdata

min(demog_data$age)
max(demog_data$age)

```

9.2 Stima e previsione del modello LC

L'oggetto `demog_data` risultante è stato utilizzato come *input* per la successiva modellizzazione del modello di Lee-Carter.

Il modello è stato stimato tramite la funzione `lca()` del pacchetto `demography`, che ha consentito di ricavare le componenti fondamentali del modello (a_x , b_x e k_t) e di generare le relative rappresentazioni grafiche.

Sulla base del modello stimato, sono state effettuate le previsioni dei tassi di mortalità. In particolare, è stato scelto un orizzonte di previsione pari a 10 anni, coerente con la durata del *survivor bond* che verrà prezzato nella fase successiva dell'analisi.

Mediante la funzione `forecast()` applicata al modello di Lee-Carter precedentemente stimato, sono stati ottenuti i tassi di mortalità proiettati e successivamente rappresentati tramite la funzione `plot()`.

Oltre alla previsione puntuale dei tassi di mortalità ottenuta applicando la funzione `forecast()`, risulta utile al fine di determinare il prezzo del *survivor bond*, implementare una simulazione stocastica esplicita della componente k_t del modello di Lee-Carter, modellata come un *random walk* con *drift*, per generare traiettorie simulate della mortalità futura.

È necessario fissare il seme per garantire la riproducibilità delle simulazione mediante la funzione `set.seed()`.

Si procede a generare, mediante un ciclo `for()`, 1 000 traiettorie di k_t su un orizzonte temporale di 10 anni, partendo dall'ultimo valore osservato di k_t e poi a stimare il *drift* e la deviazione *standard* dalle differenze storiche di k_t .

Dopo di che con un doppio ciclo `for()`, ognuno dei quali scorre sulle simulazioni e sugli anni futuri, si costruisce un *array* tridimensionale dei valori simulati di $ln^{(s)}m(x, t)$ con la seguente struttura: [età] x [anno futuro] x [simulazione].

Per ogni simulazione s e per ogni anno t , il vettore dei log-tassi di mortalità viene calcolato ricorrendo alla formula classica del modello di Lee-Carter: $ln^{(s)}m(x, t) = a_x + b_x k_t^{(s)}$.

Applicando poi la funzione `exp()`, si ottengono i tassi di mortalità centrali simulati $m^{(s)}(x, t)$ in scala reale.

9.2.1 Codice R - Stima e previsione del modello Lee-Carter

```
# Costruzione del modello di Lee-Carter

lca_model <- lca(demog_data)
summary(lca_model)

# Estrazione delle componenti del modello

ax <- lca_model$ax
bx <- lca_model$bx
kt <- lca_model$kt

# Rappresentazione grafica delle componenti del modello

plot(lca_model)

# Definizione dell'orizzonte di previsione decennale

h_forecast <- 10

# Previsione dei tassi di mortalità con il modello Lee-Carter

forecasts <- forecast(lca_model, h=h_forecast)

# Rappresentazione grafica delle previsioni

plot(forecasts)
```

```

# Parametri di simulazione

h <- 10                # Orizzonte temporale
nsim <- 1000          # Numero di simulazioni
age0 <- 65            # Età iniziale per la simulazione
lx0 <- 100000         # Popolazione iniziale ipotetica

# Parametri del modello Lee Carter stimato

alpha <- lca_model$ax
beta <- lca_model$bx
kappa <- lca_model$kt
ages <- lca_model$age
years <- lca_model$year

# Stima di drift e deviazione standard delle differenze di kt

kappa_diff <- diff(kappa)
drift <- mean(kappa_diff)
sd_kappa <- sd(kappa_diff)

# Simulazioni di kt (random walk con drift)

set.seed(123)         # Per garantire la riproducibilità

kappa_sim <- matrix(NA, nrow = nsim, ncol = h)

for (i in 1:nsim) {
  kappa_sim[i, 1] <- tail(kappa, 1) + drift + rnorm(1, 0,
  sd_kappa)
  for (t in 2:h) {
    kappa_sim[i, t] <- kappa_sim[i, t - 1] + drift +
    rnorm(1, 0, sd_kappa)
  }
}

# Costruzione delle matrici di log-tassi di mortalità
simulati

age_idx <- match(age0:(age0 + h - 1), ages)
n_age <- length(age_idx)
log_mu_array <- array(NA, dim = c(n_age, h, nsim))

for (s in 1:nsim) {
  for (t in 1:h) {
    log_mu_array[, t, s] <- alpha[age_idx] + beta[age_idx] *
    kappa_sim[s, t]
  }
}

```

```
# Calcolo dei tassi di mortalità simulati (scala reale)
mu_array <- exp(log_mu_array)
```

9.3 Pricing inverse longevity bond

È necessario costruire una matrice delle sopravvivenze simulate, al fine di stimare, per ogni simulazione e per ciascun anno dell'orizzonte temporale considerato, il numero di sopravvissuti all'età $x + t$ a partire da una coorte iniziale di 100 000 individui vivi a 65 anni.

Si costruisce la matrice $l_{x+t}^{(s)}$, in cui ogni elemento rappresenta il numero stimato di sopravvissuti all'età $x + t$, per la simulazione s , ottenuto iterativamente sulla base dei tassi di mortalità simulati, secondo la relazione $l_{x+t}^{(s)} = l_{x+t-1}^{(s)} \cdot e^{-m^{(s)}(x+t,t)}$ dove $m^{(s)}(x + t, t)$ è il tasso di mortalità centrale simulato per l'età $x + t$, nell'anno t , alla simulazione s , la cui funzione esponenziale rappresenta una buona approssimazione della probabilità di sopravvivenza alle età adulte o avanzate, dove i tassi di mortalità cambiano gradualmente da un anno all'altro.

A questo punto, si impiega la funzione `apply()` sulla matrice dei sopravvissuti per estrarre i percentili delle sopravvivenze simulate anno per anno.

L'ultimo *step* consiste nella determinazione del prezzo del *survivor bond*, fissando come parametri il tasso cedolare c , il tasso di sconto r e il valore nominale F .

Per ogni *tranche* e per ogni anno dell'orizzonte temporale, si calcola la cedola attesa. A tal fine, è necessario definire il percentile inferiore e superiore, che rappresentano l'*attachment point* (`p_low`) e il *detachment point* (`p_high`). In questo modo è possibile determinare, per ogni simulazione la perdita relativa alla *tranche*, a seconda della sopravvivenza simulata:

- se la sopravvivenza è inferiore al a `p_low` allora la cedola è piena e la perdita è nulla;
- se la sopravvivenza è maggiore di `p_high` la cedola è nulla e la perdita è completa;
- se la sopravvivenza è compresa tra `p_low` e `p_high`, la perdita viene calcolata in modo proporzionale decrescente ed è possibile determinare la quota di cedola spettante `prop`.

Alla fine è possibile calcolare la cedola attesa come prodotto tra la media delle quote spettanti su tutte le simulazioni, il tasso cedolare e il valore nominale.

Si dispone di tutti gli elementi per calcolare il prezzo del *survivor bond*: per ogni *tranche*, si effettua la somma prodotto tra il vettore delle cedole attese e il vettore dei fattori di attualizzazione a cui si aggiunge il valore nominale a scadenza opportunamente attualizzato.

Per rendere il procedimento più flessibile, è possibile costruire delle funzioni che consentono di calcolare il prezzo dei *survivor bonds* al variare del tasso cedolare e del tasso di sconto.

In aggiunta, a titolo illustrativo, è stata effettuata un'analisi del profilo rischio-rendimento ipotizzando tasso di sconto e tasso cedolare pari al 5% e valore nominale pari a 100. È stata ricavata la distribuzione dei rendimenti (*yield distribution*) dei *survivor bonds* per ciascuna *tranche* e dello *straight bond*.

9.3.1 Codice R - Pricing inverse longevity bond

```
# Calcolo delle sopravvivenze simulate lx_{x+t}

lx_matrix <- matrix(NA, nrow = nsim, ncol = h)
for (s in 1:nsim) {
  lx <- numeric(h)
  lx[1] <- lx0 * exp(-mu_array[1, 1, s])
  for (t in 2:h) {
    lx[t] <- lx[t - 1] * exp(-mu_array[t, t, s])
  }
  lx_matrix[s, ] <- lx
}

# Definizione dei percentili delle tranche

percentiles <- c(0.5, 0.6, 0.75, 0.9, 0.99)
lx_percentiles <- apply(lx_matrix, 2, function(x) quantile(x,
probs = percentiles))

# Calcolo delle cedole attese per ogni tranche

coupon_rate <- 0.05
face_value <- 100
r <- 0.05
v <- 1 / (1 + r)
```

```

expected_coupons <- matrix(0, nrow = length(percentiles) - 1,
ncol = h)
tranche_labels <- paste0("Tranche_", 1:(length(percentiles) -
1))

for (j in 1:(length(percentiles) - 1)) {
  for (t in 1:h) {
    p_low <- lx_percentiles[j, t]
    p_high <- lx_percentiles[j + 1, t]

    losses <- pmax(pmin(lx_matrix[, t] - p_low,
                        p_high - p_low), 0)

    prop <- 1 - (losses / (p_high - p_low))

    expected_coupons[j, t] <- mean(prop) * coupon_rate *
                              face_value
  }
}

# Calcolo del prezzo del survivor bond per ogni tranche

prices <- numeric(length(tranche_labels))
for (j in 1:length(prices)) {
  prices[j] <- sum(expected_coupons[j, ] * v^(1:h)) +
              face_value * v^h
}

# Output tabella prezzi

price_df <- data.frame(
  Tranche = tranche_labels,
  Price = round(prices, 2)
)

print(price_df)

# Calcolo del prezzo dello straight bond

coupon <- 0.05
face_value <- 100
r <- 0.05
T <- 10

v <- 1 / (1 + r)
coupon_value <- coupon * face_value

```

```

price_straight <- sum(rep(coupon_value, T) * v^(1:T)) +
                    face_value * v^T

print(round(price_straight, 2)) # Output atteso: 100.00

# Funzioni per analisi di sensitività

# Funzione prezzi survivor bond
price_survivor_bond <- function(expected_coupons, face_value,
rate) {
  v <- 1 / (1 + rate)
  h <- ncol(expected_coupons)
  tranche_prices <- numeric(nrow(expected_coupons))

  for (j in 1:nrow(expected_coupons)) {
    tranche_prices[j] <- sum(expected_coupons[j, ] * v^(1:h))
    + face_value * v^h
  }
  return(tranche_prices)
}

# Funzione prezzi straight bond

price_straight_bond <- function(face_value, coupon_rate,
rate, T = 10) {
  C <- face_value * coupon_rate
  v <- 1 / (1 + rate)
  pv_coupons <- sum(rep(C, T) * v^(1:T))
  pv_redemption <- face_value * v^T
  return(pv_coupons + pv_redemption)
}

# Parametri

coupon_rates <- seq(0.05, 0.12, by = 0.01) # 5% to 12%
interest_rates <- seq(0.03, 0.10, by = 0.01) # 3% to 10%
face_value <- 100
T <- 10
# Tabelle prezzi survivor bond

survivor_tables <- list()

for (j in 1:4) {
  tbl <- matrix(NA, nrow = length(coupon_rates), ncol =
length(interest_rates))
  rownames(tbl) <- paste0(coupon_rates * 100, "%")
  colnames(tbl) <- paste0(interest_rates * 100, "%")
}

```

```

for (i in seq_along(coupon_rates)) {
  cr <- coupon_rates[i]
  expected_coupons_scaled <- expected_coupons[j, ]/0.05 * cr
  for (k in seq_along(interest_rates)) {
    r <- interest_rates[k]
    tbl[i,k] <- price_survivor_bond(matrix
      (expected_coupons_scaled , nrow = 1),
      face_value, r)
  }
}
survivor_tables[[paste0("Tranche_", j)]] <- round(tbl, 2)
}

# Tabelle prezzi straight bond

straight_tbl <- matrix(NA, nrow = length(coupon_rates), ncol
= length(interest_rates))
rownames(straight_tbl) <- paste0(coupon_rates * 100, "%")
colnames(straight_tbl) <- paste0(interest_rates * 100, "%")

for (i in seq_along(coupon_rates)) {
  for (j in seq_along(interest_rates)) {
    straight_tbl[i, j] <- price_straight_bond(face_value,
      coupon_rates[i], interest_rates[j], T)
  }
}
straight_tbl <- round(straight_tbl, 2)

# Output: stampa delle tabelle dei prezzi

print("Prezzi Survivor Bond - Tranche 1")
print(survivor_tables[["Tranche_1"]])

print("Prezzi Survivor Bond - Tranche 2")
print(survivor_tables[["Tranche_2"]])

print("Prezzi Survivor Bond - Tranche 3")
print(survivor_tables[["Tranche_3"]])

print("Prezzi Survivor Bond - Tranche 4")
print(survivor_tables[["Tranche_4"]])

print("Prezzi Straight Bond")
print(straight_tbl)

```

```

# Calcolo degli yield (tasso interno di rendimento)

# Funzione per calcolare IRR

compute_yield <- function(price, coupons, face_value, T) {
  irr_function <- function(y) {
    v <- 1 / (1 + y)
    sum(coupons * v^(1:T)) + face_value * v^T - price
  }
  uniroot(irr_function, c(0, 1))$root
}

# Etichette delle tranche
tranche_labels <- paste0("Tranche_", 1:
                        (nrow(expected_coupons)))

# Creazione della tabella per i risultati

yield_table <- data.frame(
  Tranche = tranche_labels,
  Yield_min = NA,
  Yield_avg = NA,
  Yield_max = NA
)

# Calcolo yield per ciascuna tranche

for (j in 1:nrow(expected_coupons)) {
  price <- prices[j]
  coupon_min <- rep(0, h)
  coupon_avg <- expected_coupons[j, ]
  coupon_max <- rep(coupon_rate * face_value, h)

  yield_table$Yield_min[j] <- compute_yield(price,
                                           coupon_min, face_value, h)
  yield_table$Yield_avg[j] <- compute_yield(price,
                                           coupon_avg, face_value, h)
  yield_table$Yield_max[j] <- compute_yield(price,
                                           coupon_max, face_value, h)
}

# Calcolo yield straight bond

straight_yield <- compute_yield(price_straight,
                               rep(coupon_rate * face_value, h), face_value, h)

yield_table <- rbind(
  yield_table,
  data.frame(
    Tranche = "Straight Bond",
    Yield_min = straight_yield,

```

```

    Yield_avg = straight_yield,
    Yield_max = straight_yield
  )
)

# Conversione risultati in percentuale con 2 decimali
yield_table_percent <- yield_table
yield_table_percent[, 2:4] <- round(yield_table_percent[,
                                   2:4] * 100, 2)

# Aggiunta simbolo % come stringa

yield_table_percent[, 2:4] <- lapply(yield_table_percent[,
                                   2:4], function(x) paste0(x, "%"))

# Output

print(yield_table_percent)

```

9.4 Aggiunta del premio per il rischio mediante Wang Transform

Per tener conto del premio per il rischio, computazionalmente, dopo aver simulato le traiettorie di sopravvivenza tramite il modello di Lee-Carter, si applica la trasformazione di Wang – implementata nella funzione `wang_transform()` – alla proporzione della *tranche* non ancora colpita da perdite. Quindi, in questo caso, si applica la *Wang Transform* alla proporzione non intaccata della *tranche*, cioè una *proxy* della probabilità di sopravvivenza condizionata all'intervallo percentile.

Questo consente di ottenere una valutazione distorta in senso prudenziale della quota di cedola attesa, tenendo conto dell'avversione al rischio degli investitori attraverso il parametro di distorsione.

Di seguito sono riportati esclusivamente i blocchi di codice che hanno subito delle modifiche per effetto dell'introduzione della *Wang Transform*.

9.4.1 Codice R - Aggiunta del premio per il rischio mediante Wang Transform

```

# Funzione per applicare la trasformazione di Wang

wang_transform <- function(p, lambda) {
  p_wang <- pnorm(qnorm(p) + lambda)
  return(p_wang)
}

```

```

# Calcolo delle cedole attese per ogni tranche

coupon_rate <- 0.05
face_value <- 100
r <- 0.05
v <- 1 / (1 + r)
lambda <- 0.5

expected_coupons <- matrix(0, nrow = length(percentiles) - 1,
                           ncol = h)
tranche_labels <- paste0("Tranche_",
                          1:(length(percentiles) - 1))

for (j in 1:(length(percentiles) - 1)) {
  for (t in 1:h) {
    p_low <- lx_percentiles[j, t]
    p_high <- lx_percentiles[j + 1, t]

    losses <- pmax(pmin(lx_matrix[, t] - p_low,
                       p_high - p_low), 0)

    # Calcolo delle cedole attese per ogni tranche
    prop <- 1 - (losses / (p_high - p_low))
    prop_wang <- wang_transform(prop, lambda)
    expected_coupons[j, t] <- mean(prop_wang) * coupon_rate *
                               face_value

  }
}

```

9.5 Alternativa modellistica: modello Cairns-Blake-Dowd

È stato, inoltre, preso in considerazione un altro modello di proiezione della mortalità, ovvero il modello Cairns-Blake-Dowd (CBD).

Si riporta il codice R esclusivamente per l'implementazione del modello, in quanto la prima fase di preparazione dei dati e la fase finale di *pricing* rimangono inalterate.

L'oggetto `demog_data()` precedentemente creato viene trasformato in un oggetto di tipo `StMoMoData()`, dopo aver opportunamente caricato la libreria `library(StMoMo)`.

La funzione `cbd()` in `StMoMo` crea un oggetto che rappresenta la struttura del CBD. In aggiunta, tale funzione usa di *default* il *link* "logit" al fine di modellare le probabilità di morte q_x .

La funzione `fit()` consente di adattare il modello CBD ai dati, specificando il *range* di età e di anni da includere nel *fitting* e la matrice dei pesi per indicare quali dati usare (in questo caso sono stati considerati tutti i dati).

Mediante la funzione `plot()` è possibile visualizzare i parametri stimati del modello.

Per la fase di previsione, dopo aver fissato i parametri, si procede innanzitutto alle simulazioni delle due serie temporali k_1 e k_2 che, successivamente, consentono di ricostruire i tassi di mortalità.

9.5.1 Codice R - Modello di proiezione della mortalità CBD

```
library(StMoMo)

stmomodata <- StMoMoData(demog_data)

# Definizione del modello

cbd_model <- cbd(link="logit")

ages_to_fit <- 65:80
years_to_fit <- stmomodata$years

wxt <- matrix(1, nrow = length(ages_to_fit), ncol =
length(years_to_fit))

fit_cbd <- fit(cbd_model, data = stmomodata, ages.fit =
ages_to_fit,
              years.fit = years_to_fit, wxt = wxt)

summary(fit_cbd)
plot(fit_cbd)

# Parametri di simulazione
h <- 10
nsim <- 1000
age0 <- 65
lx0 <- 100000
ages <- ages_to_fit
xbar <- mean(ages)
# Estrazione kt
kappa1 <- fit_cbd$kt[1, ]
kappa2 <- fit_cbd$kt[2, ]
```

```

# Stima drift e deviazione standard per simulazioni

drift1 <- mean(diff(kappa1))
drift2 <- mean(diff(kappa2))
sd_k1 <- sd(diff(kappa1))
sd_k2 <- sd(diff(kappa2))

# Simulazioni per kappa1 e kappa2

set.seed(123)
kappa1_sim <- matrix(NA, nsim, h)
kappa2_sim <- matrix(NA, nsim, h)

for (i in 1:nsim) {
  kappa1_sim[i, 1] <- tail(kappa1, 1) + drift1 + rnorm(1, 0,
sd_k1)
  kappa2_sim[i, 1] <- tail(kappa2, 1) + drift2 + rnorm(1, 0,
sd_k2)
  for (t in 2:h) {
    kappa1_sim[i, t] <- kappa1_sim[i, t - 1] + drift1 +
rnorm(1, 0, sd_k1)
    kappa2_sim[i, t] <- kappa2_sim[i, t - 1] + drift2 +
rnorm(1, 0, sd_k2)
  }
}

# Calcolo Log-tassi di mortalità simulati

age_idx <- match(age0:(age0 + h - 1), ages)
n_age <- length(age_idx)

log_mu_array <- array(NA, dim = c(n_age, h, nsim))

for (s in 1:nsim) {
  for (t in 1:h) {
    x <- ages[age_idx]
    log_mu_array[, t, s] <- kappa1_sim[s, t] + (x - xbar) *
kappa2_sim[s, t]
  }
}

# Estrazione dei tassi di mortalità

mu_array <- exp(log_mu_array)

```

9.6 Analisi del rischio demografico

Per analizzare il solo rischio demografico, si mantiene invariato il meccanismo che consente di determinare le *tranche* basate sui percentili di sopravvivenza, ma si rinuncia all'utilizzo delle cedole attese. La particolarità risiede nel fatto che per ognuna delle 1 000 traiettorie di sopravvivenza simulate, per ogni anno e per ogni *tranche*, si determina il flusso cedolare. Successivamente, per ogni simulazione si calcola il prezzo della *tranche* come somma attualizzata delle cedole simulate, a cui si aggiunge il valore nominale, anch'esso opportunamente attualizzato. I calcoli sono stati effettuati considerando tasso di sconto e tasso cedolare pari al 5% e valore nominale sempre pari a 100.

Nella pratica, si ottengono 1 000 prezzi simulati per ciascuna *tranche*, che costituiscono una distribuzione empirica dei prezzi legata esclusivamente alla componente demografica. Si procede poi a rappresentare tali distribuzioni mediante i *density plot* e a calcolare le principali statistiche descrittive (media, varianza, asimmetria e curtosi).

9.6.1 Codice R - Analisi del rischio demografico

```
# Parametri

nsim <- 1000
h <- 10
n_tranche <- length(percentiles) - 1
coupon_rate <- 0.05
face_value <- 100
r <- 0.05
v <- 1 / (1 + r)^(1:h)

# Definizione dei percentili delle tranche

percentiles <- c(0.5, 0.6, 0.75, 0.9, 0.99)
lx_percentiles <- apply(lx_matrix, 2, function(x) quantile(x,
probs = percentiles))

# Calcolo dei prezzi simulati per ogni tranche

coupons_all <- array(0, dim = c(nsim, h, n_tranche))
prices_all <- matrix(0, nrow = nsim, ncol = n_tranche)

for (j in 1:n_tranche) {
  p_low <- lx_percentiles[j, ]
```

```

p_high <- lx_percentiles[j + 1, ]

for (s in 1:nsim) {
  for (t in 1:h) {
    lx_sim <- lx_matrix[s, t]
    loss <- max(min(lx_sim - p_low[t], p_high[t] -
p_low[t]), 0)
    prop <- 1 - (loss / (p_high[t] - p_low[t]))
    coupons_all[s, t, j] <- prop * coupon_rate * face_value
  }

  prices_all[s, j] <- sum(coupons_all[s, , j] * v) +
    face_value * v[h]
}
}

# Calcolo delle statistiche descrittive

library(e1071)

n_tranche <- ncol(prices_all)

tranche_names <- paste0("Tranche_", 1:n_tranche)

stats_df <- data.frame(
  Tranche = tranche_names,
  Mean = numeric(n_tranche),
  Variance = numeric(n_tranche),
  Skewness = numeric(n_tranche),
  Kurtosis = numeric(n_tranche)
)

for (j in 1:n_tranche) {
  tranche_prices <- prices_all[, j]

  stats_df$Mean[j] <- mean(tranche_prices)
  stats_df$Variance[j] <- var(tranche_prices)
  stats_df$Skewness[j] <- skewness(tranche_prices)
  stats_df$Kurtosis[j] <- kurtosis(tranche_prices)
}

# Output statistiche

print(stats_df)

```

```

# Density plot di prezzi simulati per ogni tranche

# Preparazione del dataframe per il grafico

price_df_long <- as.data.frame(prices_all)
colnames(price_df_long) <- paste0("Tranche_", 1:n_tranche)
price_df_long$Simulation <- 1:nsim

price_long <- pivot_longer(price_df_long, cols =
  starts_with("Tranche_"), names_to = "Tranche",
  values_to = "Price")

ggplot(price_long, aes(x = Price, color = Tranche, fill =
  Tranche)) +
  geom_density(alpha = 0.3) +
  labs(title = "Density delle distribuzioni dei prezzi per
  tranche",
  x = "Prezzo simulato", y = "Densità") +
  theme_minimal()

```

9.7 Analisi del rischio finanziario

Per isolare il rischio finanziario, si mantiene costante il profilo demografico tramite l'utilizzo delle cedole attese basate sulla sopravvivenza media. I tassi di interesse, invece, vengono simulati ricorrendo a due modelli stocastici, il modello di Vasicek e quello di CIR, per cogliere l'incertezza legata all'evoluzione del mercato finanziario.

I parametri sono stati impostati sulla base delle stime ottenute nel *LEM Working Paper Series*:

- $a = 0.032$; $b = 0.0622$ e $\sigma = 0.0115$ per il modello Vasicek;
- $a = 0.1079$, $b = 0.0748$ e $\sigma = 0.0439$ per il modello CIR.

Per ciascuna traiettoria simulata dei tassi, si calcola il prezzo del titolo come somma attualizzata delle cedole attese più il valore nominale, utilizzando i fattori di sconto specifici. I prezzi ottenuti costituiscono una distribuzione empirica legata unicamente alla componente finanziaria.

9.7.1 Codice R - Analisi del rischio finanziario

```
# Modello Vasicek

# Parametri

a <- 0.032          # velocità di mean reversion
b <- 0.0622        # livello medio di lungo periodo
sigma <- 0.0115    # volatilità
r0 <- 0.055        # tasso iniziale
h <- 10            # orizzonte
nsim <- 1000      # simulazioni

# Simulazione dei tassi

set.seed(123)
r_matrix <- matrix(NA, nrow = nsim, ncol = h)

dt <- 1
for (i in 1:nsim) {
  r <- r0
  for (t in 1:h) {
    # discretizzazione esatta Vasicek
    m <- r * exp(-a*dt) + b * (1 - exp(-a*dt))
    s <- sigma * sqrt((1 - exp(-2*a*dt)) / (2*a))
    r <- m + s * rnorm(1)
    r_matrix[i, t] <- r
  }
}

# Calcolo dei prezzi per ogni tranche

tranche_n <- nrow(expected_coupons)
prices_financial <- matrix(NA, nrow = nsim, ncol = tranche_n)

face_value <- 100

for (s in 1:nsim) {
  r_vec <- r_matrix[s, ]
  v_vec <- exp(-cumsum(r_vec * dt))

  for (j in 1:tranche_n) {
    coupons <- expected_coupons[j, ]
    prices_financial[s, j] <- sum(coupons * v_vec) +
      face_value * v_vec[h]
  }
}
```

```

# Modello CIR

# Parametri

a_cir <- 0.1079          # velocità di mean reversion
b_cir <- 0.0748          # livello medio di lungo periodo
sigma_cir <- 0.0439      # volatilità
r0_cir <- 0.03           # tasso iniziale

# Funzione di simulazione

simulate_cir <- function(nsim, h, a, b, sigma, r0) {
  dt <- 1
  r_matrix_cir <- matrix(NA, nrow = nsim, ncol = h)
  for (s in 1:nsim) {
    r <- r0
    for (t in 1:h) {
      dr <- a * (b - r) * dt + sigma * sqrt(abs(r)) *
        rnorm(1, 0, sqrt(dt))
      r <- max(r + dr, 0)      # r >= 0
      r_matrix_cir[s, t] <- r
    }
  }
  return(r_matrix_cir)
}

set.seed(123)
r_matrix_cir <- simulate_cir(nsim, h, a_cir, b_cir,
  sigma_cir, r0_cir)

# Determinazione dei prezzi

prices_cir <- matrix(NA, nrow = nsim, ncol = tranche_n)

for (s in 1:nsim) {
  r_vec <- r_matrix_cir[s, ]
  v_vec <- exp(-cumsum(r_vec))

  for (j in 1:tranche_n) {
    coupons <- expected_coupons[j, ]
    prices_cir[s, j] <- sum(coupons * v_vec) +
      face_value * v_vec[h]
  }
}

# Overlay density plot

df_vas <- as.data.frame(prices_financial)
df_cir <- as.data.frame(prices_cir)
df_vas$Model <- "Vasicek"

```

```

df_cir$Model <- "CIR"
tranche_n <- ncol(prices_financial)
colnames(df_vas)[1:tranche_n] <- paste0("Tranche_",
                                         1:tranche_n)
colnames(df_cir)[1:tranche_n] <- paste0("Tranche_",
                                         1:tranche_n)

df_all <- bind_rows(df_vas, df_cir)
df_long_overlay <- pivot_longer(df_all,
                               cols = starts_with("Tranche_"),
                               names_to = "Tranche", values_to = "Prezzo")

ggplot(df_long_overlay, aes(x = Prezzo, color = Model, fill =
Model)) +
  geom_density(alpha = 0.3) +
  facet_wrap(~ Tranche, scales = "free") +
  scale_color_manual(values = c("Vasicek" = "red", "CIR" =
"blue")) +
  scale_fill_manual(values = c("Vasicek" = "red", "CIR" =
"blue")) +
  labs(
    title = "Overlay delle distribuzioni dei prezzi per
modello (Vasicek vs CIR)",
    x = "Prezzo simulato", y = "Densità",
    color = "Modello", fill = "Modello"
  ) +
  theme_minimal(base_size = 14) +
  theme(
    plot.title = element_text(size = 11, hjust = 0.3),
    axis.title.x = element_text(size = 10),
    axis.title.y = element_text(size = 10),
    legend.title = element_text(size = 10),
    legend.text = element_text(size = 9),
    strip.text = element_text(size = 10)
  )

# Calcolo delle statistiche

# Statistiche per il modello di Vasicek

stats_vas <- apply(prices_financial, 2, function(x) c(
  Mean = mean(x),
  Variance = var(x),
  Skewness = skewness(x),
  Kurtosis = kurtosis(x)
))

# Statistiche per il modello di CIR

stats_cir <- apply(prices_cir, 2, function(x) c(
  Mean = mean(x),

```

```

    Variance = var(x),
    Skewness = skewness(x),
    Kurtosis = kurtosis(x)
  ))

# Creazione del data frame comparativo

tranche_names <- paste0("Tranche_", 1:ncol(prices_cir))
df_stats_vas <- as.data.frame(t(stats_vas))
df_stats_cir <- as.data.frame(t(stats_cir))
df_stats_vas$Model <- "Vasicek"
df_stats_cir$Model <- "CIR"
df_stats_vas$Tranche <- tranche_names
df_stats_cir$Tranche <- tranche_names

df_compare <- rbind(df_stats_vas, df_stats_cir)

```

9.8 Analisi di due ulteriori scenari di rischio

Per completare l'analisi in merito alle componenti di rischio, sono stati implementati su R due ulteriori scenari che prevedono:

- cedole simulate e tasso d'interesse medio per ogni anno `r_mean` calcolato come media su tutte le simulazioni del modello CIR e applicato a tutte le simulazioni;
- cedole simulate e tassi d'interesse simulati.

Nel primo caso si ottiene una distribuzione dei prezzi che riflette solo il rischio demografico, mentre nel secondo caso la distribuzione dei prezzi è più realistica in quanto incorpora sia la componente di rischio demografica che quella finanziaria.

Per entrambi gli scenari sono state calcolate le distribuzioni di densità dei prezzi per ogni *tranche* con le relative statistiche descrittive.

9.8.1 Codice R - Analisi di due ulteriori scenari di rischio

```

# Scenario cedole simulate e tasso medio simulato

# Calcolo tasso medio per ogni anno
r_mean <- colMeans(r_matrix_cir)
v_mean <- exp(-cumsum(r_mean)) #fattore di sconto continuo
                                fisso

```

```

# Calcolo del prezzo per ogni simulazione con cedole
simulate, ma attualizzando al vettore fisso v_mean (stesso
per tutte le simulazioni)

prices_fixed_rate <- matrix(NA, nrow = nsim,
                             ncol = n_tranche)

for (s in 1:nsim) {
  for (j in 1:n_tranche) {
    coupons_sim <- coupons_all[s, , j]
    prices_fixed_rate[s, j] <- sum(coupons_sim * v_mean) +
                                face_value * v_mean[h]
  }
}

# Plot densità
df_prices <- data.frame(prices_fixed_rate)
colnames(df_prices) <- paste0("Tranche_", 1:n_tranche)
df_prices_long <- melt(df_prices, variable.name = "Tranche",
                      value.name = "Price")

ggplot(df_prices_long, aes(x = Price, color = Tranche,
                          fill = Tranche)) +
  geom_density(alpha = 0.3) +
  labs(title = "Distribuzioni di densità dei prezzi per
             tranche",
       x = "Prezzo",
       y = "Densità") +
  theme_minimal() +
  theme(legend.title = element_blank())

# Statistiche descrittive per tranche
summary_stats <- data.frame(
  Tranche = 1:n_tranche,
  Media = numeric(n_tranche),
  Varianza = numeric(n_tranche),
  Asimmetria = numeric(n_tranche),
  Curtosi = numeric(n_tranche)
)

for (j in 1:n_tranche) {
  prices_j <- prices_fixed_rate[, j]
  summary_stats$Media[j] <- mean(prices_j)
  summary_stats$Varianza[j] <- var(prices_j)
  summary_stats$Asimmetria[j] <- skewness(prices_j)
  summary_stats$Curtosi[j] <- kurtosis(prices_j)
}
print(summary_stats)

```

```

# Scenario cedole simulate e tassi simulati

# Creazione della matrice dei prezzi con cedole simulate e
fattori di sconto simulati CIR

prices_mixed <- matrix(NA, nrow = nsim, ncol = n_tranche)

for (s in 1:nsim) {
  r_vec <- r_matrix_cir[s, ] # tassi CIR simulati
  v_vec <- exp(-cumsum(r_vec)) # fattori di sconto continui
                                (discretizzazione)

  for (j in 1:n_tranche) {
    coupons_sim <- coupons_all[s, , j] # cedole simulate
    prices_mixed[s, j] <- sum(coupons_sim * v_vec) +
                          face_value * v_vec[h]
  }
}

# Plot densità

df_prices_mixed <- as.data.frame(prices_mixed)
colnames(df_prices_mixed) <- paste0("Tranche_", 1:n_tranche)

df_prices_long <- melt(df_prices_mixed, variable.name =
                      "Tranche", value.name = "Price")

ggplot(df_prices_long, aes(x = Price, color = Tranche,
                          fill = Tranche)) +
  geom_density(alpha = 0.3, size = 1.2) +
  labs(title = "Distribuzione dei Prezzi - Cedole Simulate e
              Tassi CIR",
        x = "Prezzo",
        y = "Densità") +
  theme_minimal() +
  theme(legend.title = element_blank(),
        plot.title = element_text(hjust = 0.37))

# Statistiche descrittive per tranche
stats_summary <- aggregate(Price ~ Tranche, data =
df_prices_long, function(x) c(
  mean = mean(x),
  variance = var(x),
  skewness = moments::skewness(x),
  kurtosis = moments::kurtosis(x)
))

stats_summary <- do.call(data.frame, stats_summary)
colnames(stats_summary) <- c("Tranche", "Mean", "Variance",
"Skewness", "Kurtosis")
print(stats_summary)

```